F 754
KAT
531
669
621

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE METALURGIE ŞI MECANICĂ APLICATĂ

46
ELLENŐRIZVE
1953
Országos Műszaki Könyvtár BUDAPEST
2221 1960

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ ŞI METALURGIE

1—2
ANUL III
IANUARIE—IUNIE
1952

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE METALURGIE ŞI MECANICĂ APLICATĂ

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ ŞI METALURGIE

1—2
ANUL III
IANUARIE—IUNIE
1952

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN E. CARAFOLI – Redactor responsabil;
ACADEMICIAN N. PROFIRI; M. ARCAN; ȘT. MANTEA;
T. OROVEANU

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE METALURGIE ŞI MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ ŞI METALURGIE

Tomul III, Nr. 1—2 Ianuarie—Iunie 1952

SUMAR

Pag.

Pentru desvoltarea criticei şi a discuţiilor creatoare în ştiinţele tehnice 7

STUDII

MECANICĂ APLICATĂ

AL. SELEŞTEANU, Injecţia la motoarele cu combustie internă 15
N. TIPEI, Studiul traiectoriilor orizontale ale unui avion 27
N. S. PÂRVULESCU, Despre integrarea ecuaţiei liniei elastice în flambajul tijelor verticale, grele şi svelte 53
CRISTEA NICULESCU, Asupra barelor solicitate la compresiune axială .. 61
AL. STOENESCU, Aplicarea criteriilor de plasticitate în cazul grinzilor încovoiate 77
PANAIT C. MAZILU, Calculul spaţial al cadrelor cu grinzi longitudinale principale şi grinzi transversale secundare 85

METALURGIE

V. SINIANSKY, AL. BRANISKI, L. SOLOMON şi C. SĂVINEANU, Produse refractare forsteritice obţinute în fază pilot din serpentin ameliorat, fără adausuri 113
D. RAŞEEV, Tratamentul termic al fontelor cu grafit globular 117

NOTE

LUCIU N. SĂVEANU, Consideraţii asupra stabilităţii macaralelor rapide cu platforme rulante 133

REFERATE

T. OROVEANU, Aplicarea metodei lui Galerchin la studiul mişcării fluidelor compresibile 143
ŞT. MANTEA, Progrese recente în metalurgia metalelor şi aliajelor uşoare .. 153
GR. SOCOLESCU, Cuptoare folosind fluidizarea 163

RECENZII .....

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉTALLURGIE ET MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE ET DE MÉTALLURGIE

Tome III, Nos 1—2 Janvier—Juin 1952

SOMMAIRE

Page

Pour le développement de la critique et des discussions créatrices dans les sciences techniques 7

ÉTUDES

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

AL. SELEŞTEANU, L'injection dans les moteurs à combustion interne 15
N. TIPEI, Étude des trajectoires horizontales d'un avion..... 27
N. S. PÂRVULESCU, Sur l'intégration de l'équation de la ligne élastique dans le problème du flambage des tiges verticales, lourdes et sveltes..... 53
CRISTEA NICULESCU, Sur les barres sollicitées par la compression axiale 61
AL. STOENESCU, Application des critériums de plasticité dans le cas des poutres fléchies 77
PANAIT C. MAZILU, Le calcul spatial des cadres à poutres-maîtresses longitudinales et poutrelles transversales..... 85

MÉTALLURGIE

V. SINIANSKY, AL. BRANISKI, L. SOLOMON et C. SĂVINEANU, Produits réfractaires forstéritiques obtenus de la serpentine améliorée, sans addition de magnésie, dans une installation pilote..... 113
D. RAŞEEV, Traitement thermique des fontes à graphite globulaire..... 117

NOTES

LUCIU N. SĂVEANU, Considérations sur la stabilité des grues rapides à plates-formes roulantes..... 133

EXPOSÉS

T. OROVEANU, L'emploi de la méthode de Galerkine dans l'étude du mouvement des fluides compressibles..... 143
ŞT. MANTEA, Progrès récents dans la métallurgie des métaux et des alliages légers 153
GR. SOCOLESCU, Fours utilisant la fluidisation..... 163

RECENSIONS .....

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МЕТАЛЛУРГИИ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МЕХАНИКЕ И МЕТАЛЛУРГИИ

Том III, № 1-2 Январь—июнь 1952

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

За развитие критики и творческих дискуссий в технических науках . . 7

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

А. СЕЛЕШТЯНУ, Впрыскивание в двигателях внутреннего сгорания 15
Н. ТИПЕЙ, Исследование горизонтальных траекторий самолета 27
Н. ПЫРВУЛЕСКУ, Об интегрировании уравнения упругой линии в продольном изгибе тяжелых и легких вертикальных штанг 53
К. НИКУЛЕСКУ, О брусьях, подверженных осевому сжатию 61
А. СТОЕНЕСКУ, Применение критериев пластичности к изогнутым балкам . 77
П. МАЗИЛУ, Пространственный расчет рам с главными продольными и второстепенными поперечными балками 85

МЕТАЛЛУРГИЯ

В. СИНЯНСКИЙ, А. БРАНИСКИЙ, Л. СОЛОМОН и К. СЭВИНЯНУ, Форстеритовые огнеупоры, полученные из улучшенного серпентина, без примесей 113
Д. РАШЕЕВ, Термическая обработка чугунов с глобулярным графитом . . . 117

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Л. СЭВЯНУ, К устойчивости скоростных кранов с подвижными мостами . . 133

РЕФЕРАТЫ

Т. ОРОВЯНУ, Применение метода Галеркина к исследованию движения сжимаемых жидкостей 143
Ш. МАНТЯ, Последние успехи в металлургии легких металлов и сплавов . 153
Г. СОКОЛЕСКУ, Плавильные печи 163

РЕЦЕНЗИИ . . . . . .

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

PENTRU DESVOLTAREA CRITICEI ŞI A DISCUŢIILOR CREATOARE ÎN ŞTIINŢELE TEHNICE *)

In anii Planului cincinal stalinist postbelic, odată cu nemaivăzutele proporţii ale lucrărilor în domeniul refacerii şi desvoltării economiei socialiste, au crescut uriaş şi cerinţele economice impuse ştiinţei sovietice, precum şi volumul şi complexitatea temelor cercetărilor ştiinţifice din toate domeniile ştiinţelor tehnice.

Marea desvoltare şi realizările remarcabile ale ştiinţei tehnice sunt rezultatul direct al grijii neîncetate a marelui Partid al lui Lenin şi Stalin pentru înflorirea ştiinţei, pentru progresul tehnicei.

Ridicarea imensă în ceea ce priveşte desvoltarea forţelor productive, realizată în perioada de după terminarea victorioasă a marii Revoluţii din Octombrie, şi marea extindere a cercetărilor ştiinţifice sunt definite prin cuvintele lui Iosif Vissarionovici Stalin, conţinute în istoricul său discurs din 9 Februarie 1946. In acest discurs, tovarăşul Stalin a expus un măreţ program de redresare a economiei naţionale şi a indicat că se va acorda o deosebită atenţie construirii oricărui gen de institut de cercetări ştiinţifice, care trebue să dea posibilitate ştiinţei să-şi desfăşoare forţele ei.

«*Nu mă îndoiesc* — a spus tovarăşul Stalin — *că, dacă vom acorda ajutorul necesar oamenilor noştri de ştiinţă, aceştia vor şti nu numai să ajungă ci să şi întreacă, în timpul cel mai apropiat, realizările ştiinţei din afara hotarelor ţării noastre*».

Planul cincinal, la care se referă discursul istoric al tovarăşului Stalin, s'a distins prin construirea pe scară largă a noi institute de cercetări ştiinţifice şi prin noi succese creatoare ale oamenilor de ştiinţă sovietici. Este suficient să menţionăm doar una dintre cele mai mari realizări ale ştiinţei naţionale: stăpânirea energiei şi armei atomice. Succesele ştiinţei şi ale tehnicei sovietice şi-au găsit o imagine deosebit de clară în decernarea premiilor Stalin pentru cele mai bune lucrări ştiinţifice, invenţiuni şi perfecţionări radicale ale metodelor industriale.

Prin decretul Consiliului de Miniştri al U.R.S.S., publicat la 15 Martie 1951, au fost distinse cu premiul Stalin noi lucrări eminente ale oamenilor de ştiinţă, ale inginerilor şi inventatorilor din diverse domenii ale ştiinţei

*) Din Izvestia Academii Nauc SSSR, Otdelenie Tehniceschih Nauc, Nr. 4, 1951.

şi tehnicei. Printre noii laureaţi ai premiului Stalin, se disting 18 savanţi care lucrează în instituţiile Secţiei de Ştiinţe Tehnice a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. Lucrările laureaţilor premiului Stalin desvălue marea importanţă a colaborării creatoare care există între inovatorii din domeniul ştiinţei şi industriei.

Desfăşurarea construirii giganticelor centrale hidrotehnice din epoca staliniştă—mari construcţii ale comunismului—a scos în evidenţă noi probleme pentru oamenii de ştiinţă sovietici de diferite specialităţi. Probleme serioase şi de o deosebită răspundere se pun în faţa oamenilor de ştiinţă care lucrează în diferite domenii ale ştiinţelor tehnice. Aceste probleme pot fi soluţionate numai pe baza datelor înaintatei ştiinţe sovietice, pe baza celor mai noi realizări ale tehnicei.

In legătură cu aceasta trebue să subliniem în mod special că numai însuşirea deplină a teoriei marxist-leniniste şi aplicarea creatoare a acestei teorii, în toate domeniile de cunoştinţe concrete, vor da oamenilor de ştiinţă sovietici posibilitatea de a fi înarmaţi cu o ştiinţă înaintată: «...*o ştiinţă în cadrul căreia, înţelegând puterea şi importanţa tradiţiilor instaurate în ştiinţă şi folosindu-le în mod dibaciu în interesul ştiinţei, nu rămân totuşi robi ai acestor tradiţii, o ştiinţă care are îndrăsneala, hotărîrea de a rupe vechile tradiţii, norme, programe, atunci când acestea au fost depăşite, în sfârşit, acea ştiinţă care ştie să creeze noi tradiţii, noi norme, noi programe*». Aceste indicaţii ale tovarăşului Stalin sunt o călăuză pentru oamenii de ştiinţă sovietici; îi îndeamnă la luptă împotriva indolenţei, împotriva stagnărilor în ştiinţă, îi ajută să întreţină o atitudine creatoare faţă de ştiinţă, o atitudine pătrunsă de spiritul critic şi revoluţionar al dialecticei materialiste.

Genialele lucrări ale lui I. V. Stalin cu privire la lingvistică constitue o nouă contribuţie, de o importanţă istorică mondială, în teoria marxism-leninismului. Aceste opere ale tovarăşului Stalin au o importanţă principială profundă pentru întreaga ştiinţă sovietică, pentru lupta împotriva ideologiei burgheze. Tovarăşul Stalin a dat un nou şi minunat exemplu de desvoltare creatoare a marxismului şi a acordat o atenţie deosebită necesităţii de a se lupta împotriva cărturarilor de rea credinţă, împotriva talmudiştilor.

In lucrările cu privire la lingvistică, I. V. Stalin a indicat: «...*că nicio ştiinţă nu se poate desvolta şi prospera fără lupta de opinii, fără libertatea criticei*» şi a dat o lovitură de moarte regimului aracceevist, care se crease în lingvistică.

Directivele lui I. V. Stalin, cu privire la necesitatea luptei de opinii şi a libertăţii criticei pentru desvoltarea ştiinţei, determină una dintre cele mai importante condiţii pentru creşterea şi prosperarea ştiinţei sovietice şi constitue legea « mersului ei înainte ». In opinia noastră publică, sovietică, unde sunt lichidate clasele antagoniste, lupta între vechiu şi nou, şi prin urmare desvoltarea de jos în sus, nu se face sub formă de luptă între clase antagoniste, sau sub formă de cataclisme — cum se petrece în cazul capitalismului — ci sub forma criticei şi a autocriticei. Aceasta constitue adevărata forţă motrice a desvoltării noastre, un instrument puternic în mâinile Partidului. Aceasta este fără îndoială o nouă formă de mişcare, un nou tip de desvoltare, o nouă lege dialectică (A. A. Jdanov).

Lucrările tovarăşului I. V. Stalin, cu privire la lingvistică, sunt pentru oamenii de ştiinţă sovietici o armă în lupta lor împotriva rutinei şi a dogma-

tismului, împotriva infiltrărilor ideologice burgheze în cercetările ştiinţifice, împotriva încercărilor de a « monopoliza » unele domenii ale cunoştinţelor, împotriva regimului araccevist în ştiinţă, ele constituesc o armă de luptă pentru progresul ştiinţei.

Plenara de Partid, care a avut loc în Noembrie 1950 în instituţiile ştiinţifice ale Secţiei de Ştiinţe Tehnice a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., a chemat toate organizaţiile de partid şi toate colectivele ştiinţifice ale S.S.T., să studieze, să adâncească, să-şi însuşească lucrările lui I. V. Stalin în domeniul lingvisticei, în scopul de a se include în activitatea ştiinţifică directivele conţinute în aceste lucrări. Una din cele mai urgente probleme în legătură cu această chestiune este desvoltarea criticei şi a discuţiilor creatoare în ştiinţele tehnice.

In anul 1950, cu participarea institutelor Secţiei de Ştiinţe Tehnice, cu participarea ministerelor, a institutelor aferente de cercetări ştiinţifice, a şcoalelor superioare, a întreprinderilor industriale, a publicului ştiinţific şi tehnic, s'au făcut 30 de mari consultaţii ştiinţifice şi o serie de discuţii cu privire la diferitele probleme şi direcţii actuale. Totuşi, trebue să spunem pe faţă că Secţia de Ştiinţe Tehnice mai are încă multe de făcut, pentru ca în instituţiile S.S.T. să desvolte în viitor o critică şi o autocritică bolşevică îndrăsneaţă în domeniul problemelor principiale ale ştiinţelor tehnice. Aceasta va contribui mult la înlăturarea neajunsurilor în activitatea secţiei în ansamblul ei.

Unele din aceste consultaţii au constituit într'adevăr un exemplu de critică ştiinţifică; rezultatele lor, fără îndoială, vor avea o influenţă binefăcătoare asupra desvoltării diferitelor discipline tehnice.

Astfel, consfătuirea unională ţinută de Institutul de minerale combustibile al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi de către Societatea unională de chimie « D. I. Mendeleev » (în Ianuarie 1950) a tratat despre problemele de geneză, despre chimia şi tehnologia mineralelor combustibile solide. La lucrările consfătuirii au luat parte peste 350 de specialişti—colaboratori ştiinţifici ai Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., ai Academiilor de Ştiinţe ale Republicilor Unionale, ai institutelor aferente de cercetări ştiinţifice, ai şcoalelor superioare. Consfătuirea a desbătut în mod critic rezultatele lucrărilor ştiinţifice executate şi a trasat măsuri pentru desvoltarea în viitor a cercetărilor în domeniul chimiei şi genezei combustibilului solid, măsuri urmărind satisfacerea cerinţelor economiei naţionale în cele mai bune condiţiuni. Menţionând marile realizări ale ştiinţei sovietice în domeniul mineralelor combustibile solide şi folosirea lor industrială, consfătuirea a descoperit o serie de neajunsuri care există în acest domeniu.

Consfătuirea a mai remarcat că studiul proceselor care determină trecerea materiei mineralelor combustibile solide dela unele stadii la cele următoare, în speţă studiul proceselor microbiologice, este insuficient adâncit. Au fost supuse unei critici severe teoriile pseudoştiinţifice care frânează desvoltarea ştiinţei şi au fost elogiate noile direcţii progresiste în studiul combustibilului mineral solid. Consfătuirea a desvăluit fondul reacţionar şi inutilitatea teoriilor savanţilor burghezi (Fischer, Mackenzie-Taylor şi succesorii acestora) despre formarea cărbunilor ca un proces de aglomerare de substanţe biologice stabile, teorii construite fără a se ţine seama de reacţiile de sinteză şi de alţi factori importanţi.

Consfătuirea a atras atenţia că numai o aplicare totală a cunoştinţelor pe care chimia, biologia, fizica, geologia şi petrografia modernă ni le dau,

va permite ca în studierea mineralelor combustibile să ne apropiem de cunoaşterea reală a genezei, a compoziţiei şi a proprietăţilor acestor combustibili.

Marea consfătuire a Institutului minier al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. (Octombrie 1950) a examinat din toate punctele de vedere starea lucrărilor în domeniul teoriei flotaţiei mineralelor utile nemetalice şi a supus unei analize critice o serie de probleme discutabile, descoperind unele principii greşite în câteva lucrări. Consfătuirea a subliniat marile realizări ale savanţilor sovietici în domeniul flotaţiei. Cu această ocazie ea a arătat că situaţia generală a teoriei flotaţiei nu poate fi considerată satisfăcătoare. Aceasta se explică, în mare parte, prin nivelul teoretic coborît al unora dintre cercetători şi prin lipsa unei critice ştiinţifice adevărate cu privire la lucrările de flotaţie.

Consfătuirea a supus criticei supraevaluarea acordată în unele cărţi (C. F. B e l o g l a s o v) rolului lucrărilor savanţilor burghezi şi a respins în mod hotărît încercările de a se folosi în tratarea interacţiunii dintre reactivi şi minerale aşa numita «teorie a rezonanţei stărilor de valenţă», bazată pe reprezentările idealiste ale structurii compuşilor chimici. La consfătuire s'a subliniat că directivele tovarăşului S t a l i n privitoare la căile de desvoltare a ştiinţei sovietice, la necesitatea luptei de idei şi a libertăţii criticei pentru prosperarea ştiinţei, au o importanţă excepţional de mare pentru toate lucrările din domeniul teoriei flotaţiei.

Discuţia ştiinţifică, organizată de Secţia de Ştiinţe Tehnice (în Iunie 1950), cu privire la problemele ştiinţei sovietice din domeniul rezistenţei şi plasticităţii, a constituit în această secţie una dintre primele încercări de a se organiza discuţii ştiinţifice mai largi. La discuţie au participat aproape 500 de colaboratori ştiinţifici ai institutelor Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., ai Academiilor de Ştiinţe ale Republicilor Unionale, ai institutelor aferente de cercetări ştiinţifice, ai şcoalelor superioare, reprezentanţi ai organizaţiilor de proiectare şi ai întreprinderilor industriale. Adunarea consultativă a arătat că ştiinţa sovietică a atins, în domeniul rezistenţei şi plasticităţii, realizări remarcabile în ceea ce priveşte rezolvarea unor probleme de mare importanţă din punct de vedere economic. Putem spera că discuţia va contribui la concentrarea eforturilor fizicienilor, metalografiştilor şi mecanicienilor în domeniul prelucrării problemelor de rezistenţă şi plasticitate. S'a remarcat însă, cu această ocazie, la expunerea rapoartelor, că discuţia are un nivel ştiinţific destul de scăzut. S'a hotărît să se reexamineze în mod profund, şi aceasta cât mai curând, toate problemele, atât cele teoretice, cât şi cele bazate pe cercetările experimentale. Adunarea consultativă a hotărît să examineze în special lucrările Membrului corespondent al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., I. O d i n g, cu privire la problemele de creep, viscozitate ciclică şi relaxare. Comisiunea S.S.T. a recomandat lui I. O d i n g să publice lucrarea care generalizează cercetările lui în domeniul viscozităţii ciclice, al creepului şi al relaxării, căutând să elimine în această lucrare erorile şi neajunsurile pe care le-au avut lucrările ce i-au fost editate anterior. Trebue să spunem că lucrările lui I. O d i n g în domeniul plasticităţii nu au fost cercetate în deajuns de către Comisiune.

Să ne oprim de asemenea şi asupra rezultatelor discuţiei ştiinţifice cu privire la metodele analitice în minerit, discuţie organizată de către Consiliul ştiinţific al Institutului minier al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. (în Octombrie 1949). S'au supus criticei lucrările academicianului L. D. S e v e a -

c o v și ale colaboratorilor și succesorilor lui în acest domeniu. O serie de reprezentanți ai Ministerului Industriei Carbonifere a U.R.S,S., ai Ministerului Industriei Metalurgice a U.R.S.S. și ai instituțiilor de proiectare au criticat metoda analitică prelucrată de L. D. S e v e a c o v. In rezoluția adoptată de consfătuire, cu toate că se subliniază că metoda analitică, deopotrivă cu celelalte metode, a jucat la timpul său un rol esențial în proiectarea întreprinderilor miniere, se recunoaște totuși că această metodă a pierdut mult din importanța sa inițială în faza actualei rezolvări practice a problemelor miniere, în primul rând, din cauza insuficientei atenții acordate analizei practicei miniere. Principiile existente în domeniul prelucrării metodelor analitice și în domeniul aplicării lor practice la proiectarea întreprinderilor miniere sunt considerate de către Consiliul științific al Institutului minier drept nesatisfăcătoare.

In mai multe expuneri s'au remarcat serioase neajunsuri.

Desfășurarea discuției n'a permis să se facă o examinare mai profundă a problemelor ridicate în fața științei mineritului. Obligat a Consiliului științific al Institutului minier era aceea de a clarifica pe deplin felul în care s'au prezentat lucrările închinate prelucrării metodelor analitice în minerit. Acest lucru însă nu s'a făcut nici până astăzi. Este dela sine înțeles că problemele referitoare la metoda analitică nu trebue să distragă atenția dela probleme de primă importanță, cum sunt mecanizarea completă a extracției de cărbune, sistemele de prelucrare, problema presiunii litosferice.

Până astăzi, majoritatea instituțiilor științifice ale Secției de Științe Tehnice încă n'au tras toate învățăturile din lucrarea tovarășului S t a l i n cu privire la problemele de lingvistică. In consiliile științifice ale unor instituții ale S.S.T., nici până astăzi nu au fost desbătute în mod cuvenit aceste lucrări fundamentale. Consiliile științifice nu asigură încă, într'o măsură largă, desvoltarea criticei și a autocriticei în științele tehnice. Discuțiile științifice, una dintre cele mai importante metode pentru ridicarea nivelului teoretic și pentru aprecierea practică a cercetărilor științifice, în institute, secții și comisiile permanente ale S.S.T., nu au căpătat încă răspândirea necesară.

Au avut loc discuții care nu tratează, nici măcar pe departe, direcțiile principiale, călăuzitoare în științele tehnice, acele direcții care în primul rând ar trebui examinate critic.

Rezultatele discuțiilor trebue să-și găsească răsunet în lucrările adunărilor generale ale Secției. Biroul Secției de Științe Tehnice trebue să includă în sistemul activității sale o examinare critică susținută a rezultatelor cercetărilor științifice în legătură cu problemele fundamentale prelucrate de Institute și Secții și să ia măsuri energice care să dirijeze desvoltarea discuțiilor creatoare în S.S.T. Trebue să recunoaștem că Adunarea Generală a academicienilor și a membrilor corespondenți ai Secției, precum și biroul S.S.T., nu-și îndeplinesc până acum în măsura necesară rolul arătat. La fel, nici Institutele Secției nu desvoltă o critică și autocritică științifică largă asupra lucrărilor ei.

Astfel, Institutul de Energetică nu a organizat până acum discuții asupra problemelor utilizării curentului continuu și alternativ în cazul transmiterii energiei electrice la distanțe mari. Cu toate acestea, din cauza creșterii mari a energeticei în U.R.S.S., lămurirea acestor probleme este deosebit de importantă. Discuția începută în Institutul de Energetică, referitoare la lucrările din domeniul combustiei fără flacără, nu a luat extinderea necesară.

Consiliul Ştiinţific al Institutului Minier reacţionează cu mare întârziere la critica adusă unor lucrări ale acestui Institut. Astfel, încă din luna Mai 1949, în ziarul Izvestia a fost publicată o recenzie a cărţii doctorului în ştiinţe tehnice M. I. A b o ş c o v, *Determinarea productivităţii unei mine*, conţinând critica neajunsurilor acestei cărţi. De abia în Ianuarie 1951, Consiliul Ştiinţific al Institutului a examinat această lucrare, remarcând existenţa unor formulări greşite, precum şi faptul că în carte nu s'a apreciat în deajuns rolul planificării economice în rezolvarea problemei productivităţii anuale a minei, în condiţiile economiei socialiste. Asemenea «teme» în desfăşurarea criticei reduc eficacitatea acesteia şi nu contribue la îndepărtarea la timp a neajunsurilor.

Institutul de Maşini nu a dat dovadă de iniţiativă în ducerea discuţiilor a căror necesitate a început să apară şi care într'o serie de cazuri se organizează fără participarea Institutului; de pildă, discuţiile cu privire la teoria exactităţii mecanismelor, cu privire la angrenajele cu dinţi.

In domeniul mecanicei există multe probleme actuale necesitând o desbatere prin discuţii publice, de pildă problemele mecanicei teoretice. Se ştie că problemele de mecanică teoretică sunt expuse în literatura didactică şi cea ştiinţifică, în cea mai mare parte în spiritul reprezentărilor învechite, care nu ţin seama de cele mai noi realizări din fizică, şi astfel, predarea mecanicei în Universităţi se face după un sistem vechiu. Institutul de Mecanică al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. trebue să fie în fruntea luptei pentru întărirea poziţiilor unei ştiinţe înaintate în domeniul arătat. De asemenea, cer o grabnică desbatere şi unele probleme de aero-hidrodinamică.

In Institutul de Automatică şi Telemecanică, probleme importante ca teoria reglării automate, automatizarea complexă a industriei, telemecanica nu sunt supuse unei desbateri critice largi. In desbaterea stării în care se găseşte în prezent teoria schemelor de contact prin relee, desbatere care a avut loc în Consiliul Ştiinţific al Institutului (în Mai 1950), s'a semnalat că teoria prelucrată de doctorul în Ştiinţe Tehnice M. A. G a v r i l o v nu-şi găseşte o aplicare practică în industrie. Consiliul Ştiinţific al Institutului nu a supus însă unei analize critice această teorie şi a preferat să adopte o rezoluţie în care nu există niciun fel de critică la adresa teoriei. Organul publicitar al Institutului a dat la o parte desbaterea critică atât a acestei probleme, cât şi a altor probleme de automatică şi telemecanică.

Măreaţa construcţie hidroenergetică ce se realizează în U.R.S.S. atrage după sine şi desbaterea unor probleme mai puţin prelucrate, însă foarte urgente, ale hidrotehnicei sovietice, ca de pildă: metode pentru calculul cursului fluvial în condiţiile variaţiei regimului său sub influenţa acţiunii împăduririlor, a sistemului de irigaţii, al agriculturii şi îmbunătăţirii funciare, determinarea coeficientului de siguranţă în calculele construcţiilor hidrotehnice, etc. Critica ştiinţifică trebue să-şi îndrepte toate puterile către desrădăcinarea influenţei teoriilor pseudoştiinţifice ale savanţilor burghezi în domeniul hidrologiei. Aceste probleme importante nu se găsesc încă în centrul atenţiei Secţiei pentru prelucrarea ştiinţifică a problemelor resurselor de apă.

Problemele actuale ale transportului nu formează încă obiectul discuţiilor în Secţia pentru prelucrarea ştiinţifică a problemelor de transport.

O importanţă nepreţuită o au lucrările lui I. V. S t a l i n în domeniul lingvisticei pentru întreaga lucrare terminologică de punere la punct a pro-

blemelor terminologiei tehnice și științifice. «*Orice idei ar apare în capul omului și oricând ar fi apărut acestea*, spune tovarășul Stalin, *ele nu pot apare și nici exista decât pe baza materialului lingvistic, pe baza termenilor și frazelor lingvistice*».

«... *limba, mai exact vocabularul ei, se află într'o schimbare aproape neîntreruptă. Desvoltarea continuă a industriei și agriculturii, a comerțului și a transporturilor, a tehnicei și a științei cere limbii completarea vocabularului cu cuvinte și expresii noi, necesare activității lor și limba, reflectând nemijlocit aceste nevoi, își completează vocabularul cu cuvinte noi, își perfecționează structura ei gramaticală*».

Aceste directive ale tovarășului Stalin determină importanța și direcția activității în domeniul terminologiei tehnico-științifice, care constituesc unul din sectoarele de răspundere în activitatea Secției de Științe Tehnice. Lucrările acestui sector sunt departe de a răspunde noilor cerințe ale științei și tehnicei sovietice. De pildă, în majoritatea discuțiilor tehnice lipsește o clasificare științifică și solidă a noțiunilor, fără de care nu este posibilă o ordonare a termenilor. Terminologia tehnică rusească, în multe cazuri, se completează, ca să nu zicem că se complică, cu termeni străini.

Consiliul Științific al Comitetului pentru terminologia tehnică a dat dovadă de o inițiativă bună supunând unei largi desbateri (15 Martie 1951) raportul academicianului V. V. Vinogradov, *Problemele cuvintelor derivate din literatura rusă modernă în lumina lucrărilor lui I. V. Stalin cu privire la lingvistică*. In hotărîrea sa cu privire la problema importanței unei redări exacte a esenței fizice în definirea noțiunilor, Consiliul Științific al Comitetului pentru terminologia tehnică a menționat că terminologia tehnică trebue să fie prelucrată exclusiv pe baza solidă și corectă a materialismului dialectic; și anume, în definirea noțiunilor fundamentale și în sistemul acestor definiții, fiecare știință tehnică concretă vine în cel mai strâns contact cu filosofia și din această cauză este nevoie aici de aplicarea hotărîtă și consecventă a teoriei marxism-leninismului.

Comitetului pentru terminologie tehnică îi revine importanta sarcină de a coordona activitatea institutelor de cercetări științifice și a școalelor superioare, de a realiza această coordonare legată de o revizuire critică și de o ordonare a terminologiei.

Revistele științifice ale Secției nu-și îndeplinesc încă rolul lor organizatoric și îndrumător în desfășurarea criticei științifice. Revista Izvestia AN. SSSR, OTN a desvoltat în ultimii ani capitolul discuțiilor științifice, publicând o serie de articole și treceri în revistă critice cu privire la problemele de rezistență și plasticitate, metode cu calcul analitic în minerit, teoria flotației, problema clasificării în transportul de cale ferată și diverse materiale critico-bibliografice.

Revista Matematică și mecanică Aplicată a publicat critica adusă mai multor lucrări (F. S. Nelson-Scorniacov, I. Oding și alții). Totuși, acest lucru este departe de a fi suficient.

Problemele desvoltării în viitor a Secției de Științe Tehnice a Academiei de Științe a U.R.S.S. și a Institutelor ei Științifice, proporțiile căpătate și importanța lucrărilor de cercetare științifică puse în slujba economiei socialiste, dictează necesitatea imperioasă a unei creșteri a nivelului ideologic

şi politic al cadrelor ştiinţifice, necesitatea unei folosiri mai mari în ştiinţele tehnice a criticei şi a autocriticei, armă puternică din arsenalul bolşevismului, armă în permanenţă activă.

Călăuziţi de înţeleptele directive ale tovarăşului Stalin, însufleţiţi de operele sale geniale, oamenii de ştiinţă sovietici vor şti să rezolve cu cinste noile mari probleme pe care construirea comunismului le atrage după sine.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1–2, 1952

MECANICĂ APLICATĂ

INJECŢIA LA MOTOARELE CU COMBUSTIE INTERNĂ

DE

AL. SELEŞTEANU

1. *Analiza factorilor determinanţi*

Existenţa diferitelor forme constructive pentru transformarea energiei chimice în energie termică la motoarele cu combustie internă necesită o sistematizare ştiinţifică a acestor forme, pentru a ajunge la o bună înţelegere a fenomenelor.

Din punctul de vedere fizic, această sistematizare se bazează pe accentuarea fenomenelor secundare ce intră în procesul de transformare. In ceea ce priveşte sistematizarea tehnică, ea este bazată pe studii comparative asupra gradului de perfecţiune, a posibilităţilor de execuţie şi de adaptare. Pentru matematician, această sistematizare formează fixarea condiţiilor de limită în rezolvarea ecuaţiilor care guvernează fenomenele cercetate.

Este de altfel clar — şi materialismul dialectic ne confirmă — faptul că nu se poate trata fenomenul injecţiei în mod izolat — separat de procesele care sunt în directă legătură cu el — acest fenomen fiind influenţat uneori în mod decisiv de procesele secundare.

Elementele constructive care influenţează direct fenomenul injecţiei sunt:

1. *Camera de ardere*

A. Camere unitare (M. A. N., Hesselman, Sauer, Junkers)
B. Camere împărţite:
  a) Antecameră (Benz, Ganz, Deutz, Büssing)
  b) Contracameră (M. A. N., Lanova)
  c) Turbocameră (Comet I, II, III).

2. *Pompa*

A. Acţionare prin axă cu came, reglaj cu piston (Bosch, uzinele Chirov-Cuibîşev)
B. Acţionare cu şaibă înclinată, distribuitor central (Excello)
C. Pompă cu injector-monobloc (G. M. C.)
D. Piston dublu cu arc (Scintilla).
E. Acţionare cu came combinate cu mecanism cu braţ (Kammince).

3. *Injectoarele*, care se pot grupa în injectoare deschise și închise (cu ac și arc).

4. *Reglajul*, care se realizează în următoarele feluri:

A. Came înclinate

B. Supape de laminare

C. Supape de scăpare, acționate fie mecanic prin pârghii, fie formate prin canalul pistonului.

In ceea ce privește alegerea sistemului de injecție, atât funcționat cât și constructiv, care să asigure condiții optime de funcționare a întregului motor, trebue să se țină seama de o serie de fenomene legate de camera de ardere, și anume:

Vitesa de propagare a jetului;

Gradul de pulverizare a combustibilului;

Unghiul de răspândire a jetului.

Fenomenul propriu zis al injecției poate fi sintetizat într'o serie de etape, conform schiței și adnotațiilor de mai jos (fig. 1):

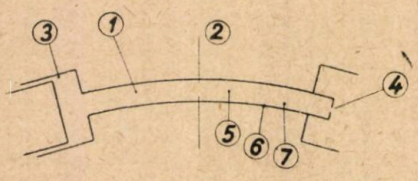


Fig. 1

1. Ecuațiile cu derivate parțiale pentru mișcarea unidimensională a fluidelor;
2. Condițiile fizico-matematice pentru suprafața de șoc;
3. Condițiile inițiale la pompa de injecție;
4. Condițiile finale la injector;
5. Caracteristicele fluidului, respectiv combustibilului (compresibilitate, viscozitate);
6. Caracteristicele conductei (elasticitate);
7. Comportarea fluidului în conducte (frecarea și repartizarea vitesei pe secțiune);
8. Variațiunile de secțiuni, curbe, coturi;
9. Reflecția undelor de șoc și suprapunerea undelor;
10. Neetanșeități în elementele de injecție.

2. *Bazele fizico-matematice*

Fenomenul injecției bazându-se pe propagarea undelor de șoc, toate ecuațiile cunoscute din mecanica fluidelor trebue completate pentru a include în ele și acest factor de discontinuitate, ecuațiile obișnuite formând un caz particular al fenomenului general.

Pentru ecuațiile cu derivate parțiale, vom avea de considerat mai multe mișcări analoage cu mișcarea de ghidaj, mișcarea relativă și mișcarea absolută din mecanică, și anume:

Vitesa de mișcare a fluidelor w;

Vitesa de deplasare a suprafeței de șoc în spațiu u;

Vitesa de propagare a undei față de mediu, a.

Ținând seama de aceste mișcări și pe baza schiței de mai jos, ecuațiile de continuitate și de echilibru vor avea următoarea formă:

Continuitate:

$$\frac{\partial(\rho w f)}{\partial x} + \left[\frac{\partial(\rho f)}{\partial t}\right]_{\xi} = 0$$

$$dt_{\xi} = \frac{dx}{a} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial(\rho w f)}{\partial x} + a\frac{\partial(\rho f)}{\partial x} = 0$$

de unde se obține:

$$\rho(a + w) f = C_1$$

Echilibru:

$$\rho f\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]_{x+\xi} + \frac{\partial(pf)}{\partial x} = 0$$

sau

$$\rho f(a + w)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial(pf)}{\partial x} = 0$$

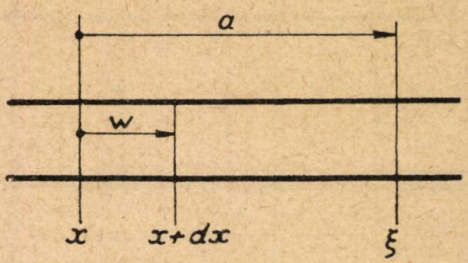


Fig. 2

de unde se obține

$$\int\frac{d(pf)}{\rho f} + \frac{w^2}{2} + aw = C_2 .$$

Aceste ecuații satisfac fenomenul propagării suprafețelor de discontinuitate și se transformă în ecuația continuității, respectiv a lui Bernoulli sau a lui Allievi, în cazuri extreme ((1) $a = 0$; (2) $w \ll a$).

O serie de condiții caracteristice se produc chiar în suprafața de șoc și în acest scop este necesară studierea în mod mai detaliat a acesteia. Pentru regiunile imediat învecinate suprafeței de discontinuitate, vom putea scrie următoarele relații:

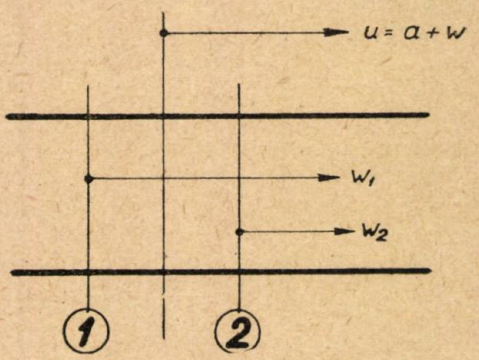


Fig. 3

Continuitate:

$$\rho_1 f_1 w_1 = \rho_2 f_2 w_2$$

Impuls:

$$p_1 f_1 - p_2 f_2 - p'(f_1 - f_2) = \rho_1 f_1 a_1 (w_1 - w_2)$$

Energie:

$$p_1 f_1 w_1 - p_2 f_2 w_2 = \rho_1 f_1 a_1\left[\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{gC}{A}(T_1 - T_2)\right].$$

Fenomenul de producere, transmitere și disipație a energiei hidrodinamice, care pornește din locul primar de perturbație (în cazul injecției în motoare

dela pistonașul pompei de injecție), poate fi tratat aplicând legea impulsului la massa influențată de șocul primar.

In conformitate cu schema de mai jos, acest fenomen poate fi sintetizat în următoarele operații:

Impuls:

$$Pdt = f\Delta p dt = d(mw) = \rho f (a + w)\, \Delta w\, dt$$

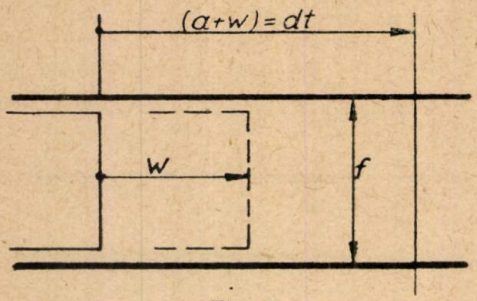


Fig. 4

de unde:

$$\Delta p = \rho (a + w)\, \Delta w$$

Densitate:

$$\rho (a + w)\, dt = \rho_* a\, dt$$

de unde:

$$\rho_* = \rho \left(1 + \frac{w}{a}\right)$$

Frecare:

$$f\Delta p = -\tau \cdot u' \cdot \Delta x \text{ sau}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{\tau u'}{f}.$$

Combinarea fenomenului de producere a presiunii cu fenomenul de disipație ne dă:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{\partial p}{\partial x} dx = \rho (a + w) \frac{\partial w}{\partial t} dt - \frac{\tau u'}{f} dx$$

sau înlocuind:

$$\frac{dx}{dt} = a + w$$

$$\frac{dp}{dt} = (a + w) \left(\rho \frac{dw}{dt} - \frac{\tau u'}{f}\right).$$

Aceste relații permit calcularea repartizării presiunilor și vitezelor în conductă, pornind dela locul de perturbație, adică dela mișcarea pistonașului pompei de injecție.

O serie de rezultate importante pot fi obținute din considerente energetice, care prin simplicitatea lor tind să se introducă din ce în ce mai mult în toate domeniile de cercetări științifice și tehnice.

Se poate considera că în primul moment șocul produs se transformă în energie potențială de deformație a fluidului, care se împarte pe urmă în energie cinetică de propagare și energie de disipație (energia termică, care în cazul lichidelor este redusă, o vom neglija).

Putem scrie:

$$\varepsilon_{pot} = -\int_{p}^{p+\Delta p} pdV = \int \frac{m}{\rho^2}\frac{d\rho}{dp} pdp = \frac{m}{2}\frac{(p+\Delta p)^2 - p^2}{\left(\rho\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\right)^2}$$

sau cu:

$$\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a$$

$$\varepsilon_{pot} = m\frac{p\Delta p}{(\rho a)^2} + \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta p}{\rho a}\right)^2,$$

$$\varepsilon_{cin} = \frac{m}{2}[(w+\Delta w)^2 - w^2] = mw\Delta w + \frac{m}{2}(\Delta w)^2.$$

Legea păstrării energiei ne dă în acest caz:

$$\Delta p = \rho a \Delta w,$$

$$p = \rho a w,$$

$$\frac{d\varepsilon_{dis}}{dt} = -\tau u' a\, \Delta t \cdot w = -\frac{\tau u'}{f}\cdot\frac{mw}{\rho},$$

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{pot}\,(\text{sau } \varepsilon_{cin}) - \int \frac{d\varepsilon_{dis}}{dt}\, dt.$$

Relațiile indicate formează scheletul științific al cercetărilor în legătură cu problema injecției la motoarele cu combustie internă. Adaptarea lor la probleme concrete se poate obține prin considerațiile asupra condițiilor de limită.

Este interesant să se facă o comparație între fenomenele dinamice cercetate și procesul static, care ar reieși, neglijând propagarea undelor de șoc. În acest din urmă caz, obținem:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial V}dV + \frac{\partial p}{\partial G}dG$$

sau cu:

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2$$

$$dV = -w_1 f_1\, dt$$

$$dG = -\rho g w_2 f_2\, dt$$

$$dp = \frac{\rho a^2}{V}(w_1 f_1 - w_2 f_2)\, dt = \psi \rho a\,(w_1 - w_2)$$

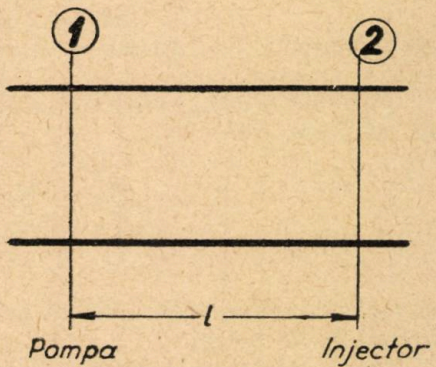


Fig. 5

unde prin ψ se înțelege raportul între presiunea statică și cea dinamică:

$$\psi = \frac{adt}{l} = \frac{a}{l}\frac{ds}{w}.$$

și acest raport este determinat de lungimea conductei.

Putem considera o conductă lungă atunci când $\psi < 1$ și o conductă scurtă atunci când $\psi > 1$.

Din aceste considerente reiese că numai în cazul conductelor scurte fenomenele statice pot înlocui considerațiunile dinamice, iar în cazul conductelor lungi $\psi < 1$, această înlocuire nu este admisibilă.

3. *Metoda de calcul*

Metoda uzuală de calcul al fenomenelor de injecție în cazul injectorului deschis constă, conform schiței de mai jos, în aplicarea următoarelor ecuații:

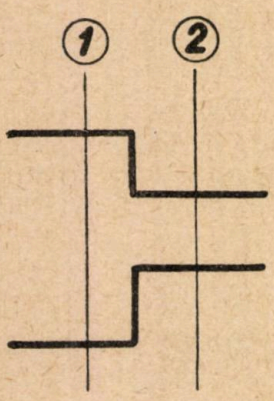


Fig. 6

1. Corelația cinematică: $w_1 = w_1' + w_1''$; $p_1 = p_1' + p_1''$ (unde valorile w_1', p_1' se referă la unda sosită, iar valorile w_1'', p_1'' se referă la unda reflectată).

2. Continuitatea: $w_1 f_1 = w_2 f_2$.

3. Legile lui Allievi: $p_1' = p_0 - \rho a w_1'$; $p_1'' = \rho a w_1''$ (unde p_0 este presiunea inițială în conductă).

4. Legile lui Bernoulli: $p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho w_2^2}{2}$.

5. Condiția inițială: $p_0 = p_2$.

Rezultatele care se obțin sunt valabile numai în cazul unui orificiu scurt, influența lungimii orificiului neputându-se lua în considerație, iar aplicarea a două feluri de legi (Allievi și Bernoulli) pentru același fenomen de curgere a fluidului sub influența șocului produce o impresie artificială, nejustificată în deajuns din punct de vedere teoretic.

Formula finală pentru vitesa w_1, care se obține prin rezolvarea ecuațiilor de mai sus, este:

$$w_1 = \frac{a}{\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1}\left[\sqrt{1 + \frac{4w_1'}{a}\left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1\right]} - 1\right]$$

și poate fi analizată și aplicată pentru cazurile specifice, unde sunt valabile premisele de calcul.

Pentru tratarea problemei dintr'un punct de vedere unitar, care să permită aplicarea judicioasă a legilor fizice și care să țină seama și de lungimea injectorului, vom porni dela legile general valabile, și anume:

1. Corelația cinematică: $w_1 = w_1' + w_1''$

2. Continuitatea: $w_1 f_1 = w_2 f_2$

3. Principiul general de curgere a unui fluid cu suprafețe de discontinuitate:

$$\underbrace{p_1 + \frac{\rho_1 w_1^2}{2} + \rho_1 a_1 w_1'}_{\text{unda primară}} = \underbrace{p_2 + \frac{\rho_2 w_2^2}{2} + \rho_2 a_2 w_2}_{\text{unda secundară}} + \underbrace{\rho_1 a_1 w_1''}_{\text{unda reflectată}}$$

In această ecuație:

p este presiunea statică,
$\rho w^2/_2$ este presiunea dinamică și
$\rho a w$ este presiunea de șoc.

4. Condiția inițială: $p_1 = p_2$.
Rezolvarea acestor ecuații ne dă ca rezultat (presupunând că: $\rho_1 = \rho_2$):

$$w_1 = \frac{a_1}{\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1}\left(1 + \frac{a_2 f_1}{a_1 f_2}\right)\left[\sqrt{1 + \frac{4w_1'}{a_1}\frac{(f_1/f_2)^2 - 1}{\left(1 + \frac{a_2 f_1}{a_1 f_2}\right)^2}} - 1\right].$$

Această formulă ne permite aflarea vitesei în conducte în toate cazurile; în special pentru conducta a doua — extrem de scurtă — ($a_2 = 0$) avem formula care se obține și după metoda tratată sub punctul I, iar pentru conducta lungă ($a_2 = a_1$), obținem:

$$w_1 = \frac{a_1}{f_1/f_2 - 1}\left[\sqrt{1 + \frac{4w_1'}{a_1}\frac{f_1/f_2 - 1}{f_1/f_2 + 1}} - 1\right].$$

Influența lungimii conductei se manifestă prin valoarea vitesei a_2, pentru care putem deduce ușor, ținând seama de suprapunerea undelor primare cu cele reflectate:

$$a_2 = \frac{2l}{T} \text{ pentru : } l < \frac{a_1 T}{2},$$

$$a_2 = a_1 \text{ pentru : } l > \frac{a_1 T}{2}$$

unde prin T se înțelege durata șocului.

4. *Exemplu de calcul*

Exemplul numeric ne dă un aspect mai clar al problemei :
Pentru:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1400 \text{ m/s.} \\ n &= 3000 \text{ l/min.} \\ a &= 10° \text{ durata injecției} \end{aligned}\right\} \quad T = \frac{1}{1800} \text{ sec.}$$

$$f_1/f_2 = \left(\frac{4}{0{,}4}\right)^2 = 100$$

$$w_1' = 5 \text{ m/s.}$$

Putem calcula din formula generală:

l =	0	100	400 mm
a_2 =	0	360	1400 m/s.
w_1 =	1,7	0,4	0,1 m/s.

Grafic, rezultatul este redat în felul următor:

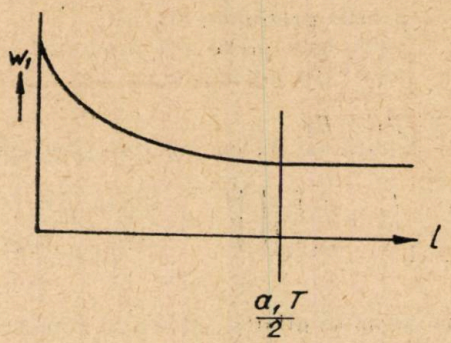


Fig. 7

Influența lungimii injectorului este mare și cu aceasta se pot explica divergențele în fenomenele de propagare a jetului după ieșirea din injector, pentru care s'a căutat o explicație artificială, printr'o alegere a coeficientului de frecare foarte variabil.

5. *Rezultate*

Analiza rezultatelor obținute prin formula generală poate da o serie de concluziuni de interes practic și o vedere de ansamblu mai clară asupra fenomenului de injecție.

O serie de cazuri speciale sunt redate în următorul tablou:

Felul conductei și felul undei	Cazul general	Injector scurt	Injector lung
Conductă închisă $f_2 = 0$	$w_1 = 0$	$w_1 = 0$	$w_1 = 0$
Conductă de secțiuni egale $f_2 = f_1$	$w_1 = \dfrac{2\,w_1'}{1 + \dfrac{a_2}{a_1}}$	$w_1 = 2w'$	$w_1 = w_1'$
Undă fără reflecție $w_1 = w_1'$	$f_1/f_2 = \sqrt{1 + 2\dfrac{a_1}{w_1'} + \left(\dfrac{a_2}{w_1'}\right)^2} - \dfrac{a_2}{w_1'}$	$\dfrac{f_1}{f_2} = \sqrt{1 + \dfrac{2\,a_1}{w_1'}}$	$\dfrac{f_1}{f_2} = 1$

Este remarcabil faptul că în cazul unui șoc (injecția scurtă), cele două cazuri extreme redate mai jos se comportă deosebit: adică în cazul *B* cantitatea de combustibil injectat este mult redusă față de cazul *A*. Explicația constă în faptul că în cazul *B*, în injector se produce energie și în formă de unde sonore, care micșorează energia propriu zisă de curgere.

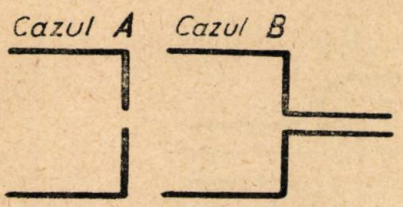


Fig. 8

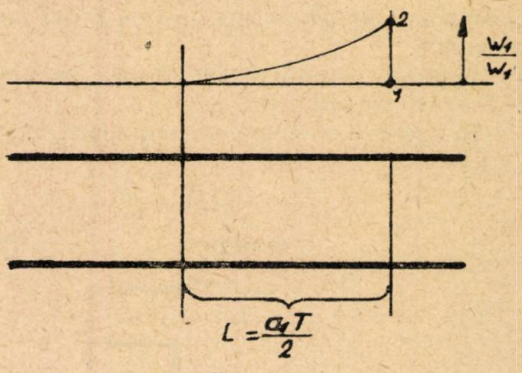


Fig. 9

Pentru verificar a rezultatelor obținute, este necesară o experimentare cu fluid compresibil într'o conductă elastică, fluidul curgând cu vitese mari. Această experiență permite cercetarea judicioasă a valorilor determinante și obținerea unor rezultate decisive.

Alte concluziuni interesante ale rezultatelor generale obținute constau în posibilitatea de a determina vitesa fluidului într'o conductă și în special repartizarea ei lângă orificiul de ieșire.

Privind o conductă dreaptă ca una compusă din două părți distincte, putem calcula vitesa în secțiunea care le desparte. Calculul simplu este concretizat în schema din figura 9.

6. *Observații suplimentare*

O explicație clară din punct de vedere mecanic, însă incompletă pentru fenomenele legate de reflecția undelor, poate fi redată în felul următor:

Pe secțiunea f_2, vitesa undei sosite w_1' este continuată fără nicio schimbare, transformându-se în vitesa w_2.

Pe secțiunea $f_1 - f_2$, vitesa undei rezultante trebue să fie $= 0$, deci: $w_1'' = -w_1'$.

Unda sosită și unda reflectată formează unda rezultantă, pentru care obținem, ținând seama de egalizarea vitezelor pe secțiune:

$$w_1 = w_1' + w_1'' \frac{f_1 - f_2}{f_1} = w_1' \frac{f_2}{f_1}$$

deci:

$$w_1 f_1 = w_2 f_2$$

adică legea normală a continuității.

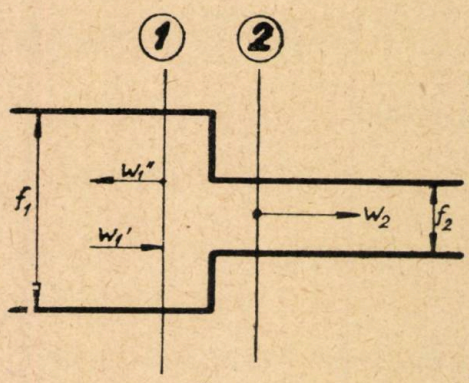


Fig. 10

Formula $w_1 = w_1' \frac{f_2}{f_1}$ formează prima aproximație pentru calculul fenomenelor dinamice în legătură cu propagarea undelor în conducte cu secțiuni variabile.

Aceeași metodă mecanică ne permite să evaluăm fenomenele în cazul rotunzirii racordărilor.

In cazul B, fenomenul propagării undelor este mult ușurat.

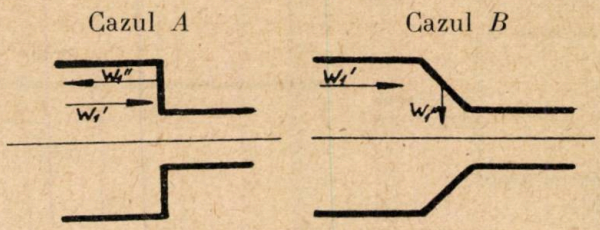


Fig. 11

Aplicarea metodelor generale permite tratarea influenței coturilor și curburilor în conducte asupra propagării undelor de injecție.

Schematic, aceasta poate fi reprezentată astfel:

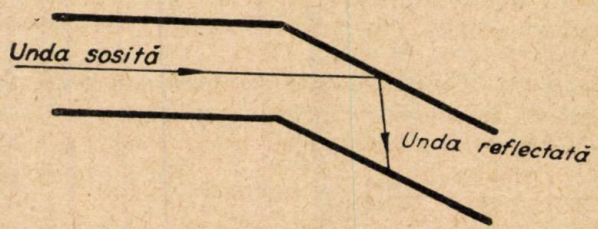


Fig. 12

$$p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2} + \rho a w_1' = p_2 + \frac{\rho w_2^2}{2} + \rho a w_2 + \rho a_1 w''$$

cu condiție:

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(w_1' \sin \alpha)^2$$

$$w_2 = w_1$$

$$w_1 = w_1' + w_1''.$$

Din aceste ecuații reiese ușor:

$$w_1 = w_1' \left(1 - \frac{w_1}{4a} \sin^2 \alpha\right).$$

Influența unei singure reflecții este deci neînsemnată.

	lichid	gaz
$\frac{\omega_1'}{4a}$	0,1 — 0,5%	< 25%

CONCLUZIUNI

Aplicarea metodelor generale permite o tratare corectă a multor probleme legate de injecția motoarelor și evaluarea sau calcularea influențelor elementelor constructive asupra fenomenelor fizice.

Multe concluziuni care reies din aceste studii au o aplicație practică imediată.

ВПРЫСКИВАНИЕ В ДВИГАТЕЛЯХ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

После исследования основных факторов и классификации конструктивных элементов, изучаемый вопрос разбивается на части, которые рассматриваются последовательно.

По аналогии между относительными движениями в механике и явлением распространения ударных волн можно легко вывести основные уравнения.

Ряд результатов получен из энергетических соображений, облегчающих общее понимание феномена распространения удара.

Сравнение статических и динамических явлений ведет к классификации трубопроводов (длинных и коротких) и дает возможность ограничить случаи применения обеих теорий.

Применение общих уравнений к нормальным форсункам позволяет исследовать простые форсунки как частные случаи.

Этот же метод допускает ряд практических выводов в отношении формы форсунок, колен и изгибов в трубопроводах.

L'INJECTION DANS LES MOTEURS À COMBUSTION INTERNE

(RÉSUMÉ)

Après avoir analysé les facteurs déterminants et la classification des éléments constructifs, le problème est divisé en chapitres, qui sont traités successivement.

Par une analogie entre les mouvements relatifs en mécanique et les phénomènes de propagation des ondes de choc, il devient facile de déduire les équations fondamentales.

Une série de résultats sont obtenus en partant de considérations énergétiques — qui facilitent une vue d'ensemble du phénomène de la propagation du choc.

Une comparaison entre les phénomènes statiques et dynamiques mène à une classification des tuyauteries (longues et courtes), et permet aussi de délimiter les cas d'application des deux théories.

L'application des équations générales au cas d'un injecteur normal, permet de traiter les injecteurs simples comme un cas particulier.

La même méthode mène à une série de conclusions pratiques en ce qui concerne la forme des injecteurs, des coudes et des régions courbes des tuyauteries.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

STUDIUL TRAIECTORIILOR ORIZONTALE ALE UNUI AVION

DE

N. TIPEI

Problema mişcării variate a avionului pe o traiectorie curbă este foarte complicată şi de cele mai multe ori cu neputinţă de rezolvat prin metode exacte. Din acest motiv aproape întotdeuna trebue să se recurgă la aproximaţii în cazul general, sau să se simplifice studiul, considerându-se situaţii speciale. De sigur că aceste situaţii pot prezenta mai mult sau mai puţin interes, după cum corespund sau nu evoluţiilor întâlnite frecvent în practica sborului.

Ne propunem, astfel, să rezolvăm problema mişcării variate pentru o serie de cazuri particulare care, deşi formează soluţiuni speciale, pot fi reunite într'o categorie de mişcări ce caracterizează evoluţiile posibile într'un plan orizontal, la o altitudine dată. Deşi aceste soluţiuni nu pot cuprinde tot domeniul — de altfel infinit de variat — al evoluţiilor pe traiectorii curbe orizontale, credem totuşi că ele constitue cazuri mai importante; în plus, metoda folosită este generală, aplicarea ei fiind condiţionată mai ales de posibilitatea integrării ecuaţiei diferenţiale în V (V fiind vitesa avionului), aşa după cum se va vedea în cursul acestei lucrări.

Deci se vor scrie, mai întâi, ecuaţiile de echilibru al forţelor şi momentelor pentru un sbor carecare orizontal, particularizând apoi primele rezultate.

Fie sistemul de axe rectangulare $Gx_1y_1z_1$ cu axe de direcţii constante, reprezentat în figura 1, unde G este centrul de greutate al avionului, Gz_1 verticală, şi rămânând mereu paralel cu un triedru fix carecare. Fie, de asemenea, Gy perpendicular pe planul de simetrie al aparatului şi celelalte axe Gx, Gz conţinute în acest plan şi legate de avion. Se presupune că evoluţia aparatului este corectă, fără derapare laterală; deci Gy rămâne mereu în planul normal pe traiectorie. Dacă φ este unghiul de înclinare al avionului în planul vertical perpendicular pe traiectorie, Δi, diferenţa dintre incidenţa reală şi cea corespunzătoare poziţiei orizontale a axului Gx (unghiului de calaj al aripei), iar ψ, unghiul lui Gy_1 cu normala Gy'_1 la traiectorie, poziţia $Gxyz$ a avionului se poate defini în fiecare moment prin rotaţia ψ în planul orizontal (în jurul lui Gz_1), care conduce la sistemul $Gx'_1y'_1z'_1$, prin unghiul φ de rotaţie în jurul lui Gx'_1, cu noua poziţie $Gx'_1y'z'$ având Gx'_1 orizontală şi tangentă la traiectorie (deci planul $Gx'z'$ este normal la această curbă),

precum și prin rotația Δi în jurul lui Gy' care deplasează Gx' și Gz' în Gx, Gz, Gy fiind confundat cu Gy'.

Se deduc ușor relațiile privitoare la unghiurile dintre axele fixe $Gx_1y_1z_1$ și axele mobile $Gxyz$:

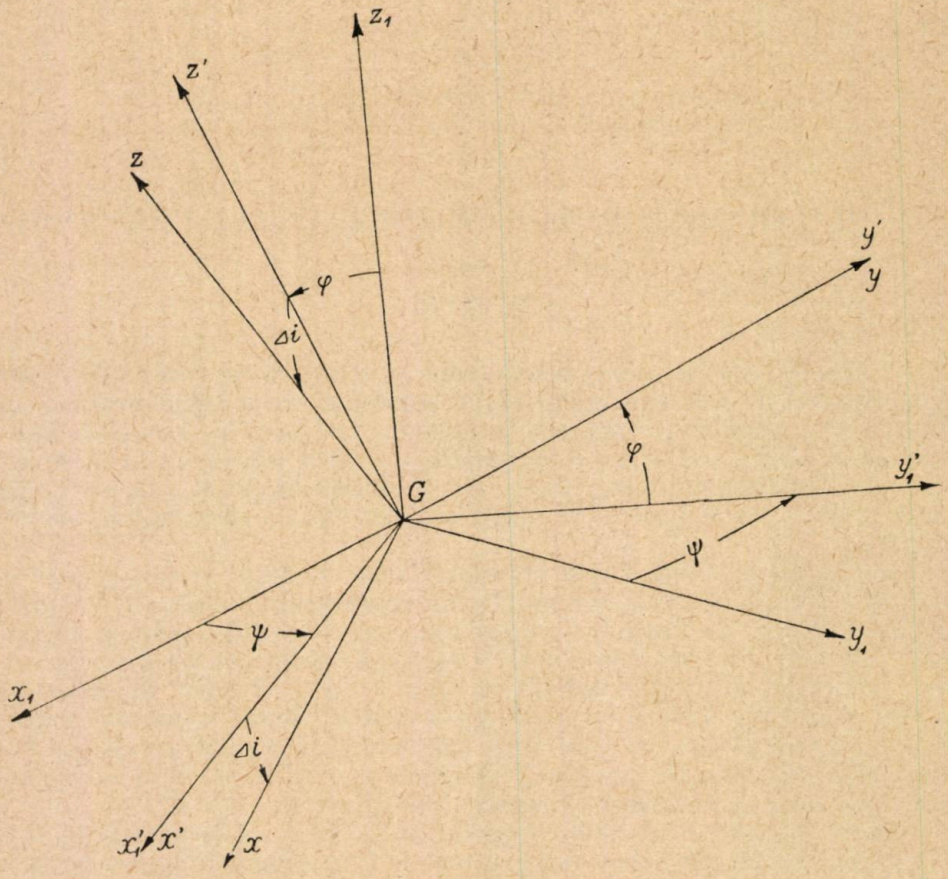


Fig. 1

$$\left.\begin{aligned}
\cos \widehat{Gxx_1} &= \cos \psi \cos \Delta i + \sin \psi \sin \varphi \sin \Delta i \\
\cos \widehat{Gyy_1} &= \cos \psi \cos \varphi \\
\cos \widehat{Gzz_1} &= \cos \varphi \cos \Delta i
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Fie încă:

G = greutatea avionului
V = vitesa tangențială a avionului
P = portanța aripei
p_h = portanța ampenajului orizontal
p_v = portanța ampenajului vertical

Cz, Cz_h, Cz_v = coeficienții unitari de portanță relativi la P, p_h, p_v
Cx = coeficientul de rezistență al aripei
i = unghiul de incidență al aripei
R = raza de curbură a traiectoriei
$l = \frac{S}{L}$ = coarda medie a aripei
R_h = raza elicei
S = suprafața aripei
s_h, s_v = suprafețele ampenajelor orizontal și vertical
I_m = momentul de inerție al elicei și al pieselor mobile în rotație, față de axul elicei
I_x, I_y, I_z = momentele de inerție ale avionului, în raport cu axele $Gxyz$
ω = vitesa totală de rotație a avionului
Ω = vitesa de rotație a elicei
Ω_0 = vitesa nominală de rotație a motorului, la sol
Λ_0 = pasul aerodinamic al elicei
η, μ, ψ^h = coeficienții de randament, de putere și de tracțiune ai elicei
μ_0 = valoarea lui μ corespunzătoare puterii și turației nominale la sol a motorului, Pm_0, Ω_0
T = tracțiunea elicei
Pm_0 = puterea nominală a motorului, la sol
ρ = densitatea aerului la înălțimea evoluției
ρ_0 = densitatea aerului la sol
x_a, x_h, x_v, z_a, z_h, z_v = coordonatele focarelor aripei și ampenajelor orizontal și vertical (aceste focare fiind presupuse în planul Gxz)
Cm_{ax}, Cm_{ay}, Cm_{az} = coeficienții de moment ai aripei, relativ la axele $Gxyz$
L = anvergura aripei
λ = alungirea aripei
$1 + \delta$ = coeficientul de corecție a rezistenței induse a aripei

Se stabilesc mai întâi proiecțiunile vitezelor de translație și de rotație pe axele $Gx'_1\, y'_1\, z_1$:

$$v_{x_1} = -V;\ v_{y'_1} = v_{z_1} = 0 \tag{2}$$

$$\omega_{x'_1} = \dot{\varphi};\ \omega_{y'_1} = \dot{i}\cos\varphi;\ \omega_{z_1} = \dot{\psi} + i\sin\varphi.$$

Ecuațiile forțelor în raport cu aceste axe vor fi, neglijând componentele tracțiunii după Gz_1 și Gy'_1 și presupunând admisiunea motorului constantă (exceptând cazurile pentru care se va face mențiune specială):

$$\frac{G}{g}\cdot\dot{V} = T - \frac{\rho}{2}SV^2Cx, \tag{3}$$

$$\frac{G}{g}\left(\frac{V^2}{R} + V\dot{i}\sin\varphi\right) = P\sin\varphi + p_h\sin\varphi - p_v\cos\varphi = \tag{4}$$

$$= \frac{\rho}{2}V^2S\cdot\left[\left(Cz + \frac{s_h}{S}Cz_h\right)\sin\varphi - \frac{s_v}{S}Cz_v\cos\varphi\right],$$

$$\frac{G}{g} \dot{Vi} \cos\varphi = P\cos\varphi - G + p_h \cos\varphi + p_v \sin\varphi =$$

$$= \frac{\rho}{2} SV^2 \left[\left(Cz + \frac{s_h}{S} Cz_h \right) \cos\varphi + \frac{s_v}{S} Cz_v \sin\varphi \right] - G. \tag{5}$$

Din ecuațiile (4) și (5) se scoate:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{V^2}{gR}\left(P + p_h - \frac{G}{g} \dot{Vi} \right) + p_v}{P + p_h - \frac{V^2}{gR} p_v - \frac{G}{g} \dot{Vi}} \tag{6}$$

și:

$$G = \frac{\left(P + p_h - \frac{G}{g} \dot{Vi} \right)^2 + p_v^2}{\sqrt{\left(P + p_h - \frac{G}{g} \dot{Vi} - \frac{V^2}{gR} p_v \right)^2 + \left[\frac{V^2}{gR} \left(P + p_h - \frac{G}{g} \dot{Vi} \right) + p_v \right]^2}}. \tag{7}$$

Trebue să se mai adauge încă ecuațiilor (3) — (7), relația privind grupul motopropulsor [1]:

$$I_m(\dot{\Omega} + \operatorname{proj}_{Gx_1} \dot{\omega}) = 75 P m_0 \frac{\rho \nu}{\rho_0 \Omega_0} - \frac{\rho}{2} \pi R_h^3 (R_h \Omega)^2 \mu = A - B\mu\Omega^2. \tag{8}$$

Astfel, aceste ecuații se prezintă sub o formă complicată, integrarea lor directă nefiind posibilă. Sunt deci necesare unele simplificări, pe deplin justificate de altfel, mai ales pentru regimurile neacrobatice. Astfel, valoarea accelerației $\dot{Vi}$ după Gz_1 este neglijabilă față de $\frac{V^2}{R}$ și $\dot{V}$, dacă se consideră că variația totală a incidenței — în timpul unei evoluții care poate dura câteva zeci de secunde — este de ordinul $0° - 10°$. Apoi forțele p_h, p_v pe ampenaje sunt neglijabile față de portanța și de greutatea avionului. Se obținea astfel:

$$\operatorname{tg}\varphi \simeq \frac{V^2}{gR} \tag{9}$$

și

$$P = G \sqrt{1 + \frac{V^4}{g^2 R^2}} = \frac{G}{\cos\varphi} = \frac{\rho}{2} SV^2 Cz. \tag{10}$$

In sfârșit, ecuația (8), sub forma sa inițială, complică cu deosebire problema. Pentru a înlătura această dificultate, observăm că derivata $\dot{\omega}$ a rotației totale a avionului este mult mai mică decât accelerația unghiulară $\dot{\Omega}$; și, chiar în cazul contrariu, valoarea redusă a momentului de inerție I_m a pieselor mobile ale grupului motopropulsor permite să se neglijeze produsul $I_m\,\dot{\omega}$. Mai rămâne încă valoarea $I_m\,\dot{\Omega}$; pentru un motor de 1000 CP, se poate evalua I_m la 10 kg massă $\times$ m² și dacă se presupune

o variație de 10% a lui $\Omega = 2000$ t/min., în 10 secunde (cifră exagerată pentru cele mai multe evoluții), se obține puterea absorbită prin accelerarea organelor mobile:

$$p_m = \frac{10}{10} \cdot \frac{\pi \times 200}{30} \cdot \frac{\pi \times 2000}{30} = 4000 \text{ kgm/sec} \sim 54 \text{ CP},$$

sau 5,4% din puterea totală. Deși neglijabilă, vom ține seama de această putere absorbită introducând însă o simplificare: presupunând o variație lineară a lui Ω cu timpul sau, ceea ce înseamnă același lucru, admițând constant cuplul absorbit prin variația rotației elicei în timpul evoluției. Remarcăm, totuși, că această aproximație nu este necesară decât atunci când coeficientul μ al cuplului sufere variații însemnate: în cazul contrariu, ecuația (8) dă direct la regimurile Λ_0 caracterizate printr'o variație mică a lui μ:

$$\Omega = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\mu_1 B}} \cdot \frac{\sqrt{AB\mu_1} + B\mu_1\Omega_1' \, e^{\frac{2\sqrt{AB\mu_1}}{I_m}(t-t_0)} - 1}{\sqrt{AB\mu_1} - B\mu_1\Omega_1' \, e^{\frac{2\sqrt{AB\mu_1}}{I_m}(t-t_0)} + 1}, \tag{11}$$

Ω_1' și μ_1 fiind valorile în momentul t_0 (începutul evoluției). In al doilea caz, $I_m\dot{\Omega} = I_m \dfrac{\Omega - \Omega_1'}{t - t_0} = \text{constant} = C_m$ poate fi adăugat la termenul constant din (8), sub forma unui coeficient pozitiv ε, adică:

$$75\,(1-\varepsilon)\,Pm_0 \frac{\nu}{\rho_0\Omega_0} = \frac{1}{2}\,\pi R_h^3\,(R_h\Omega)^2\mu \tag{12}$$

și, în general (1), la o înălțime constantă:

$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}} \quad \text{unde } \Omega_1 = \Omega_0\sqrt{\nu_1}, \tag{13}$$

μ_0 fiind definit la sol pentru regimul $(1-\varepsilon)\,Pm_0$ al motorului și ν_1, valoarea — la altitudinea evoluției — a funcției care caracterizează funcționarea motorului la înălțime.

Rezultă apoi:

$$\Lambda_0 = \frac{V}{R_h\Omega} = \frac{V\sqrt{\mu}}{R_h\Omega_1\sqrt{\mu_0}} \quad \text{sau} \quad \frac{\Lambda_0}{\sqrt{\mu}} = \frac{V}{R_h\Omega_1\sqrt{\mu_0}}, \tag{14}$$

dacă (13) este valabilă și:

$$\frac{G}{g}\cdot\dot{V} = \frac{\rho}{2}SV^2\left(\frac{\mu\eta}{\Lambda_0^3}\cdot\frac{\pi R_h^2}{S} - Cx\right) = \frac{\rho S}{2}\left(\frac{\psi_h}{\mu}\cdot\frac{\pi R_h^2\,(R_h\Omega_1)^2\mu_0}{S} - CxV^2\right). \tag{15}$$

Se va utiliza mai ales această ecuație, cunoscută adesea sub forma următoare, care leagă puterile puse în joc:

$$\frac{G}{g} V \cdot \dot{V} = 75 (1 - \varepsilon) P m_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} \nu_1 \frac{\Omega}{\Omega_0} \eta - \frac{\rho}{2} S V^3 C x. \tag{16}$$

Pentru elicea cu pas variabil, ε este nul și $\frac{\Omega}{\Omega_0} = \text{const.}$; în cazul contrariu, se vor aplica relațiile (11) sau (13).

Se ajunge la un sistem de ecuații (9), (10), (11) sau (13), (14) și (15) sau (16), ale căror necunoscute sunt incidența (sau Cz), vitesa V, vitesa unghiulară Ω, pasul Λ_0 (prin care se definesc coeficienții elicei), unghiurile φ, ψ, precum și curbura $\frac{1}{R}$ a traiectoriei. Ca și pentru virajul circular în regim permanent, o traiectorie curbă nu poate fi determinată decât impunând o condiție suplimentară, aleasă arbitrar dar respectând regulile obișnuite de pilotaj. Acest lucru se va face în paragrafele următoare, pentru a obține câteva mișcări caracteristice în regim variat, traiectoria rezultantă fiind o curbă oarecare definită prin această condiție.

Ecuațiile de mai sus rezolvă problema mișcării centrului de greutate al avionului. Se va vedea în cursul acestei lucrări procedeul în fiecare caz particular; dar se poate indica de pe acum că valoarea coeficientului ε trebue să fie apreciată dinainte și verificată apoi prin valorile Ω și t obținute. Dacă rezultatele nu sunt concordante, se va proceda la o a doua aproximare. Se remarcă totuși că, în practică, ε este mic sau chiar neglijabil și că se poate admite $\varepsilon = 0$, fără a comite o eroare apreciabilă. In cazul unui calcul mai riguros, se poate începe cu o valoare $\varepsilon = 0{,}05, -0{,}10$, care este apoi corectată. In tot cazul, nu este folositor să se facă mai mult de o aproximație. Dacă elicea are pasul variabil, problema nu se mai pune, vitesa sa de rotație fiind constantă; același lucru este valabil dacă domeniul de variație a lui V și Λ_0 permite aplicarea formulei (11).

Pentru a defini complet evoluția, trebue să se mai calculeze și poziția comenzilor în fiecare moment. Vom presupune că echilibrul în jurul centrului de greutate este continuu realizat și vom neglija eventualele oscilații în jurul acestui punct. Dacă avionul este stabil, aceste oscilații sunt repede amortizate, iar dacă manevra este corect executată, într'o atmosferă calmă, ele nu mai influențează mișcarea sau echilibrul aparatului. Se atinge în acest caz o problemă deosebită, aceea a stabilității, care nu face obiectul acestui studiu.

Se vor scrie deci ecuațiile momentelor față de sistemul de coordonate $Gxyz$, solidar cu avionul. Spre a simplifica aceste ecuații, am presupus vectorul Ω pozitiv (elicea se rotește în sensul pozitiv) și dirijat după Gx. De obiceiu, axul motorului face cu Gx un unghiu care este întotdeauna neglijabil; de aceea nu s'a ținut seama de el.

Se observă cu ușurință că rotația ω are componentele de mai jos, după axele $Gxyz$:

$$\omega_x = \dot{\varphi} \cos \Delta i - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \Delta i, \tag{17}$$

$$\omega_y = \dot{i} + \dot{\psi} \sin \varphi, \tag{18}$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} \sin \Delta i + \dot{\psi} \cos \varphi \cos \Delta i \tag{19}$$

și

$$\dot{\omega}_x = \ddot{\psi}\cos\Delta i - \sin\Delta i\,(\ddot{\psi}\cos\varphi + \dot{\varphi}\dot{i}) + \dot{\psi}\,(\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\Delta i - \dot{i}\cos\Delta i\cos\varphi) \tag{20}$$

$$\dot{\omega}_y = \ddot{i} + \ddot{\psi}\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\varphi, \tag{21}$$

$$\dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}\sin\Delta i + \cos\Delta i\,(\dot{\varphi}\dot{i} + \ddot{\psi}\cos\varphi) - \dot{\psi}\,(\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\Delta i + \dot{i}\sin\Delta i\cos\varphi) \tag{22}$$

Se mai observă apoi că Gy este un ax principal de inerție, ca fiind perpendicular pe planul Gxz, care este planul de simetrie a avionului (cu foarte rare excepții, orice avion admite un plan longitudinal de simetrie). Se pot alege deci și celelalte două axe Gx și Gz, astfel încât să fie axe principale de inerție. In acest caz, Gx corespunde axului longitudinal al avionului, sau este foarte apropiat de acesta, și Gz rezultă; momentele centrifugale față de sistemul $Gxyz$ sunt nule și ecuațiile mișcării în jurul lui G sunt mult simplificate.

Rezultă:

$$M_x = I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\,\omega_y\omega_z + I_m\dot{\Omega} = M_{ax} - \frac{\rho}{2}\pi R_h^5\,\Omega^2\,\mu - z_v p_v = \tag{23}$$

$$= \frac{\rho}{2}SV^2 l\left(Cm_{ax} - \frac{\pi R_h^2}{S}\cdot\frac{R_h}{l}\cdot\frac{\mu}{\Lambda_0^2} - \frac{z_v}{l}Cz_v\frac{s_v}{S}\right)$$

$$M_y = I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\,\omega_x\omega_z + I_m\,\Omega\omega_z = M_{ay} - (x_h\cos\Delta i + \tag{24}$$

$$+ z_h\sin\Delta i)\,p_h = \frac{\rho}{2}SV^2 l\left(Cm_{ay} - \frac{x_h\cos\Delta i + z_h\sin\Delta i}{l}\cdot\frac{sh}{S}Cz_h\right)$$

$$M_z = I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\,\omega_x\omega_y - I_m\,\Omega\omega_y = M_{az} + x_v p_v = \tag{25}$$

$$= \frac{\rho}{2}SV^2 l\left(Cm_{az} + \frac{x_v}{l}\cdot\frac{s_v}{S}\cdot Cz_v\right),$$

unde — presupunând că raza R a traiectoriei este suficient de mare pentru a putea neglija efectul rotației aripei asupra coeficienților de moment — avem [2]:

$$Cm_{ax} = -\frac{\pi}{4}\lambda^2 A_2;\quad Cm_{ay} = -Qm_0 - \left(\frac{x_a}{l}\cos\Delta i + \frac{z_a}{l}\sin\Delta i\right)Cz$$

$$Cm_{az} = -\frac{3}{4}\varkappa\lambda\,A_2\,Cz.$$

Acești coeficienți sunt funcții de Cz și de variația incidenței în lungul anvergurei, care depinde de vitesa de rotație ω_x și de bracajul τ_a al aripioarelor. Dacă virajul este foarte strâns, se va considera și influența rotațiilor ω_y, ω_z asupra coeficienților Cm_{ay} și Cm_{az}; problema rămâne aceeași, iar expresiile corespunzătoare sunt ușor de găsit [2]. Rezultatul poate fi mai complicat dar, cunoscând vitesele de rotație, vitesa avionului, raza de curbură, și portanța (Cz), sistemul (23)—(25) nu va cuprinde ca necunoscute decât

pe A_2 adică bracajul τ_a și Cz_h, Cz_v sau τ_h, τ_v (bracajele ampenajelor), dacă se exprimă coeficienții în funcție de aceste bracaje și de vitesele de rotație, care schimbă unghiurile de incidență. Se remarcă, în legătură cu aceasta, că influența lui ω_y asupra lui Cz este neînsemnată, în timp ce portanța ampenajelor este mult modificată de această rotație și de ω_z. Aceste rezultate fiind bine cunoscute, nu se va insista asupra formulelor care permit să se determine bracajele comenzilor; de asemenea, va fi ușor să se țină seama de rotația ω_x pentru a calcula poziția aripioarelor [2], A_2 fiind dat de ecuațiile de mai sus.

Din cele arătate, rezultă un procedeu care permite rezolvarea problemei propuse. Intr'adevăr, proiecțiunile forțelor și celelalte ecuații (11), (13), (14) permit, în funcție de un parametru arbitrar și convenabil ales, să se definească în fiecare moment V, ψ, φ, Cz, Δi, R, Ω, Λ_0, μ, precum și derivatele lor totale în raport cu timpul și vitesele ω_x, ω_y, ω_z, cu accelerațiile unghiulare. Din sistemul (23)—(25), se deduce A_2, Cz_h și Cz_v, care definesc poziții comenzilor; deci, mișcarea avionului este complet cunoscută.

Inainte de a analiza diferitele cazuri particulare, se vor calcula câteva expresii necesare pentru ceea ce urmează. Se va admite mereu că incidențele nu depășesc limita variației lineare a portanței Cz cu i și că ecuația analitică a polarei este valabilă, înafară de cazul când se va face o mențiune contrară; astfel:

$$\dot{\psi} = \frac{V}{R} \quad ; \quad \ddot{\psi} = \frac{1}{R}\left(\dot{V} - \frac{V}{R}\dot{R}\right). \tag{26}$$

Din relația (10) rezultă:

$$R = \frac{1}{g}\cdot\frac{V^2}{\sqrt{\left(\frac{P}{G}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{g}\cdot\frac{V^2}{\sqrt{\left(\frac{\rho S}{2G}\right)^2 V^4 Cz^2 - 1}} = \frac{V^2}{g.\mathrm{tg}\varphi} \tag{27}$$

și

$$\dot{\varphi} = \cos^2\varphi\left(\frac{\dot{V^2}}{gR}\right) = \frac{V\cos^2\varphi}{gR^2}(2R\dot{V} - V\dot{R}), \tag{28}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{gR}\left\{\left[\dot{V} - 2V\left(\mathrm{tg}\varphi\cdot\dot{\varphi} + \frac{1}{R}\dot{R}\right)\right]\cdot\left(2\dot{V} - \frac{V}{R}\dot{R}\right) + \right.$$

$$\left. + V(2R\ddot{V} + \dot{R}\cdot\dot{V} - V.\ddot{R})\right\}. \tag{29}$$

Admițând apoi cazul uzual al variației lineare a lui Cz cu incidența, avem:

$$Cz = A\cdot i \quad ; \quad i = \frac{1}{A}\dot{Cz}, \tag{30}$$

$$\ddot{i} = \frac{1}{A}\cdot\ddot{Cz}; \tag{31}$$

dar, de cele mai multe ori se poate considera $\dot{i} = 0$ și aproape întotdeauna $\ddot{i} = 0$, variațiile incidenței fiind mult mai mici decât $\dot{\varphi}$ și $\dot{\psi}$. In orice caz, derivatele lui Cz de ordinul I și II fiind cunoscute, calculul valorilor exacte

ale vitezelor de rotație și ale accelerațiilor unghiulare nu mai prezintă nicio dificultate.

Derivatele celorlalte variabile în raport cu timpul, având formule destul de complicate, vor fi calculate special, pentru fiecare caz în parte, așa după cum se va arăta.

Valoarea $\frac{\psi_h}{\mu}$ constitue o necunoscută dintre cele mai importante de determinat, din cauza rolului pe care acest raport îl are în ecuația fundamentală (15).

Trebue găsită deci o formulă analitică pentru $\frac{\psi_h}{\mu} = f(V)$. Se observă, în acest scop că, după ecuația (14), V este proporțional cu termenul $\frac{\Lambda_0}{\sqrt{\mu}}$, deci revine la același lucru dacă se studiază funcția $\frac{\psi_h}{\mu} = f\left(\frac{\Lambda_0}{\sqrt{\mu}}\right)$ pe curbele experimentale sau calculate ale unei elice oarecare. După B a i r s t o w [3] avem:

$$\psi_h = \psi'_h - k_1 \Lambda_0^2 \quad \text{și} \quad \mu = \mu' - k_2 \Lambda_0^3, \tag{32}$$

ψ'_h, μ' fiind valorile lui ψ_h și μ la punct fix. Se obține :

$$\frac{\psi_h}{\mu} = \frac{\psi'_h}{\mu'} - \frac{k_1}{\mu'} \Lambda_0^2 + \frac{\psi'_h}{\mu'^2} k_2 \Lambda_0^3 - \frac{k_1 k_2}{\mu'^2} \Lambda_0^5 + \frac{\psi'_h k_2^2}{\mu'^3} \Lambda_0^6 - \dots \tag{33}$$

și:

$$\frac{\psi_h}{\mu} = \frac{\psi'_h}{\mu'} - \frac{k_1}{\mu'} \frac{\Lambda_0^2}{\mu} (\mu' - k_2 \Lambda_0^3) + \frac{\psi'_h}{\mu'^2} k_2 \left(\frac{\Lambda_0^2}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (\mu' - k_2 \Lambda_0^3)^{\frac{3}{2}} -$$

$$- \frac{k_1 k_2}{\mu'^2} \left(\frac{\Lambda_0^2}{\mu}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot (\mu' - k_2 \Lambda_0^3)^{\frac{5}{2}} + \dots \tag{34}$$

Dacă se neglijează termenii cuprinzând puterile lui Λ_0 mai mari decât 2 în seria cu termeni alternați (34), se poate admite expresia următoare, μ^* fiind valoarea lui μ pentru $\psi_h = 0$.

$$\frac{\psi_h}{\mu} = \frac{\psi'_h}{\mu'} - \frac{k_1 \mu^*}{R_h^2 \Omega_1^2 \mu_0 \mu'} V^2 = E - F V^2, \tag{35}$$

E, F sunt două constante definite ca mai sus, sau trasând $\frac{\psi_h}{\mu} = f\left(\frac{\Lambda_0}{\sqrt{\mu}}\right)$ cu ajutorul curbelor experimentale și alegând convenabil două puncte, spre a determina acești coeficienți. Mai este de observat că (35) subsistă pentru elicea cu pas variabil, cu valoarea particulară $F = 0$, ψ_h și μ fiind aproape constante.

Curbele experimentale concordă suficient cu aceste rezultate, dar prezintă uneori neregularități în variația lui ψ_h, μ și a raportului lor, mai ales la regimurile mai mici decât cel de randament maxim. Se poate admite în acest caz [4]:

$$\frac{\psi_h}{\mu} = E' - F' V, \tag{36}$$

cu coeficienții E', F' ușor determinați, trasând, după cum s'a indicat, curba $\frac{\psi_h}{\mu} = f\left(\frac{\Lambda_0}{\sqrt{\mu}}\right)$. Se mai remarcă, de asemenea, că există un regim critic care separă două domenii în raport cu Λ_0, precum și că E', F' diferă dela un domeniu la altul. La regimul critic Λ_{oc}, corespunde o vitesă critică V_c ușor de găsit, ca și E', F', odată cunoscute caracteristicele elicei. Dacă Λ_{oc}, este cuprins în domeniul lui Λ_0 parcurs în timpul evoluției avionului, va trebui să se despartă în două integrala care dă vitesa V și care va fi calculată mai departe în diferite cazuri, pentru a schimba valoarea coeficienților. Ținând seamă că această operație este elementară și nu modifică în niciun fel raționamentele și calculele care urmează, ea nu va mai fi menționată în mod special.

Deci se poate folosi formula (35) sau (36), după elicea considerată; dacă se acceptă o aproximație de 10% asupra lui $\frac{\psi_h}{\mu}$, se va admite mereu expresia (35) care simplifică calculele. In cazul contrariu, (36) este uneori de preferat; de aceea s'au desvoltat calculele următoare în amândouă ipotezele.

*

După ce s'au pus astfel condițiile generale ale problemei, vom studia câteva cazuri particulare, introducând o condiție suplimentară care definește evoluția. După cum s'a mai precizat, această condiție este necesară nu numai pentru a simplifica, dar mai ales pentru a determina problema care, cu ecuațiile scrise, depinde încă de un parametru arbitrar și admite deci, teoretic și practic, o infinitate de soluțiuni.

Evident, se vor face câteva ipoteze inspirate din practica curentă a sborului și care vor avea în plus avantajul de a face mai ușoară soluționarea. Trebue să se mai observe de asemenea că admisia gazelor la motor se poate varia după o lege arbitrară. Prin analogie cu ipotezele admise curent în calculul performanțelor, se va presupune această admisie constantă în timpul întregei evoluții. In cazul contrariu, mișcarea va depinde de doi parametri și va fi definită impunând două condiții suplimentare, una din ele putând fi tocmai această lege de admisie a gazelor.

Traiectorii orizontale cu incidență constantă. Este interesant de studiat traiectoriile obținute fără modificarea incidenței avionului, adică atunci când pilotul nu mișcă manșa decât lateral, sau, în orice caz, foarte puțin înainte sau înapoi spre a compensa efectul rotațiilor asupra incidenței efective a aripei și a ampenajului. Se observă mai întâi că evoluția nu este posibilă dacă avionul trece direct din mișcarea rectilinie și uniformă în mișcarea curbă variată. Intr'adevăr, ecuațiile (4), (16) arată că accelerația tangențială poate fi cel mult nulă sau negativă; deci din (27) rezultă o rază R a traiectoriei, infinită sau imaginară. Condiția absolut necesară, plecând dela o traiectorie orizontală rectilinie, este $\dot{V} > 0$, deci pilotul va trebui să mărească admisiunea în timp ce va deplasa manșa din poziția sa mijlocie. Dimpotrivă, sborul la incidență constantă este întotdeauna realizabil, plecând dela o mișcare rectilinie orizontală accelerată, dela o mișcare pe o traiectorie curbă orizontală, sau trecând dintr'o traiectorie ascendentă în mișcarea orizontală curbă.

Se poate enunța, în general, că evoluția este posibilă ori de câte ori există în momentul inițial un excedent de putere față de sborul orizontal, rectiliniu și uniform, la aceeași altitudine și incidență. Astfel, avionul va descrie o curbă de rază variabilă, având drept limită cercul de rază R_1, corespunzător, după (27), momentului în care $\dot{V}$ se anulează.

Presupunând realizate condițiile de mai sus, să examinăm caracteristicele acestei evoluții. Din (15) și (35) rezultă:

$$\dot{V} = \frac{g\rho S}{2G}\left[\frac{\pi R_h^2 (R_h \Omega_1)^2 \mu_0}{S} E - \left(\frac{\pi R_h^2 (R_h \Omega_1)^2 \mu_0}{S} F + Cx\right) V^2\right], \tag{37}$$

sau:

$$\dot{V} = a - bV^2 \text{ și } V = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{ce^{2\sqrt{ab}\,(t-t_0)} - 1}{ce^{2\sqrt{ab}\,(t-t_0)} + 1}\,;\; c = \frac{\sqrt{ab} + bV_0}{\sqrt{ab} - bV_0}, \tag{38}$$

t_0 fiind momentul inițial al evoluției și V_0 vitesa corespunzătoare. Să admitem de asemenea relația (36). Vom găsi:

$$\dot{V} = \frac{g\rho}{2G}\left[\pi R_h^2 (R\Omega_1)^2 \mu_0 E' + \pi R_h^2 (R_h \Omega_1)^2 \mu_0 F' V - CxSV^2\right] = \tag{39}$$
$$= a' + 2b'V - c'V^2$$

și:

$$V = \frac{b'}{c'} - \frac{\sqrt{b'^2 + a'c'}}{c'} \operatorname{th}\left[-\sqrt{b'^2 + a'c'}\,(t - t_0) + \operatorname{arg\,th}\frac{b' - c'V_0}{\sqrt{b'^2 + a'c'}}\right]. \tag{40}$$

Regimul elicei este definit de (14), (40) și (11), raza de curbură prin (27) și φ din (10). Urmează:

$$\dot{R} = -\frac{2}{g} \cdot \frac{V\dot{V}}{\operatorname{tg}^3\varphi} \tag{41}$$

și din (28) și (29):

$$\dot{\varphi} = \frac{2\dot{V}}{V\sqrt{\left(\frac{\rho S C_z}{2G}\right)^2 V^4 - 1}}\,;\; \ddot{\varphi} = \frac{2}{V^2 \operatorname{tg}\varphi}\left[V.\ddot{V} - (\dot{V})^2\left(1 + \frac{2}{\sin^2\varphi}\right)\right]. \tag{42}$$

Apoi, (26) dă $\ddot{\psi}$, determinând complet problema, cu ajutorul ecuațiilor (17)—(25) care definesc la fiecare moment necunoscutele Cz_h, Cz_v și A_2, adică pozițiile comenzilor.

Pentru a trasa traiectoria, mai trebue calculat unghiul ψ:

$$\psi = \int_{t_0}^{t} \frac{V}{R}\,dt = g\int_{t_0}^{t} \frac{\sqrt{\left(\frac{\rho S C_z}{2G}\right)^2 V^4 - 1}}{V}\,dt = g\int_{V_0}^{V} \frac{\sqrt{\left(\frac{\rho S C_z}{2G}\right)^2 V^4 - 1}}{V(a - bV^2)}\,.\,dV, \tag{43}$$

dacă relația (35) este valabilă. Fie:

$$\frac{\rho SCz}{2G} V^2 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right); \quad \frac{\rho SCz}{G} VdV = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)du, \tag{44}$$

$$A = -\frac{\rho SCz}{bG}; \quad B = -\frac{4}{a}; \quad C = \frac{a\rho SCz}{bG} - \frac{4bG}{\rho SCz}, \tag{45}$$

Se deduce:

$$\psi = \frac{g}{2}\int_{u_0}^{u}\left[\frac{A}{u} + \frac{B}{1+u^2} + \frac{C}{au - N(1+u^2)}\right]du \tag{46}$$

și

$$\psi = \psi_0 + \frac{g}{2}\left[AL_n u + B \operatorname{arc\,tg} u - \frac{C}{\sqrt{\frac{bG}{\rho SCz} - \frac{a^2}{4}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{bG}{\rho SCz}u - \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{bG}{\rho SCz} - \frac{a^2}{4}}}\right] - \frac{g}{2} I_0,$$

dacă radicalul este pozitiv; în cazul contrariu expresia arc tg este înlocuită prin — arg th în ultimul termen al parantezei, I_0 fiind valoarea acesteia pentru $u = u_0$, corespunzător lui V_0.

Punând apoi $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\psi$ și eliminând variabila t sau V între (46) și (27), se obține ecuația diferențială a traiectoriei, raza R fiind $R = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}\cos^3\psi}$.

Integrarea acestei ecuații este în general foarte grea și i se poate prefera următoarea metodă aproximativă:

Fie A_0 (fig. 2), poziția avionului la momentul t_0. In acest moment, se cunoaște raza R_0 și unghiul ψ_0 cu Ox. In momentul următor, $t_0 + \Delta_1 t$ vom avea o rază R_1 și unghiul $\psi_1 = \psi_0 + \Delta_1\psi$, unde:

$$\Delta_1\psi = (\dot{\psi})_0 \Delta_1 t = \left(\frac{V}{R}\right)_0 \Delta_1 t. \tag{47}$$

Din punctul C_0 centrul de curbură la momentul t_0 se descrie un arc de cerc $\Delta_1\psi$ de raza $\frac{R_0 + R_1}{2}$, obținând un nou punct A_1. Plecând dela acest punct, se procedează în același mod, mai departe, descriind din C_1 noul centru de curbură corespunzând razei $\frac{R_1 + R_2}{2}$ arcul $\Delta_2\psi$, etc. Pentru a verifica precizia procedeului, se confruntă pentru un punct A_n, destul de îndepărtat de A_0, unghiul $\psi_n = \psi_0 + \Sigma\Delta\psi$ rezultat grafic, cu unghiul dedus cu ajutorul formulei (46).

In cazul când se aplică ecuația (36), integrarea lui ψ este foarte anevoioasă, astfel încât este preferabil ca această operație să fie efectuată grafic; se

poate renunța chiar la confruntarea traseului indicat mai sus cu valorile exacte ale lui ψ, dacă se aleg intervalele $\Delta_n t = t_n - t_{n-1}$, care, introduse în (47), determină variațiile de unghiu $\Delta_n \psi = \psi_n - \psi_{n-1}$ (destul de mici), astfel încât acestea să fie cuprinse între 5°—10°.

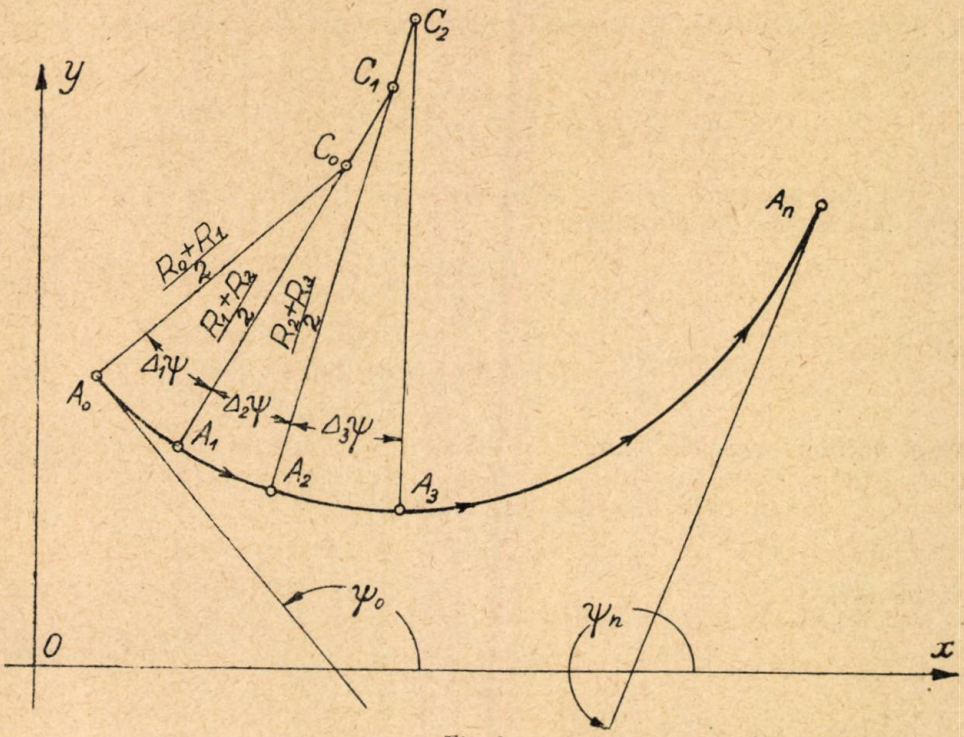


Fig. 2

Mișcarea accelerată pe o traiectorie circulară. Din relația (27) se scoate

$$Cz^2 = \frac{4G^2}{\rho^2 S^2}\left(\frac{1}{R^2 g^2} + \frac{1}{V^4}\right) \tag{48}$$

iar din (15), admițând ecuația (35), avem,

$$\dot{V} = a - \left\{\frac{g\rho}{2G}[\pi R_h^2 (R_h \Omega_1)^2 \mu_0 F + SCx_0] + \frac{2G(1+\delta)}{\rho g R^2 S\pi\lambda}\right\} V^2 -$$

$$-(1+\delta)\frac{2gG}{\rho S\,\pi\lambda}\cdot\frac{1}{V^2} = a - b'V^2 - \frac{c}{V^2}, \tag{49}$$

a având aceeași semnificație ca și înainte (38).

Fie V_1^2, V_2^2 rădăcinile obținute, anulând al doilea membru din (49). Se știe că, în regim permanent ($\dot{V} = 0$), este o singură vitesă posibilă, cores-

punzând fiecărei raze R; rezultă că rădăcinile V_1^2 și V_2^2 sunt reale și pozitive. Se deduce integrând:

$$t = t_0 + \frac{1}{2b'(V_2^2 - V_1^2)}\left(V_1 L_n \frac{V - V_1}{V + V_1} - V_2 L_n \frac{V - V_2}{V + V_2}\right) - I_1, \tag{50}$$

I_1 fiind valoarea celui de al doilea termen pentru $V = V_0$. Se obține astfel, ecuația în V:

$$\left(\frac{V - V_1}{V + V_1}\right)^{V_1} \cdot \left(\frac{V - V_2}{V + V_2}\right)^{V_2} = e^{2b'(V_2^2 - V_1^2) \cdot (I_1 + t - t_0)} \tag{51}$$

Din (48) se scoate apoi Cz, incidența i, din (9) înclinarea φ și Λ_0 din (14). Mai rezultă din (28), (29):

$$\dot{\varphi} = \frac{2V\cos^2\varphi}{gR} \cdot \dot{V}, \tag{52}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2V\cos^2\varphi}{gR} \cdot [(\dot{V} + 2V\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi)\,\dot{V} + V \cdot \ddot{V}], \tag{53}$$

unde imediat avem din (49):

$$\ddot{V} = 2\left(\frac{c}{V^3} - b'V\right) \tag{54}$$

și din (26):

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{R}\dot{V}. \tag{55}$$

In sfârșit, din (48) se obține:

$$\dot{Cz} = -\frac{4G\cos\varphi}{SV^3} \cdot \dot{V}; \quad \ddot{Cz} = \frac{4G}{\rho SV^5}\left[\frac{5 - 2\cos^2\varphi}{V} \cdot (\dot{V})^2 - \ddot{V}\right]. \tag{56}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (52)—(56) și ținând seama de observațiile generale făcute mai înainte, se determină în fiecare moment ecuațiile (23)—(25), problema fiind complet rezolvată prin calculul poziției comenzilor. Rezultă apoi ψ din (26):

$$\frac{d\psi}{dV} = \frac{1}{R} \cdot \frac{V}{\dot{V}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{V}{a - b'V^2 - \frac{c}{V^2}};$$

și

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{2Rb'(V_1^2 - V_2^2)} L_n \left(\frac{V^2 - V_2^2}{V_0^2 - V_2^2}\right)^{\frac{V_2^2}{2}} \left(\frac{V_1^2 - V_0^2}{V_1^2 - V^2}\right)^{\frac{V_1^2}{2}}. \tag{57}$$

Traiectoria fiind un cerc de rază R cunoscută, se poate determina cu ușurință în acest caz poziția avionului după valoarea unghiului ψ.

Să admitem ecuația (36) în loc de (35). Ca și mai înainte, vom avea:

$$\dot{V} = \frac{g\rho}{2G}\left[\pi R_h^2 (R_h\Omega_1)^2 \mu_0 (E' + F'V) - \left(Cx_0 S + \frac{4G^2(1+\delta)}{\rho^2 g^2 S\pi R^2\lambda}\right)V^2\right] - \\ -(1+\delta)\frac{\delta 2gG}{\rho S\pi\lambda}\cdot\frac{1}{V^2} = a_1 + dV - \frac{c}{V^2} - b_1 V^2, \tag{58}$$

constantele a_1, b_1, c, d fiind toate pozitive și diferite de 0. Se obține ecuația:

$$dt = -\frac{V^2 dV}{b_1 V^4 - dV^3 - a_1 V^2 + c}. \tag{59}$$

Printr'o discuție simplă, se ajunge la rezultatul că numitorul admite patru rădăcini reale pozitive, sau două pozitive și două negative. Fie V_1, V_2, V_3 și V_4 aceste rădăcini și A, B, C, D patru constante satisfăcând sistemul:

$$\left.\begin{aligned} &A + B + C + D = 0 \\ &(V_2 + V_3 + V_4)A + (V_1 + V_3 + V_4)B + (V_1 + V_2 + V_4)C + \\ &\quad + (V_1 + V_2 + V_3)D = \frac{1}{b_1} \\ &(V_3V_4 + V_2V_4 + V_2V_3)A + (V_1V_4 + V_1V_3 + V_3V_4)B + \\ &\quad + (V_1V_2 + V_1V_4 + V_2V_4)C + (V_1V_2 + V_1V_3 + V_2V_3)D = 0 \\ &V_2V_3V_4 A + V_1V_3V_4 B + V_1V_2V_4 C + V_1V_2V_3 D = 0. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Vom avea, integrând:

$$t = t_0 + L_n\left[\left(\frac{V - V_1}{V_0 - V_1}\right)^A \cdot \left(\frac{V - V_2}{V_0 - V_2}\right)^B \cdot \left(\frac{V - V_3}{V_0 - V_3}\right)^C \cdot \left(\frac{V - V_4}{V_0 - V_4}\right)^D\right], \tag{61}$$

V_0 fiind vitesa în momentul t_0, și:

$$\frac{d\psi}{dV} = -\frac{1}{R}\cdot\frac{V^3}{b_1 V^4 - dV^3 - a_1 V^2 + c}. \tag{62}$$

Dacă A', B', C', D' sunt constantele obținute egalând prima ecuație a sistemului (60) cu $-\frac{1}{b_1 R}$ și celelalte trei ecuații cu zero, unghiul ψ este dat de o expresie de același tip cu (61):

$$\psi = \psi_0 + L_n\left[\left(\frac{V - V_1}{V_0 - V_1}\right)^{A'} \cdot \left(\frac{V - V_2}{V_0 - V_2}\right)^{B'} \cdot \left(\frac{V - V_3}{V_0 - V_3}\right)^{C'} \cdot \left(\frac{V - V_4}{V_0 - V_4}\right)^{D'}\right]; \tag{63}$$

și în acest caz problema este de asemenea rezolvată. Remarcăm apoi că, dacă elicea este cu pas variabil, ecuațiile rezultate sunt analoage cu acelea obținute din (35), făcând $F = 0$ pentru a calcula constanta b' (49).

Traiectorii curbe cu înclinare constantă (φ = const.). Evoluția nu poate fi amorsată direct, plecând dela o traiectorie rectilinie, decât dacă avionul a fost dinainte angajat în regim acrobatic cu derapaj lateral în momentul

inițial. Ținând seama că acest derapaj nu poate fi anulat decât treptat și că cealaltă ipoteză admisibilă, $\varphi = 0$, în curbă este de asemenea contrarie condițiilor enunțate la începutul acestui studiu, observăm că traiectoria curbă cu φ const. va fi amorsată după ce s'a angajat avionul în viraj, pentru a obține înclinarea inițială φ_0 necesară.

Remarcăm mai întâi că, în acest caz $\frac{V^2}{R} = g \operatorname{tg} \varphi_0$, adică și accelerația centripetă a avionului, va fi de asemenea constantă și, totodată, forța centrifugă și portanța (27). Deci:

$$V^2 Cz = \text{const.} = K \; ; \; Cz = \frac{K}{V^2}, \tag{64}$$

iar ecuațiile diferențiale care dau vitesa V vor fi tot (49) și (58), cu singura deosebire că trebue succesiv înlocuite constantele b', c și b_1 prin:

$$b'' = \frac{g\rho}{2G}\left[\pi R_h^2 (R_h \Omega_1)^2 \mu_0 F + C x_0 S\right],$$

$$c_1 = \frac{\rho g S K^2 (1+\delta)}{2G\pi\lambda}, \tag{65}$$

$$b_2 = \frac{g\rho S C x_0}{2G}.$$

Ținând seama de această observație, formulele (50), (51) și (61) sunt aplicabile în întregime. Mai avem încă:

$$R = \frac{V^2}{g \operatorname{tg} \psi_0} \; ; \quad \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0 ; \quad \dot{\psi} = \frac{g \operatorname{tg} \psi_0}{V} \; ; \quad \ddot{\psi} = -\frac{1}{R} \dot{V} \tag{66}$$

și din (64) se scoate imediat:

$$\dot{C}_z = -\frac{2K}{V^3} \dot{V} \; ; \; \ddot{C}_z = \frac{2K}{V^3}\left[\frac{3}{V}(\dot{V})^2 - \ddot{V}\right], \tag{67}$$

relații cu ajutorul cărora se pot forma ecuațiile (17)—(25); de asemenea, se pot deduce în fiecare moment rotațiile, accelerațiile unghiulare precum, și A_2, Cz_h, Cz_v, adică pozițiile comenzilor.

Deoarece $\Delta = a^2 - 4bc_1$ este mereu pozitiv — căci la fiecare φ_0 există o vitesă pentru care $\dot{V} = 0$, corespunzând virajului circular — se deduce pentru studiul traiectoriei:

$$\frac{d\psi}{dV^2} = \frac{g \operatorname{tg} \varphi_0}{2} \cdot \frac{1}{aV^2 - bV^4 - c_1} \; ; \quad \psi = \psi_0 + \frac{g \operatorname{tg} \varphi_0}{4\sqrt{\Delta}} \times$$

$$\times L_n \left(\frac{\sqrt{\Delta} - \frac{a}{2} + bV^2}{\sqrt{\Delta} + \frac{a}{2} - bV^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta} + \frac{a}{2} - bV_0^2}{\sqrt{\Delta} - \frac{a}{2} + bV_0^2} \right). \tag{68}$$

Admițând expresia (36) pentru variabila $\frac{\psi_h}{\mu}$, dacă A'', B'', C'', D'' sunt constantele definite de sistemele (65) și (60), unde se anulează membrul al doilea — exceptând a treia ecuație care este egală cu $-\frac{g \operatorname{tg} \psi_0}{b_2}$ se ajunge la o expresie analoagă cu (63); bineînțeles, A', B', C', D' sunt înlocuite în această expresie prin A'', B'', C'', D'' și V_1, V_2, V_3, V_4 sunt rădăcinile ecuației:

$$b_2 V^4 - dV^3 - a_1 V^2 + c_1 = 0, \tag{69}$$

după care se trasează traiectoria prin metoda care a fost expusă.

Traiectorii curbe cu accelerația tangențială constantă. Dacă a este definit ca mai înainte (38), iar b_3 este

$$b_3 = \frac{g\rho}{2G} \pi R_h^2 (R_h \Omega_1)^2 \mu_0 F, \tag{70}$$

ecuația (15) dă incidența, admițând ca valabilă mai întâi (35) și punând $\dot{V} = \gamma = \text{const.}$:

$$Cx = \frac{a - \gamma}{V^2} - b_3, \tag{71}$$

vitesa fiind cunoscută la fiecare valoare a timpului t:

$$V = V_0 + \gamma\,(t - t_0). \tag{72}$$

Se determină apoi coeficienții elicei, plecând dela relațiile fundamentale (11) sau (14), raza R și unghiul φ, din (27) și (9). Se obțin apoi derivatele:

$$\dot{C}_x = 2\gamma \frac{\gamma - a}{V^3}; \quad \ddot{C}_x = -6\gamma^2 \cdot \frac{\gamma - a}{V^4}; \quad \dot{C}z = \frac{\pi\lambda\gamma}{(1+\delta)\,Cz} \cdot \frac{\gamma - a}{V^3};$$

$$\ddot{C}z = \frac{\pi\lambda}{2(1+\delta)} \cdot \frac{\ddot{C}x\,Cz - \dot{C}x\,\dot{C}z}{Cz^2}, \tag{73}$$

$$\dot{R} = \frac{2V}{g \operatorname{tg} \varphi} \left[\gamma - \frac{\rho^2 S^2 Cz}{4G^2} \cdot \frac{V^4 (V\dot{C}z + 2\gamma\,Cz)}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right]. \tag{74}$$

Din (28) se scoate $\dot{\varphi}$, în timp ce (29) dă pe $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \left\{ \frac{1}{Cz} \left(\ddot{C}z + 3\gamma \frac{\dot{C}z}{V} \right) - (V\dot{C}z + 2\gamma Cz) \cdot \left[\frac{V\dot{C}z + \gamma Cz}{V^2 Cz^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{\rho S V}{2G \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 (V\dot{C}z + 2\gamma\,Cz) \right] \right\} \tag{75}$$

iar prima și a doua derivată a lui ψ rezultă direct din (26).

Ca și pentru cazurile anterioare, vom avea:

$$\psi = \psi_0 + \int_{V_0}^{V} \frac{V}{\dot{V} R}\, dV = \psi_0 + \frac{g}{2\gamma} \int_{V_0}^{V} \frac{\sqrt{\left(\frac{\rho S}{2G}\right)^2 V^4 C_z^2 - 1}}{V^2}\, d(V^2). \tag{76}$$

Fie constantele:

$$m = \left(\frac{\rho S}{2G}\right)^2 \frac{\pi\lambda}{1+\delta}(a-\gamma);\ n=\left(\frac{\rho S}{2G}\right)^2 \frac{\pi\lambda}{1+\delta}(b_3+Cx_0);$$
$$p = -\frac{m}{2n};\ q = \frac{1}{n}\left(\frac{m^2}{4n}-1\right). \tag{77}$$

Valoarea lui ψ va fi:

$$\psi = \psi_0 + \frac{g}{2\gamma}\left[\sqrt{m\,V^2 - nV^4 - 1} + \frac{m}{2\sqrt{n}}\ \text{arc sin}\ \frac{m-2nV^2}{\sqrt{m^2-4n^2}} - \right.$$
$$\left. - 2\sqrt{n}\ \text{arc tg}\ \sqrt{\frac{p+\sqrt{q}}{p-\sqrt{q}}\cdot\frac{1-\sqrt{q}(V^2+p)}{1+\sqrt{q}(V^2+p)}}\right] - I_2, \tag{78}$$

I_2 fiind valoarea parantezei mari pentru $V = V_0$.

Să admitem de asemenea valoarea lui $\frac{\psi_h}{\mu}$ scoasă din (36). Vom avea, cu aceleași notații ca și pentru (39):

$$Cx = \frac{a'-\gamma+2b'V}{V^2};\ \dot{C}_x = \frac{2\gamma}{V^2}\left(\frac{\gamma-a'}{V}-b'\right);\ \ddot{C}x = \frac{2\gamma^2}{V^3}\left(2b'-3\frac{\gamma-a'}{V}\right). \tag{79}$$

$$\dot{C}z = \frac{\pi\lambda}{2(1+\delta)C_z}\dot{C}x \text{ și } \ddot{C}z \text{ are aceeași expresie ca și (73).}$$

Celelalte variabile cu derivatele lor păstrează valorile arătate mai înainte, înafară de unghiul ψ care va fi dat de (76); substituind în această expresie Cz^2 prin valoarea care rezultă din (79), precum și din ecuația polarei, integrala (76) devine eliptică. Este deci mai ușor să se procedeze direct, după cum s'a arătat pentru evoluția cu incidență constantă.

Mișcarea avionului cu variația înclinării laterale (φ) *în funcție de timp după o lege cunoscută.* Este evoluția întâlnită curent în timpul amorsării virajului sau trecând dela o traiectorie curbă la o alta de rază diferită. Trebue definită, în acest caz, legea de variație a lui φ. Fie, în general:

$$\text{tg}\ \varphi = f(t) \tag{80}$$

și din (10):

$$\frac{V^2}{gR} = f(t);\quad 1+[f(t)]^2 = \left(\frac{\rho S}{2G}\right)^2 V^4 Cz^2. \tag{81}$$

Ecuațiile (15) și (35) dau:

$$\dot{V} = \frac{g\rho S}{2G}\left[E\frac{\pi R_h^2 (R_h\,\Omega_1)^2\,\mu_0}{S} - \left(F\frac{\pi R_h^2 (R_h\,\Omega_1)^2\,\mu_0}{S} + Cx_0\right)V^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{4G^2}{\rho^2 S^2 \pi\lambda}\cdot\frac{1+[f(t)]^2}{V^2}\right] = a - bV^2 - c\frac{1+[f(t)]^2}{V^2}. \tag{82}$$

Ecuația (82) nu poate fi integrată direct, pentru cazul general ($f(t)$ oarecare). Se poate totuși proceda prin aproximații succesive. Fie $V = V_0$ la începutul evoluției și $t = t_0$. Avem:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau, V_0)\, d\tau \\ V_2 &= V_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau, V_1)\, d\tau \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_n &= V_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau, V_{n-1})\, d\tau \end{aligned} \tag{83}$$

și dacă V nu prezintă variații sensibile în timpul evoluției, se poate admite o singură aproximație. Se găsește deci:

$$V = V_0 + \left(a - bV_0^2 - \frac{c}{V_0^2}\right) \cdot (t - t_0) - \frac{c}{V_0^2} \int_{t_0}^{t} [f(\tau)]^2\, d\tau \tag{84}$$

Soluția va depinde de funcția $f(t)$ admisă și calculul este redus la o cuadratură simplă. Fie de exemplu:

$$f(t) = K(t - t_0) \tag{85}$$

Din (84) se găsește imediat:

$$V = V_0 + \left[\dot{V}_0 - \frac{cK}{3V_0^2}(t - t_0)^2\right](t - t_0). \tag{86}$$

unde $\dot{V}_0$ este valoarea accelerației la momentul inițial ($t = t_0$).

Există totuși un caz în care problema se poate rezolva exact, fără a fi obligați să admitem o variație lentă a vitesei. Acest caz mai este interesant și pentrucă reproduce, destul de corect, legea uzuală de variație a lui φ, vitesa unghiulară $\dot{\varphi}$ fiind totodată finită mereu și cuprinsă între limite acceptabile. Fie, dacă t_0, V_0 și φ_0 sunt valorile inițiale ale lui t, V și φ:

$$\varphi = \arccos \frac{\pm V_0}{V\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi_0} \pm \varkappa[\operatorname{ch} 2\mu(t - t_0) - 1]}}, \tag{87}$$

valabilă în fiecare cadran cu primul semn sub radical pentru $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ sau $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ și cu al doilea semn $(-)$ pentru al doilea și al patrulea cadran, dacă rotația este efectuată în sensul pozitiv și invers dacă $\dot{\varphi} < 0$. De asemenea, se va lua primul semn $(+)$ la numărător pentru $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ și al doilea semn $(-)$ pentru $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

Figura 3 reprezintă curba $\varphi = f[\mu(t-t_0)]$, calculată presupunând $\mu = 1$ și $V \cong V_0$. Remarcăm aspectul aproape rectiliniu până la 45° și descreșterea vitesei unghiulare pentru valorile mari ale lui φ, în bun acord cu observațiile următoare.

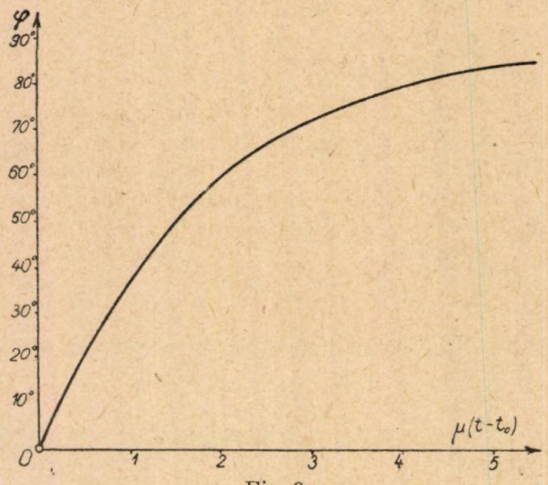


Fig 3

Dacă V variază în mod apreciabil, mersul curbei rămâne același și — alegând judicios parametrul μ — se poate reproduce astfel fenomenul real, chiar pentru mișcările rapide de rotație.

Observăm că valorile finale sau inițiale ale lui φ trebue să fie compatibile cu ecuația (81), o rotație completă $\Delta\varphi = 2\pi$ nefiind posibilă pe o traiectorie riguros orizontală. Sfârșitul evoluției va fi determinat prin momentul t, în care $f(t)$ și V vor satisface egalitățile:

$$\frac{1}{\cos\varphi_1} = \frac{\rho S}{2G} V_1^2 C z_{\max} \text{ sau } V_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho S}{2G} C z_{\max} \cos\varphi_1}}, \tag{88}$$

după care, V neputând crește proporțional cu membrul întâiu (81), avionul se va angaja pe o traiectorie înclinată față de planul orizontal.

După introducerea expresiei (87), formula (82) devine:

$$\dot{V} = a - bV^2 - c\frac{\frac{1}{\cos^2\varphi_0} \mp \varkappa \pm \varkappa \operatorname{ch} 2\mu(t-t_0)}{V_0^2} = a - bV^2 - d \mp q \operatorname{ch} 2\mu(t-t_0). \tag{89}$$

Să punem $t - t_0 = \tau$, $dt = d\tau$ și să facem schimbarea de variabilă:

$$V = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{d\tau}. \tag{90}$$

Din (89) se găsește apoi, cu $a - d = k$.

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - b[k \mp q \operatorname{ch} 2\mu\tau]u = 0, \tag{91}$$

ecuația lui Mathieu [5], a cărei soluțiune generală este de forma:

$$u = e^{i\alpha\mu\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2n\mu\tau}, \tag{92}$$

Pentru a determina coeficienții α și A_n, observăm mai întâi că există relația de recurență:

$$\left[(2n + i\alpha)^3 - \frac{bk}{\mu^2}\right] A_n \pm \frac{bq}{2\mu^2}(A_{n-1} + A_{n+1}) = 0. \tag{93}$$

Se obține astfel un sistem infinit de ecuații omogene, în raport cu coeficienții A_n. Pentru ca acest sistem să fie compatibil, este necesar ca determinantul format de coeficienții necunoscutelor A_n să se anuleze. Fie $\Delta(i\alpha)$ valoarea acestui determinant. Avem, dacă valoarea $\Delta(0)$ este valoarea corespunzătoare făcând $\alpha = 0$, ecuația care permite calculul acestei constante:

$$\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) = \Delta(0) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{bk}}{\mu}\right) \tag{94}$$

în care:

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\pm bq}{2\mu^2\left(16 - \frac{bk}{\mu^2}\right)} & 1 & \dfrac{\pm bq}{2\mu^2\left(16 - \frac{bk}{\mu^2}\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & \dfrac{\pm bq}{2\mu^2\left(4 - \frac{bk}{\mu^2}\right)} & 1 & \dfrac{\pm bq}{2\mu^2\left(4 - \frac{bk}{\mu^2}\right)} & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & \mp\dfrac{q}{2k} & 1 & \mp\dfrac{q}{2k} & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & \dfrac{\pm bq}{2\mu^2\left(4 - \frac{bk}{\mu^2}\right)} & 1 & \dfrac{\pm bq}{2\mu^2\left(4 - \frac{bk}{\mu^2}\right)} & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\pm bq}{2\mu^2\left(16 - \frac{bk}{\mu^2}\right)} & 1 & \dfrac{\pm bq}{2\mu^2\left(16 - \frac{bk}{\mu^2}\right)} \end{vmatrix} \tag{95}$$

Se poate calcula $\Delta(0)$ cu o aproximație suficient de mare, observând că, dacă plecăm dela linia centrală, elementele celorlalte linii descresc repede; ne putem astfel limita la determinantul de gradul 3 sau 5 pentru a avea o valoare aproape exactă.

In sfârșit, ecuația (91) admite drept soluțiuni particulare, funcțiile asociate de prima speță, ale lui Mathieu:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Ce}^{(1)}_{2n}(\mu\tau) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n,2r}\, J_r\left(\sqrt{\pm\frac{bq}{2}}\, e^{\mu\tau}\right) J_r\left(\sqrt{\pm\frac{bq}{2}}\, e^{-\mu\tau}\right) \\ \mathrm{Ce}^{(1)}_{2n+1}(\mu\tau) &= \operatorname{ch}(\mu\tau) \sum_{r=1}^{\infty} a_{2n+1,r}\, J_r\left(\sqrt{\pm\frac{bq}{2}}\, e^{\mu\tau}\right) J_r\left(\sqrt{\pm\frac{bq}{2}}\, e^{-\mu\tau}\right) \\ \mathrm{Se}^{(1)}_{2n}(\mu\tau) &= \operatorname{sh}(\mu\tau) \operatorname{ch}(\mu\tau) \sum_{r=1}^{\infty} b_{2n,r}\, J_{r+1}\left(\sqrt{\pm\frac{bq}{2}}\, e^{\mu\tau}\right) J_{r+1}\left(\sqrt{\pm\frac{bq}{2}}\, e^{-\mu\tau}\right) \\ \mathrm{Se}^{(1)}_{2n+1}(\mu\tau) &= \operatorname{sh}(\mu\tau) \sum_{r=1}^{\infty} b_{2n+1,r}\, J_r\left(\sqrt{\pm\frac{bq}{2}}\, e^{\mu\tau}\right) J_r\left(\sqrt{\pm\frac{bq}{2}}\, e^{-\mu\tau}\right) \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

dacă coeficienții b, k și q satisfac anumite condiții, J_r fiind funcțiile Bessel. Într'adevăr, coeficienții din (96) sunt dați de relațiile de recurență:

$$\left.\begin{aligned}
&-bk\,A_{2n,0} \pm \frac{bq}{2} A_{2n,2} = 0 && \text{pentru } r = 0\\
&\pm bq\,A_{2n,0} + (4 - bk)\,A_{2n,2} \pm \frac{bq}{2} A_{2n,4} = 0 && \text{pentru } r = 1\\
&\pm \frac{bq}{2} A_{2n,2r-2} + (4r^2 - bk) A_{2n,2r} \pm \frac{bq}{2} A_{2n,2r+2} = 0 && \text{pentru } r > 1\\
&a_{2n+1,r} = (-1)^r r \sum_{p=0}^{p=r-1} A_{2n+1,2p+1}\\
&b_{2n+1,r} = r \sum_{p=0}^{p=r-1} (-1)^p B_{2n+1,2p+1}
\end{aligned}\right\} \quad (97)$$

și pentru calculul lui $a_{2n+1,r}$ și $b_{2n+1,r}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\pm \frac{bq}{2} A_{2n+1,1} + (1 - bk)\,A_{2n+1,1} \pm \frac{bq}{2} A_{2n+1,3} = 0 && \text{pentru } r = 0\\
&\pm \frac{bq}{2} A_{2n+1,2r-1} + [(2r+1)^2 - bk]\,A_{2n+1,2r+1} \pm\\
&\qquad \pm \frac{bq}{2} A_{2n+1,2r+3} = 0 && \text{pentru } r > 0\\
&(4 - bk)\,B_{2n,2} \pm \frac{bq}{2} B_{2n,4} = 0 && \text{pentru } r = 1\\
&\pm \frac{bq}{2} B_{2n\,2r-2} + (4r^2 - bk)\,B_{2n,2r} \pm \frac{bq}{2} B_{2n,2r+2} = 0 && \text{pentru } r > 1\\
&-\frac{bq}{2} B_{2n+1,1} + (1 - bk)\,B_{2n+1,1} \pm \frac{bq}{2} B_{2n+1,3} = 0 && \text{pentru } r = 0\\
&\pm \frac{bq}{2} B_{2n+1,2r-1} + [(2r+1)^2 - bk]\,B_{2n+1,2r+1} \pm\\
&\qquad \pm \frac{bq}{2} B_{2n+1,2r+3} = 0 && \text{pentru } r > 0
\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

Pentru orice funcție a lui Mathieu Ce, Se de indice par sau impar, trebue determinați coeficienții $A_{2n,2r}$, $B_{2n+1,2r+1}$, etc., cu formulele (97) și (98). Se deduce, sistemul de ecuații fiind omogen, că determinantul format de coeficienții lui $A_{2n,2r}$ etc. trebue să fie nul. Din această condiție, rezultă o legătură între b, k și q sau, în cele din urmă, între $\varkappa$, c, φ_0 și V_0^2. Cum ultimele trei cantități sunt date pentru începutul mișcării, se observă că, pentru anumite valori ale lui $\varkappa$, funcțiile Mathieu sunt soluțiuni ale ecuației (91). Totuși, se

poate obține, în general, ca această condiție să fie îndeplinită, variind în sens invers $\varkappa$ și μ, fără a modifica esențial caracteristicele evoluției.

Indicele $2n$, $2n+1$ al funcțiilor lui Mathieu (96) este definit cu ajutorul determinanților caracteristici, sau direct din graficele stabilite în funcție de constantele ecuației.

In sfârșit, se mai poate găsi încă o soluțiune simplă pentru (91), dacă produsul bq este mic. Fie pentru aceasta:

$$\sqrt{2bq}\,\mathrm{sh}\,\tau = x. \tag{99}$$

Ecuația (91) devine:

$$(x^2 + 2bq)\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + \left[\pm\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{b(k \mp q)}{\mu^2}\right]u = 0 \tag{100}$$

și dacă bq este neglijabil față de x^2, se găsește ecuația lui Bessel:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + \left[\pm\frac{1}{\mu^2} - \frac{bk}{\mu^2}\cdot\frac{1}{x^2}\right]u = 0, \tag{101}$$

a cărei soluție este:

$$u = C_1 J_{\frac{\sqrt{bk}}{\mu}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pm\mu^2}}x\right) + C_2 N_{\frac{\sqrt{bk}}{\mu}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pm\mu^2}}x\right) \tag{102}$$

J și N fiind funcțiile lui Bessel și Neumann (funcții cilindrice de prima și a doua speță).

Rezultă deci că soluția ecuației (91) poate fi dată, după valorile coeficienților, fie de (92), fie de funcțiile asociate ale lui Mathieu (96) sau, în sfârșit, de funcțiile cilindrice (102). Formula (102) dă soluțiunea generală, ca și (92), în timp ce pentru funcțiile φ_m ale lui Mathieu, soluțiunea cea mai generală va fi:

$$u = C_1\varphi_m^{(1)} + C_2\varphi_m^{(2)}, \tag{103}$$

unde $\varphi_m^{(2)}$ sunt funcțiile lui Mathieu corespunzătoare, de a doua speță, fie:

$$\varphi_m^{(2)} = \varphi_m^{(1)}\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{(\varphi_m^{(1)})^2}. \tag{104}$$

Se poate calcula apoi cu ușurință derivata $\frac{du}{d\tau}$ și expresia lui V. Se observă că V depinde de o singură constantă arbitrară, raportul $\frac{C_2}{C_1}$ pentru (102) și

(103), permițând să se pună condiția la limită $V = V_0$ când $t = t_0$, $\tau = 0$. Dacă se neglijează bq, de exemplu, avem din (102)

$$V = \mu \sqrt{\frac{2q}{b}} \operatorname{ch} \mu (t - t_0) \left[\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2q}\, \mu \operatorname{sh} \mu (t - t_0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{J_{\frac{\sqrt{bk}}{\mu}+1}\left[\frac{\sqrt{\pm 2bq}}{\mu} \operatorname{sh} \mu (t - t_0)\right] + CN_{\frac{\sqrt{bk}}{\mu}+1}\left[\frac{\sqrt{\pm 2bq}}{\mu} \operatorname{sh} \mu (t - t_0)\right]}{J_{\frac{\sqrt{bk}}{\mu}}\left[\frac{\sqrt{\pm 2bq}}{\mu} \operatorname{sh} \mu (t - t_0)\right] + CN_{\frac{\sqrt{bk}}{\mu}}\left[\frac{\sqrt{\pm 2bq}}{\mu} \operatorname{sh} \mu (t - t_0)\right]} \right]. \tag{105}$$

Observăm totuși că ecuația (102) a fost stabilită presupunând bq mic și neglijabil față de x^2, ceea ce implică valori apreciabile ale lui $\tau = t - t_0$ (99). Rezultă că în vecinătatea lui $\tau = 0$ soluțiunea (105) nu mai este valabilă și că ea se aplică numai după un timp oarecare dela amorsarea mișcării. In acest caz, condițiile inițiale vor fi $t = t_1 \neq t_0$ și $V = V_1 \neq V_0$. Matematic, se constată de asemenea că ar rezulta $V_0 \to \infty$, în acord cu cele precedente. Dimpotrivă, ecuațiile (103) și (92) răspund corect condițiilor inițiale (dacă $t = t_0$), aceste soluțiuni fiind mai complete, deoarece sunt aplicabile pe toată durata evoluției.

Odată cunoscute V și derivata sa $\dot{V}$, se scoate imediat raza R a traiectoriei și valoarea lui Cz (81). Regimul elicei rezultă din (11) și (14). Derivatele $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$ sunt date de ecuațiile (26), adică, dacă $f(t) = \operatorname{tg} \varphi$ este definit prin (87) sau printr'o altă relație oarecare permițând calculul lui V din (84):

$$\dot{\psi} = \frac{V}{R} = g \frac{f(t)}{V}\ ; \quad \ddot{\psi} = \frac{g}{V}\left[\dot{f}(t) - \frac{\dot{V} f(t)}{V}\right] \tag{106}$$

$$\dot{\varphi} = \cos^2 \varphi\, [\dot{f}(t)] = \frac{1}{1 + [f(t)]^2}\, \dot{f}(t),$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{1 + [f(t)]^2}\left[\ddot{f}(t) - \frac{2 f(t)}{1 + [f(t)]^2} \cdot [\dot{f}(t)]^2\right] \tag{107}$$

$$\dot{C}_z = C_z\left(\dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \frac{2\dot{V}}{V}\right)$$

$$\ddot{C}_z = \dot{C}_z\left(\dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \frac{2\dot{V}}{V}\right) + C_z\left[\ddot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi + \frac{(\dot{\varphi})^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{2}{V}\left(\frac{\dot{V}^2}{V} - \ddot{V}\right)\right].$$

Ecuațiile (17) — (25) permit apoi calculul lui Cz_h, Cz_v ai ampenajelor și A_2 (poziția aripioarelor).

Pentru a trasa traiectoria, avem valoarea lui ψ în fiecare moment. In continuare, se poate proceda prin aproximații succesive, așa după cum s'a arătat.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ САМОЛЕТА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Устанавливаются общие уравнения переменного движения центра тяжести самолета на траектории, расположенной в горизонтальной плоскости.

Затем показывают, по каким законам изменяется ротационная скорость системы моторного двигателя, учитывая инерцию его частей (11) и характеристики пропеллера. Определяются соотношения между углами, обуславливающими положение самолета, вращения и его угловые ускорения, и устанавливаются уравнения движения вокруг центра тяжести. Вычисляются выражения радиуса кривизны траекторий, несущая сила, угол падения и производные, входящие в предыдущие уравнения; затем члены, зависящие от режима работы пропеллера в уравнениях проекций сил, в зависимости от общей скорости самолета (35) и (36).

Преобразованием уравнений полета приходят к методу общего решения движений в горизонтальной плоскости; для дальнейшего применения результатов необходимо уточнить некоторый параметр, взятый в обычных условиях полета или пилотирования. Таким образом исследуются полностью горизонтальные траектории, отвечающие переменным движениям, в следующих случаях:

а) постоянный угол падения,

б) ускоренные движения по окружности,

в) траектории с постоянным наклоном самолета,

г) движение с постоянным тангенциальным ускорением самолета,

д) движение самолета с изменением во времени бокового наклона по данной закономерности.

Для всех вышеуказанных случаев дается практический метод вычисления траекторий.

ÊTUDE DES TRAJECTOIRES HORIZONTALES D'UN AVION

(RÉSUMÉ)

On établit les équations générales du mouvement non permanent du centre de gravité d'un avion, sur une trajectoire située dans un plan horizontal. On trouve ensuite la loi de variation de la vitesse de rotation du groupe motopropulseur, en tenant compte des caractéristiques de l'hélice et de l'inertie des pièces de l'engin. On donne ensuite les relations entre les angles de position de l'appareil, les rotations et les accélérations angulaires etl'on établit les équations du mouvement autour du centre de gravité. On calcule l'expression du rayon de courbure des trajectoires, la portance, l'incidence et les dérivées dont dépendent les équations précédentes; ensuite les termes qui caractérisent le régime de l'hélice dans les équations de projection des forces, en fonction de la vitesse totale de l'avion (35) et (36).

En transformant convenablement les équations de vol, on arrive à une méthode générale résolvant les mouvements dans un plan horizontal; pour appliquer plus loin les résultats, il est nécessaire de préciser un paramètre choisi en tenant compte des conditions courantes de vol ou du pilotage. On

étudie ainsi complètement les trajectoires horizontales qui correspondent aux mouvements non permanents, dans les cas suivants: *a)* incidence constante, *b)* mouvements accelérés sur trajectoires circulaires, *c)* évolutions avec inclinaison latérale constante de l'avion, *d)* mouvements avec accélération tangentielle constante et *e)* mouvement de l'avion avec une variation de l'inclinaison latérale d'après une loi donnée.

Pour tous les cas ci-dessus on donne une méthode pratique de calcul des trajectoires.

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. Tipei, *Une nouvelle méthode pour le calcul des performances d'un avion*. Bull. de Math. et de Phys. de l'École Polytechnique de Bucarest, 1939—1940, Nr. 1-3.
2. E. Carafoli, *Théorie des ailes d'envergure finie*. Anal. Acad. Rom., 1945, Seria III, t. XX.
3. Bairstow, citat de W. Durand în Aerodynamic Theory, Springer, 1935, v. V, p. 176.
4. NACA, T. R., 1934, Nr. 481.
5. W. Magnus und F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*. J. Springer, 1943.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1–2, 1952

DESPRE INTEGRAREA ECUAŢIEI LINIEI ELASTICE ÎN FLAMBAJUL TIJELOR VERTICALE, GRELE ŞI SVELTE

DE

N. S. PÂRVULESCU

Această ecuaţie diferenţială provine din ecuaţia mai generală a axei deformate elastic (linia elastică) a unei tije verticale, svelte şi grele în rotaţie:

$$A\frac{d^4y}{dx^4} = (x-h)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{g}y, \qquad (1)$$

pe care am stabilit-o anterior [1] şi în care:

$$A = EI/q \qquad (2)$$

E modulul de elasticitate
I momentul de inerţie
q greutatea aparentă a unei unităţi de lungime din tijă
h lungimea comprimată a tijei ($h = -h'$)
ω vitesa unghiulară de rotaţie
g acceleraţia gravităţii (g=9,81 m/sec^2)
x depărtarea unui element de tijă dela originea O consideraţă în capătul de jos al tijei.
y săgeata axei deformate a tijei la depărtarea x de originea O.

Dacă în relaţia (1) facem pe $\omega = 0$, obţinem:

$$A\frac{d^4y}{dx^4} = (h'+x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}, \qquad (1_0)$$

care se poate pune sub forma:

$$A\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left[(h'+x)\frac{dy}{dx}\right] \qquad (3)$$

şi integrând, obţinem ecuaţia menţionată:

$$\boxed{A\frac{d^3y}{dx^3} = (h'+x)\frac{dy}{dx} + C}\,. \qquad (4)$$

Putem considera pe y ca o serie de puteri întregi:

$$y = \sum_{n=0}^{t} a_n x^n \quad \text{pentru } t \to \infty. \tag{5}$$

Derivăm succesiv:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sum_{n=0}^{t} n a_n x^{n-1} \tag{5_1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sum_{n=0}^{t} (n-1)\, n a_n x^{n-2} \tag{5_2}$$

și prin urmare, derivata de ordinul i:

$$y^{(i)} = \sum_{n=0}^{t} \frac{n!}{(n-i)!} a_n x^{n-i} \tag{5_i}$$

în care $n!$ este definit [2] prin expresia:

$$n! = (n-1)!\, n. \tag{6}$$

Înlocuind expresia (5_i) în relația (4), obținem:

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-3)!} a_n x^{n-3} - (h' + x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-1)!} a_n x^{n-1} = 0. \tag{7}$$

Se știe că, pentru ca această egalitate să se reducă la identitate, este necesar să anulăm coeficienții diferitelor puteri ale lui x.

Anulând coeficientul lui x^{m-3} din relația (7), obținem relația:

$$A \frac{m!}{(m-3)!} a_m - h' \frac{(m-2)!}{(m-3)!} a_{m-2} - \frac{(m-3)!}{(m-4)!} a_{m-3} = 0 \tag{8}$$

valabilă pentru $m \geqslant 4$ și care se poate pune sub forma:

$$\boxed{m!\, a_m = \frac{h'}{A}(m-2)!\, a_{m-2} + \frac{m-3}{A}(m-3)!\, a_{m-3}}, \tag{9}$$

cu care putem calcula termenii succesivi ai seriei.

La formula de recurență (9), putem ajunge aplicând același procedeu relației (1_0), adică înlocuind valorile $y^{(i)}$ din (5_i) și obținând succesiv relațiile:

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-4)!} a_n x^{n-4} = (h' + x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-2)!} a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-1)!} a_n x^{n-1} \tag{7'}$$

$$A \frac{m!}{(m-4)!} a_m = h' \frac{(m-2)!}{(m-4)!} a_{m-2} + (m-3)\, a_{m-3} \left[\frac{1}{(m-5)!} + \frac{1}{(m-4)!} \right], \tag{8'}$$

ceea ce constituie o verificare.

Anulând coeficientul lui x^0 din (7), obținem:

$$3!\, a_3 = \frac{h'}{A} a_1 + \frac{C}{A}. \tag{10_3}$$

Ca să anulăm coeficientul lui x^1, facem în (7) pe $m = 4$ și obținem:

$$4!\, a_4 = \frac{h'}{A} 2!\, a_2 + \frac{a_1}{A}. \tag{10_1}$$

La fel și pentru coeficientul lui x^2:

$$5!\,a_5 = \frac{h'}{A}3!\,a_3 + \frac{2}{A}2!\,a_2, \tag{10_2}$$

sau:

$$5!\,a_5 = \frac{2}{A}2!\,a_2 + \frac{h'^2}{A^2}a_1 + \frac{h'C}{A^2} \tag{$10_2'$}$$

și așa mai departe, obținem valorile a_n, în care $n = 0, 1, 2, 3\ldots$ în funcție de a_0, a_1, a_2 și C sau a_3.

Deoarece calculul pentru termenii îndepărtați este anevoios și se pot strecura greșeli, să folosim pentru verificare ambele expresii de tipul (10_n) și ($10_n'$).

Introducem valorile a_n în relația (5_0), grupăm termenii pentru a da factori comuni pe a_0, a_1, a_2 și C sau a_3, facem înlocuirile:

$$Z(x) = x^3/A = qx^3/EI \tag{11}$$

$$\alpha'(x) = h'/x = -\alpha(x) = -h/x, \tag{12}$$

ținând seama de (2) și obținem:

a) dacă folosim expresiile de tipul ($10_n'$):

$$\begin{aligned}
y = a_0 + a_1x\Bigg\{&\frac{1}{1!} + z(x)\left[\frac{\alpha'(x)}{3!} + \frac{1}{4!}\right] + z^2(x)\left[\frac{\alpha'^2(x)}{5!} + \alpha'(x)\frac{1+3}{6!} + \frac{4}{7!}\right] \\
&+ z^3(x)\left[\frac{\alpha'^3(x)}{7!} + \alpha'^2(x)\frac{1+3+5}{8!} + \alpha'\frac{4+(1+3)6}{9!} + \frac{4\cdot7}{10!}\right] \\
&+ \ldots \qquad\qquad \ldots\Bigg\} \\
+2a_2x^2\Bigg\{&\frac{1}{2!} + z(x)\left[\frac{\alpha'(x)}{4!} + \frac{2}{5!}\right] + z^2(x)\left[\frac{\alpha'^2(x)}{6!} + \alpha'(x)\frac{2+4}{7!} + \frac{2\cdot5}{8!}\right] \\
&+ z^3(x)\left[\frac{\alpha'^3(x)}{8!} + \alpha'^2(x)\frac{2+4+6}{9!} + \alpha'(x)\frac{2\cdot5+(2+4)7}{10!} + \frac{2\cdot5\cdot8}{11!}\right] \\
&+ \ldots \qquad\qquad \ldots\Bigg\} \\
+Cz(x)\Bigg\{&\frac{1}{3!} + z(x)\left[\frac{\alpha'(x)}{5!} + \frac{3}{6!}\right] + z^2(x)\left[\frac{\alpha'^2(x)}{7!} + \alpha'(x)\frac{3+5}{8!} + \frac{3\cdot6}{9!}\right] \\
&+ z^3(x)\left[\frac{\alpha'^3(x)}{9!} + \alpha'^2(x)\frac{3+5+7}{10!} + \alpha'(x)\frac{3\cdot6+(3+5)8}{11!} + \frac{3\cdot6\cdot9}{12!}\right] \\
&+ \ldots \qquad\qquad \ldots\Bigg\}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{13'}$$

b) dacă folosim expresiile de tipul (10_n):

$$y = a_0 + a_1 x + 2a_2 x^2 \left\{ \frac{1}{2!} + z(x)\left[\frac{\alpha'(x)}{4!} + \frac{2}{5!}\right] + z^2(x)\left[\frac{\alpha'^2(x)}{7!} + \alpha'(x)\,\frac{2+4}{7!} + \frac{2\cdot 5}{8!}\right] \right.$$
$$\left. + z^3(x)\left[\frac{\alpha'^3(x)}{8!} + \alpha'^2(x)\,\frac{2+4+6}{9!} + \alpha'(x)\,\frac{2\cdot 5 + (2+4)\,7}{10!} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{11!}\right] \right.$$
$$\left. + \ldots \qquad \ldots \right\}$$
$$+ 3!\, a_3 x^3 \left\{ \frac{1}{3!} + z(x)\left[\frac{\alpha'(x)}{5!} + \frac{3}{6!}\right] + z^2(x)\left[\frac{\alpha'^2(x)}{7!} + \alpha'(x)\,\frac{3+5}{8!} + \frac{3\cdot 6}{9!}\right] \right.$$
$$\left. + z^3(x)\left[\frac{\alpha'^3(x)}{9!} + \alpha'^2(x)\,\frac{3+5+7}{10!} + \alpha'(x)\,\frac{3\cdot 6 + (3+5)\,8}{11!} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{12!}\right] \right. \qquad (13)$$
$$\left. + \ldots \qquad \ldots \right\}$$
$$+ a_1 x z(x) \left\{ \frac{1}{4!} + z(x)\left[\frac{\alpha'(x)}{6!} + \frac{4}{7!}\right] + z^2(x)\left[\frac{\alpha'^2(x)}{8!} + \alpha'(x)\,\frac{4+6}{9!} + \frac{4\cdot 7}{10!}\right] \right.$$
$$\left. + z^3(x)\left[\frac{\alpha'^3(x)}{10!} + \alpha'^2(x)\,\frac{4+6+8}{11!} + \alpha'(x)\,\frac{4\cdot 7 + (4+6)\,9}{12!} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{13!}\right] \right.$$
$$\left. + \ldots \qquad \ldots \right\}$$

Să definim funcţiile $\Xi_j(x)$, astfel:

$$\Xi_j(x) = \sum_{k=0}^{t} z^k(x) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{k-u}(x)\,\frac{N_j^{k,k-u}}{(j+2k+u)!} \qquad (14_0)$$

pentru $t \to \infty$
în care $N_j^{k,k-u}$ este un număr care se poate obţine prin formula de recurenţă:

$$N_j^{k,k-u} = N_j^{k-1,\,k-u-1} + N_j^{k-1,\,k-u}\,(j+2k+u-3), \qquad (15)$$

valabilă pentru $u \geqslant 1$ şi $k-u \geqslant 1$.

Pentru $u = 0$ avem

$$N_j^{k,k-1} = 1 \qquad (15_{k,k})$$

iar pentru $k-u = 0$ avem

$$N_j^{k,0} = [j+3(k-1)]!!! \qquad (15_{k,0})$$

deoarece $N_j^{k-1,\,k-u-1} = 0$.

Observăm că:

$$\Xi_1(x) = 1 + z(x)\,[\Xi_4(x) + \alpha'(x)\,\Xi_3(x)]. \qquad (16)$$

Dăm mai jos un tablou cu numerele $K_j^{k,k-u}$, până la cele corespunzătoare termenilor de gradul 5:

$N_1^{0,0} = 1$

$N_1^{1,1} = 1 \quad N_1^{1,0} = 1$

$N_1^{2,2} = 1 \quad N_1^{2,1} = 4 \quad N_1^{2,0} = 4$

$N_1^{3,3} = 1 \quad N_1^{3,2} = 9 \quad N_1^{3,1} = 28 \quad N_1^{3,0} = 28$

$N_1^{4,4} = 1 \quad N_1^{4,3} = 16 \quad N_1^{4,2} = 100 \quad N_1^{4,1} = 280 \quad N_1^{4,0} = 280$

$N_1^{5,5} = 1 \quad N_1^{5,4} = 25 \quad N_1^{5,3} = 260 \quad N_1^{5,2} = 1.380 \quad N_1^{5,1} = 3.640 \quad N_1^{5,0} = 3.640$

$N_2^{0,0} = 1$

$N_2^{1,1} = 1 \quad N_2^{1,0} = 2$

$N_2^{2,2} = 1 \quad N_2^{2,1} = 6 \quad N_2^{2,0} = 10$

$N_2^{3,3} = 1 \quad N_2^{3,2} = 12 \quad N_2^{3,1} = 52 \quad N_2^{3,0} = 80$

$N_2^{4,4} = 1 \quad N_2^{4,3} = 20 \quad N_2^{4,2} = 160 \quad N_2^{4,1} = 600 \quad N_2^{4,0} = 880$

$N_2^{5,5} = 1 \quad N_2^{5,4} = 30 \quad N_2^{5,3} = 380 \quad N_2^{5,2} = 2.520 \quad N_2^{5,1} = 8.680 \quad N_2^{5,0} = 12.320$

$N_3^{0,0} = 1$

$N_3^{1,1} = 1 \quad N_3^{1,0} = 3$

$N_3^{2,2} = 1 \quad N_3^{2,1} = 8 \quad N_3^{2,0} = 18$

$N_3^{3,3} = 1 \quad N_3^{3,2} = 15 \quad N_3^{3,1} = 82 \quad N_3^{3,0} = 162$

$N_3^{4,4} = 1 \quad N_3^{4,3} = 24 \quad N_3^{4,2} = 232 \quad N_3^{4,1} = 1.064 \quad N_3^{4,0} = 1.944$

$N_3^{5,5} = 1 \quad N_3^{5,4} = 35 \quad N_3^{5,3} = 520 \quad N_3^{5,2} = 4.080 \quad N_3^{5,1} = 16.840 \quad N_3^{5,0} = 29.160$

$N_4^{0,0} = 1$

$N_4^{1,1} = 1 \quad N_4^{1,0} = 4$

$N_4^{2,2} = 1 \quad N_4^{2,1} = 10 \quad N_4^{2,0} = 28$

$N_4^{3,3} = 1 \quad N_4^{3,2} = 18 \quad N_4^{3,1} = 118 \quad N_4^{3,0} = 280$

$N_4^{4,4} = 1 \quad N_4^{4,3} = 28 \quad N_4^{4,2} = 316 \quad N_4^{4,1} = 1.696 \quad N_4^{4,0} = 3.640$

$N_4^{5,5} = 1 \quad N_4^{5,4} = 40 \quad N_4^{5,3} = 680 \quad N_4^{5,2} = 6.120 \quad N_4^{5,1} = 29.080 \quad N_4^{5,0} = 58.240.$

Desvoltând expresiile (13) și (13′) la un număr mai mare de termeni — calculele sunt anevoioase — observăm că se pot pune sub următoarele forme:

$$y = a_0 + a_1(x)\,\Xi_1(x) + 2\,a_2\,x^2\,\Xi_2(x) + Cz(x)\,\Xi_3(x) \qquad (17')$$

$$y = a_0 + a_1(x)[1 + z(x)\,\Xi_4(x)] + 2\,a_2\,x^2\,\Xi_2(x) + 3!\,a_3\,x^3\,\Xi_3(x). \qquad (17)$$

Dacă în relația (17) înlocuim valoarea lui $\Xi_4(x)$ din (16), ținând seama și de (10_0), obținem tocmai relația (17'), ceea ce constitue o verificare.

Să definim funcția $\varphi_j(x)$, astfel:

$$\varphi_j(x) = x^j \Xi_j(x). \tag{18$_0$}$$

Ținând seama de aceasta (18_0), relațiile (17') și (17) devin:

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^{2} j!\, a_j \varphi_j(x) + \frac{C}{A}\varphi_3(x) \tag{19'$_0$}$$

$$y = a_0 + \sum_{j=2}^{3} j!\, a_j \varphi_j(x) + a_1\left[x + \frac{1}{A}\varphi_4(x)\right]. \tag{19$_0$}$$

Să derivăm expresiile (17') și (17) de i ori:

$$\boxed{y^{(i)} = \sum_{j=0}^{2} j!\, a_j \varphi_j^{(i)}(x) + \frac{C}{A}\varphi_3^{(i)}(x)}, \tag{19'$_i$}$$

folosind relația (18) valabilă pentru $j \geqslant 1$, iar $\varphi(x) = 1$;

și

$$y^{(i)} = \sum_{j=2}^{3} j!\, a_j \varphi_j^{(i)}(x) + \frac{a_1}{A}\varphi_4^{(i)}(x), \tag{19$_i$}$$

valabilă pentru $i \geqslant 2$; pentru $i = 1$ avem:

$$y' = \sum_{j=2}^{3} j!\, a_j \varphi_j'(x) + a_1\left[1 + \frac{1}{A}\varphi_4'(x)\right]. \tag{19$_1$}$$

Derivând de i ori, relația (18) devine:

$$\varphi_j^{(i)}(x) = x^{j-i}\,\Xi_j^{(i)}(x), \tag{18$_i$}$$

în care $\Xi_j^{(i)}(x)$ nu mai înseamnă derivata de ordinul i, ci este definit de relația:

$$\Xi_j^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{i} z^{k-u}(x) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{k-u}(x) \frac{N_j^{k,k-u}}{(j+2k+u-i)!}. \tag{14$_i$}$$

Integrala căutată a ecuației diferențiale (1_0) sau (4), precum și derivatele sale succesive sunt date de relațiile (19) și (19') completate cu (18_i) și (14_i) numerele $N_j^{k,k-u}$ fiind date în tabloul alăturat.

Pe acestea le folosim în problema flambajului tijelor verticale, grele și svelte, pe care o vom desvolta ulterior, fie cu expresia (19'$_i$), sau (19$_i$) după condițiile la limită, sau în orice condiții, ambele expresii pentru verificare; iar metoda folosită poate să-și găsească o largă aplicare la integrarea ecuațiilor diferențiale cu coeficienți variabili.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ В ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ ТЯЖЕЛЫХ И ЛЕГКИХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ШТАНГ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Интегрируется уравнение (1_0) или (4), получающееся из общего уравнения (1) упругой линии легкой и тяжелой вертикальной вращающейся штанги, установленное в (1), причем принимается $\omega = 0$.

Примитивная функция y рассматривается как ряд целых степеней (5_0), производная порядка i которого определяется соотношением (5_i). Вводя это выражение в (10) или (4) и отождествляя, получаем рекуррентную формулу (9), которой можно вычислить последовательные члены рядов (13′) и (13), выражающие искомый интеграл.

Эти ряды можно выражать $(19_0')$ и (19_0) более удобно при помощи функций $\varphi_i(x)$ [соотношение (18_0)], в которых ряды $\Xi(x)$ получаются из соотношения (14), причем $N_j^{k,\,k-u}$ суть числа, получающиеся при помощи рекуррентной формулы (15), и приведены до членов 5-й степени в приложенной таблице.

Последовательные производные от функции y, необходимые при граничных условиях в задаче продольного изгиба тяжелых и легких вертикальных штанг, которые будут разложены в дальнейшем, получаются из соотношений (19_i) и $(19_i')$, дополненных (18_i) и (14_i).

Приведенный метод может найти широкое применение при интегрировании дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DE LA LIGNE ÉLASTIQUE DANS LE PROBLÈME DU FLAMBAGE DES TIGES VERTICALES, LOURDES ET SVELTES

(RÉSUMÉ)

Dans cette Note on fait l'intégration des équations (1_0) ou (4) qui proviennent de l'équation générale (1) de la ligne élastique d'une tige verticale svelte et lourde en rotation, équation générale établie antérieurement [1] et où $\omega = 0$.

L'intégrale est considérée comme une série des puissances entières (5_0) dont la dérivée de l'ordre i est exprimée par la relation (5_i). En introduisant ces expressions dans les relations (10) ou (4) et par identification, on obtient la formule de récurrence (9) au moyen de laquelle on peut calculer les termes successifs des séries (13′) et (13) qui expriment l'intégrale cherchée. On peut exprimer ces intégrales $(19_0')$ et (19_0) d'une manière plus commode à l'aide des fonctions $\varphi_j(x)$ [la relation (18)] dont les séries $\Xi_i(x)$ sont exprimées par la relation (14), $N_j^{k,k-u}$ étant des nombres qu'on obtient par la formule de récurrence (15) et figurent dans le tableau ci-joint jusqu'aux nombres correspondant au terme du cinquième degré.

Les dérivées successives des fonctions y, nécessaires pour les conditions à la limite dans le problème du flambage des tiges verticales, lourdes et sveltes, et qui seront développées ultérieurement, sont exprimées par les relations (19_i) et $(19'_i)$ complétées par (18_i) et (14_i).

Cette méthode peut être utilisée généralement à l'intégration des équations différentielles à coefficients variables.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pârvulescu *Sur les contributions aux flambages et vibrations rotatives des tiges verticales, lourdes et sveltes*. Bull. Sect. Scient. Acad. Roum., t. XXX, Nr. 9 1948, p. 527.

2. — *Asupra instabilității tijelor verticale, grele, svelte și în rotație. Ecuația diferențială a liniei elastice*. Studii și Cercetări de Mecanică, și Metalurgie t. II, 1951, p. 157.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

ASUPRA BARELOR SOLICITATE LA COMPRESIUNE AXIALĂ

DE

CRISTEA NICULESCU

1. TEMATICA

După cum se ştie la calculul barelor supuse compresiunii axiale se aplică în general, în zona elastică, formula lui Euler. In zona plastică, la construcţiile metalice la care ne vom referi în cele ce urmează, s'a ajuns să se aplice aceeaşi formulă, în care se înlocueşte însă coeficientul de elasticitate prin aşa numitul coeficient de plasticitate echivalent. Problema care a provocat şi provoacă însă dificultăţi, este aceea a coeficientului de siguranţă. In zona elastică, s'a trecut dela coeficientul 5, întrebuinţat la începutul secolului nostru, la coeficientul 3,5 şi apoi la coeficientul 2,5 mai întâi în Austria, iar din 1943, şi în Germania. Trecerea dela coeficientul 5 la coeficientul 3,5 s'a făcut odată cu ridicarea rezistenţei admisibile, dela 1100 kg/cm² la 1400 kg/cm². Păstrând proporţionalitatea, coeficientul de siguranţă la flambaj ar fi trebuit să fie redus numai la 4 (aproximativ). Nu ştim prin ce s'a putut justifica această diferenţă întru cât, între timp, formula lui Euler nu suferise nicio schimbare. Trecerea la coeficientul 2,5 nu a corespuns vreunei micşorări a coeficientului de siguranţă la solicitările obişnuite.

Insă, dacă în regiunea elastică formula lui Euler este cea care se bucură de o încredere specială, în regiunea plastică se bucură de o încredere tot aşa de mare formula lui Schwartz. Toate cercetările teoretice care s'au făcut în Germania au tins la justificarea, într'un fel sau în altul, a combinaţiei între curba lui Schwartz continuată cu aceea a lui Euler. In această privinţă citäm proiectul din 1939 cu coeficient de siguranţă unic pornind dela anume excentricităţi [1].

In faţa acestei situaţii ne-am propus să studiem mai amănunţit chestiunea şi să dăm rezultatul cercetărilor noastre.

★

De fapt ecuaţia diferenţială care stă la baza formulei lui Euler este analoagă cu aceea a vibraţiilor simple. Ca şi la aceasta din urmă, se ajunge la o sinusoidă cu amplitudine nedeterminată, care însă din pricina condiţiilor

de margine, nu poate să subsiste decât în cazul când forța de compresiune atinge o anumită valoare; de unde s'a tras concluzia că pentru această valoare, socotită critică, orice amplitudine este posibilă, și deci bara se va încovoia până ce se va rupe. Este această concluzie clasică justă? Credem că nu. După cum formula variațiilor simple lasă amplitudinea nedeterminată, valoarea acesteia fiind determinată de forța care a provocat îndepărtarea dela poziția de echilibru, nici formula lui Euler nu poate determina amplitudinea, ci tot cauza care a provocat îndepărtarea dela poziția de echilibru. Cu alte cuvinte, interpretarea formulei lui Euler ar trebui să fie următoarea: atâta vreme cât sarcina nu a atins valoarea socotită critică, după ce cauza perturbatoare a dispărut, bara revine la poziția inițială, negreșit după o serie de vibrații. Iar pentru valoarea socotită critică, bara rămâne curbată cu amplitudinea datorită cauzei perturbatoare.

Cercetările ulterioare au arătat că, de fapt, atingerea sarcinei din formula lui Euler dă naștere unor nestabilități fie prin faptul că, pentru o creștere mică a sarcinii, efortul unitar crește foarte mult, fie prin faptul că la depășirea ei creșterea săgeților se accelerează din ce în ce mai mult, fie prin faptul că unei creșteri mici a lucrului mecanic exterior îi corespunde o creștere mare a lucrului mecanic interior, din care pricină sarcina dată de formula lui Euler capătă, într'adevăr, caracter de sarcină critică.

Pe de altă parte, o bară solicitată la compresiune axială se poate găsi într'una din următoarele situații:

a) Bara este supusă numai sarcinii axiale.

b) Peste sarcina axială intervine o sarcină perturbătoare transversală.

c) Sarcina perturbatoare dispare, rămânând numai sarcina axială.

Formula lui Euler și toate cele ce s'au dedus din ea se referă numai la cazul *c)*.

Ne-am propus să vedem ce se petrecea în cazul *b)* și anume, luând ca sarcină perturbatoare o sarcină transversală uniform distribuită, p_1, care ar corespunde sguduirilor produse de cutremure sau vehicule. Se știe că, în acest caz amplitudinea nu mai rămâne nedeterminată și are o valoare bine definită. Ca urmare se produc în bară eforturi unitare care se pot calcula. Pentru aceasta avem formula cunoscută a momentului M_n într'o secțiune situată la distanța x dela extremitate.

$$M_x = \frac{1}{2} p_1 x (l - x) + \frac{4p, l^2}{\pi^2} \frac{P}{P_E - P} \sin \frac{\pi x}{l}$$

în care l este lungimea barei.

$P_E = \pi^2 EI/l^2$ (sarcina critică după formula lui Euler) și P compresiunea axială.

Luând $x = \frac{l}{2}$ astfel ca să obținem momentul maxim, punând $p_1 = \beta_p$ (p fiind greutatea pe unitate de lungime a barei) $P_E/P = \alpha$, însemnând cu Ω secțiunea barei, λ coeficientul de subțirime, u distanța dela marginea secțiunii la axa neutră; găsim pentru efortul unitar maxim:

$$\sigma_c = \frac{P}{\Omega} + \beta u \frac{p}{\Omega} \frac{\lambda^2}{8} \left(\frac{\alpha + 2{,}26}{\alpha - 1} \right), \qquad (1)$$

formulă care ne arată că pentru $\alpha = 1$, efortul unitar devine infinit astfel

că sarcina P, nu numai că nu poate să depășească valoarea critică dată de formula Euler, dar nici măcar să o atingă, întru cât *bara se rupe mai înainte*.

Există deci un alt punct critic, situat sub valoarea P_E, astfel că acest al doilea punct critic este cel care hotărăște întru cât este suficientă o cât de mică acțiune transversală asupra barei, pentru ca aceasta să se rupă înainte ca sarcina P să fi atins valoarea P_E.

Este nevoie să ne oprim asupra acestui lucru, deoarece fenomenul flambajului, așa cum îl presupune formula lui Euler, n'a putut să fie realizat nici măcar în laborator (singur C o n s i d è r e a pretins că l-a realizat). R e i n care cu prilejul cercetărilor făcute în vederea redactării normelor din 1922 a luat cele mai minuțioase măsuri pentru asigurarea centrării exacte a barelor, s'a văzut nevoit, pentru a explica rezultatele obținute, să admită că a existat în permanență o excentricitate inevitabilă, datorită constituției însăși a barelor. Această teorie este și astăzi în vigoare. Insă excentricitatea produce fenomene analoage cu sarcinile transversale. Ca și în cazul acestora, amplitudinea este bine determinată. Eforturile unitare devin infinite atunci când $P = P_E$. De ce am da atunci vina pe excentricități, pentru înlăturarea cărora s'au luat toate măsurile posibile, și nu ne-am gândi la sguduiri, care într'adevăr nu pot fi înlăturate. De aceea, ne-am propus să studiem efectul sguduirilor inevitabile [2].

II. EFECTUL SGUDUIRILOR INEVITABILE

Inainte de a intra în miezul chestiunii vom observa că formula (1) ne arată că valoarea lui α se apropie cu atât mai mult de 1.00 cu cât βu se apropie mai mult de zero. Dacă de exemplu presupunem o bară cu secțiune pătrată, cu o latură de 2 cm și $\lambda = 100$, dacă mai presupunem $\beta u = 0{,}005$ găsim pentru α valoarea 1,00046, adică foarte aproape de 1.00. Aceasta explică de ce în laborator, unde se lucrează cu bare de dimensiuni mici și unde se caută să se evite cât mai mult sguduirile, punctul critic datorit acestora se apropie foarte mult de cel dat de formula lui Euler. Dacă presupunem însă $\beta = 0{,}1$ și $u = 30$ cm găsim pentru α valoarea 1.162, adică primul punct critic datorit sguduirilor scoboară, aflându-se la 86 %, din cel dat de formula lui Euler.

Concluziile trase din cele ce se petrec în laborator nu pot fi transpuse *tale quale* în practică.

Aici mai este locul să atragem atenția asupra unui lucru: valoarea $\pi^2 EI/l^2$ a intrat în formula (1) din simple considerații de valoare a săgeții în momentul aplicării sarcinii transversale. Formula (1) este valabilă atâta vreme cât suprapunerea sarcinii transversale peste cea axială dă un efort unitar care nu depășește limita de curgere, așa ca să putem aplica legea lui Hooke. Prin urmare, formula (1) este valabilă indiferent de valoarea lui $\pi^2 EI/l^2$ cu singura condiție ca σ_c dat de ea să nu depășească limita de curgere. In practică ne vom putea servi așa dar de formula (1), punând $\sigma_c = 2.400$ kg/cm² și aplicând apoi lui α coeficientul de siguranță unic 1.712, pe care-l aplicăm atunci când admitem pentru rezistența admisibilă 1400 kg/cm² (negreșit în cazurile când mergem până la 1600 kg/cm², coeficientul de siguranță ar fi numai 1.5). Prin aceasta se rezolvă și chestiunea coeficientului de siguranță, chestiune rămasă nerez lvată atunci când se aplică formulele obișnuite (afară de aceea a lui Schwartz).

★

In aceste condiții, din formula (1) scoatem ecuația

$$(2400 - \gamma)\,\alpha^2 - (2400 + \sigma_E + 2.26\,\gamma) + \sigma_E = 0 \qquad (2)$$

(unități kg și cm)
în care

$$\gamma = \beta u \frac{p}{8\Omega} \lambda^2$$

și

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 EI}{\Omega l^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Formula (2) ne arată că α și deci *și aceea ce s'a numit rezistența admisibilă la flambaj, depinde nu numai de coeficientul de subțirime* λ, *ci și de produsul* βu. *Reiese deci că în practică va fi nevoie să ținem seama în fiecare caz în parte și de valorile lui* β și u.

Pentru a putea face o comparație cu formulele folosite până acum, vom da, în cele ce urmează, lui βu valori pe care le socotim acoperitoare în cazurile normale și vom căuta să vedem ce se întâmplă.

★

In ceea ce privește podurile, am presupus $\beta = 0{,}10$ și $\beta = 0{,}05$, corespunzător sguduirilor produse de un cutremur de gradul IX, respectiv VIII. Aceleași valori urmează să fie aplicate și la construcțiile metalice situate în regiunile bântuite de cutremure de gradele respective. Pentru construcțiile metalice, situate în regiunile unde cutremurele nu depășesc gradul VI, putem lua $\beta = 0{,}005$ corespunzător limitei superioare a gradului V (presupunând că, în cazul cutremurelor de gradul VI, admitem rezistențe sporite până la 1600 kg/cm²). De obiceiu, se admite că sdruncinăturile produse de vehiculele care trec pe stradă echivalează cu un cutremur de gradul V. La podurile din regiunile aseismice nu am putea reduce valorile lui β, atât din motivul că, până acum, nu am putut ajunge să stabilim intensitatea sguduirilor produse de sarcinile mobile, cât mai ales din motivul că podurile pot fi demontate și remontate în alte regiuni decât cele pentru care au fost dimensionate primitiv.

Cât privește valoarea lui u, am admis peste tot 30 cm, ceea ce presupune un profil simetric de 60 cm. Pentru valorile mari ale lui λ, această ipoteză este mult acoperitoare. De exemplu, pentru ca să ajungem la $\lambda = 200$, cu un profil normal *I*, ar trebui să avem o lungime de flambaj de 46,80 m, ceea ce în orice caz ar fi un lucru excepțional, fără a vorbi de o altă împrejurare, a lungimii admisibile, de care vom vorbi în partea a IV-a a studiului nostru. Cu aceste ipoteze și luând drept coeficient de siguranță 1.72, am tras pe diagrama din figura 1 curbele rezistențelor admisibile la flambaj în ipotezele $u = 30$ cm și $\beta = 0.10$ (cutremur de gradul IX), $\beta = 0{,}005$ (construcții metalice în regiuni aseismice). Iar pentru comparație am tras și curba rezistențelor admisibile după normele sovietice pentru poduri de șosea și construcții metalice.

Din diagrama din figura 1 se vede mai întâi că forma generală a curbelor este cea a curbelor admise în mod curent de normele în vigoare,

care pentru ca să ajungă la o astfel de formă sunt silite, atunci când nu folosesc pe față curba lui Schwartz, să jongleze cu coeficientul de siguranță.

Se mai vede că, înafară de $\beta = 0.10$ dela $\lambda = 200$ în sus, toate curbele sunt situate deasupra curbei sovietice. Deoarece pe de altă parte, după cum am spus, însăși ipoteza $u = 30$ cm este mult prea acoperitoare pentru valo-

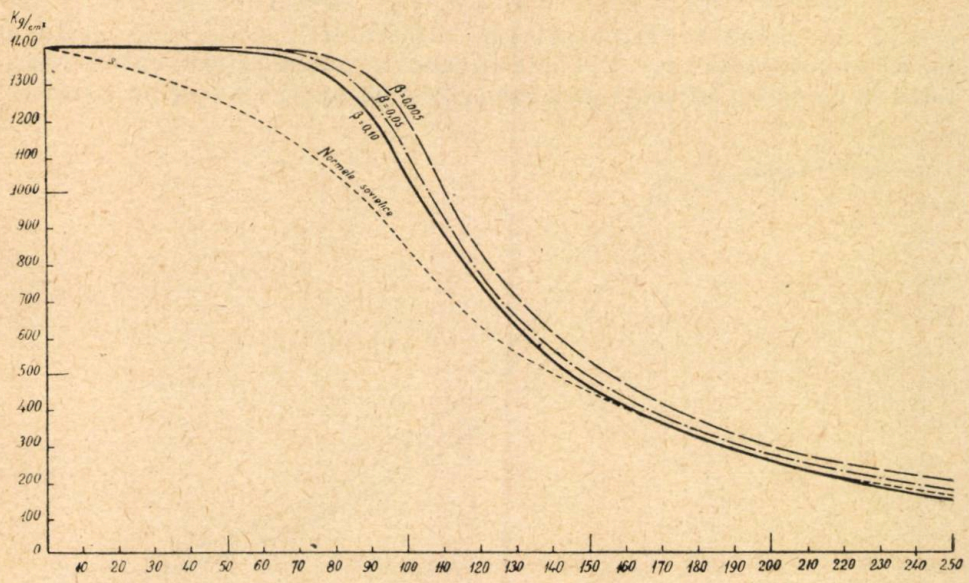


Fig. 1

rile mari ale lui λ, reiese că față de normele sovietice, tot mai avem un spor posibil al rezistențelor admisibile de flambaj, în special în jurul lui $\lambda = 100$, acolo unde se situează de obiceiu piesele comprimate din construcțiile moderne.

III. EFECTUL EXCENTRICITĂȚILOR

Se știe că, de când cu experiențele lui R e i n , se dă o deosebită importanță excentricităților. Pentru a lămuri chestiunea am introdus pe lângă efectul sguduirilor, pe acela al excentricităților.

Intru cât formulele exacte conduc la ecuații a căror rezolvire este foarte dificilă, pentru efectul excentricităților am folosit formula simplificată

$$\sigma_e = \frac{\sigma_E}{\alpha}\left[1 + m\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right],$$

în care m este coeficientul de excentricitate

$$m = \frac{eu}{i^2}$$

e fiind excentricitatea și i raza de giratie.

Am arătat în altă parte [3] că rezultatele date de această formulă simplificată, pe care de altfel o găsim și în normele sovietice pentru poduri de șosea, diferă foarte puțin de cele date de formula exactă.

Introducând atunci și excentricitatea, ecuația pentru determinarea lui α devine

$$(2400 - \gamma)\,\alpha^2 - [2400 + (1 + m)\,\sigma_E + 2{,}26\gamma]\,\alpha + \sigma_E = 0 \qquad (3)$$

ecuație care diferă de (2) numai prin coeficientul $(1 + m)$, în loc de 1,0 al lui σ_E din paranteza mare. Din această cauză ne putem aștepta ca excentricitatea să nu aibă o influență prea mare, față de cazul când ea nu intervine.

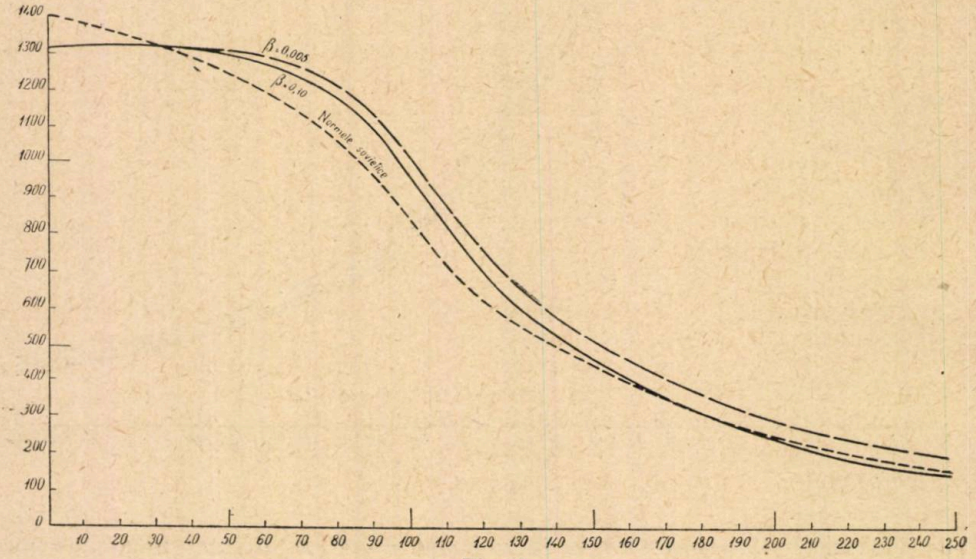


Fig. 2

Se pune atunci chestiunea valorii coeficientului de excentricitate m. In mod normal, ar trebui să luăm pentru m valorile ce reies din toleranțele la execuție admise de caietele de sarcini; se știe că de obiceiu se admite 1 mm. Insă, întru cât s'a pus chestiunea depășirilor în realitate a toleranței, am luat acoperitor $m = 0{,}05$ față de 0,0042, care ar reieși pentru toleranța de 1 mm în cazul profilului *IP* 60, sau 0,0055 în cazul profilului *IN* 60. Adică am presupus o excentricitate din execuție de 1,0 cm, ceea ce credem că este mai mult decât acoperitor. Cu aceste elemente am tras pe diagrama din figura 2 curbele rezistențelor admisibile la flambaj cu excentricitatea în cazul lui $\beta = 0{,}10$ și $\beta = 0{,}005$, iarăși în comparație cu cele admise de normele sovietice. Nu am mai luat în considerare $\beta = 0{,}05$, întru cât din diagrama din figura 1 a reieșit că diferențele între $\beta = 0{,}10$ și $\beta = 0{,}05$ nu sunt prea mari, iar dacă ținem seama de excentricități, diferențele se reduc și mai mult. Pentru un studiu general, ipoteza $\beta = 0{,}05$ poate fi înlăturată.

Constatăm și de data aceasta că, înafară de $\beta = 0{,}10$ cu $\lambda > 200$ și că, înafară de toate ipotezele sub $\lambda = 30$, curbele noastre se situează mai sus de curba sovietică.

★

Știm că normele sovietice au ținut și ele seama de excentricități, însă nu avem prea multe date în această privință. Singurele date le-am găsit în O t r e ș c o [4] după care reproducem în diagrama din figura 3 valoarea celor doi coeficienți φ' (fără excentricitate) și φ'' (numai excentricitate), din înmulțirea cărora reiese împărțitorul de flambaj φ introdus în norme (se știe că normele sovietice împart cu coeficientul φ, pe când cele germane înmulțesc cu ω). Cu alte cuvinte, coeficientul φ'' reprezintă influența excentricității în procente din rezistențele admisibile la flambaj fără excentricitate.

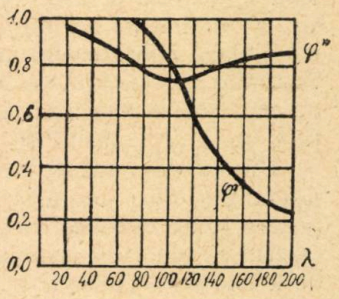


Fig. 3

Din diagrama din figura 3 constatăm mai întâi că normele sovietice au admis, în cazul când nu este excentricitate, procedeul folosit de R i t t e r și M ö r s c h la stâlpii de beton armat, care au ridicat curba lui Schwartz (de altfel se constată același procedeu și prin introducerea unor porțiuni de racordare între curba lui Schwartz și Euler, ceea ce explică descreșterea coeficientului de siguranță calculat față de Euler dela $\lambda = 100$, la $\lambda = 150$, de unde rămâne constant 2,05).

Pentru a compara efectul excentricității am tras pe diagrama din figura 4 coeficientul calculat după procedeul nostru, în cazul $\beta = 0{,}10$ și $\beta = 0{,}005$ față de cel dat de O t r e ș c o pentru normele sovietice. Deși bazele de calcul diferă, constatăm mai întâi o oarecare similitudine de aspect: o creștere către $\lambda = 100$, de unde începe scăderea bruscă la noi, mai lentă la normele sovietice. De asemenea, în general, influența excentricității este mai mare la normele sovietice (maximum 27% față de maximum 18% pentru $\beta = 0{,}005$ la noi).

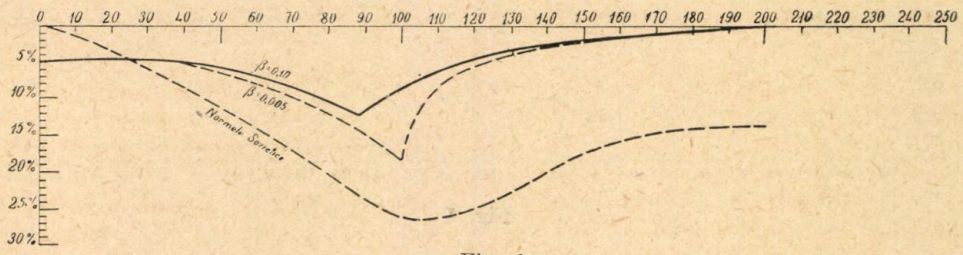


Fig. 4

In ceea ce privește procentele ce reies din formulele noastre, observăm că influența excentricității crește cu scăderea lui β, însă această creștere a influenței excentricității merge mult mai încet decât scăderea lui β. Astfel, pentru o scădere a lui β dela 0,10 la 0,005 sau cu 95%, avem o creștere procentuală dela 12 la 18, sau numai de 50%. Mai observăm că, după calculele noastre pentru $\lambda \geqslant 200$, influența excentricității poate fi socotită ca neglijabilă, negreșit în ipotezele ce am considerat, în special a lui $m = 0{,}05$. Este evident că, dacă ipotezele se modifică și rezultatele vor fi altele. Dacă m se va mări, scăderea procentuală va trebui să crească. Însă această ipoteză va presupune și o scădere a lui u, ceea ce va aduce o creștere a rezistenței admisibile la flambaj fără excentricitate.

De exemplu, dacă în locul unui profil *I* 60, vom presupune o cornieră 60 × 60/8 cu $u = 4{,}2$ cm, luând o excentricitate tot de 1,0 cm vom avea $m = 0{,}56$. Păstrând $\beta = 0{,}10$ și $\lambda = 200$, găsim o scădere procentuală de 12,7%, însă aplicabilă la 292 kg/cm², ceea ce ne dă pentru rezistența admisibilă cu excentricitate 255 kg/cm², mai mult decât 249 kg/cm² găsită în cazul lui $u = 30$ cm considerând mai înainte și decât 252 kg/cm² după normele sovietice. Mai menționăm că așa cum reiese din diagrama din figura 4, scăderea procentuală corespunzătoare la $\lambda = 200$ este după normele sovietice de 14% față de 12,7% găsită de noi în același caz.

Din cele de mai sus reiese că influența excentricității nu poate fi socotită numai față de o anumită curbă a rezistențelor admisibile la flambaj, aceeași pentru toate cazurile, ci în fiecare caz în parte trebue ținută legătura între efectul sarcinei transversale și al excentricității. Mai reiese că putem considera cele două curbe trase de noi în diagrama din figura 2, care țin seama de influența excentricității, ca acoperitoare.

★

Constatările de mai sus ne permit să facem unele ipoteze asupra modului în care au fost luate în considerare excentricitățile la întocmirea normelor sovietice, fapt care are o oarecare importanță în legătură cu discuțiile ce au urmat în jurul admiterii acestor norme și în țara noastră.

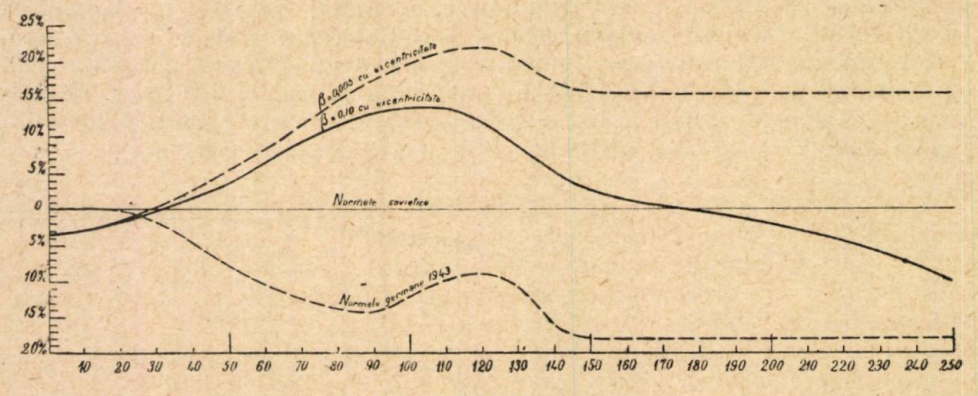


Fig. 5

Din Otreșco [4] aflăm că în normele sovietice s'a ținut seamă de excentricitățile accidentale, a căror influență a fost apreciată prin calcule de probabilitate. In ce au putut consta aceste calcule de probabilitate? Tot Otreșco [4] spune că excentricitățile accidentale sunt de două feluri: unele provin din neomogenitatea structurii materialului, neconcordanța axei geometrice cu axa de inerție, datorită acestei neomogenități, ușoara încovoiere a elementului, etc., altele sunt datorate imperfecțiunii mijloacelor de solidarizare ale capetelor barei, așa zisele *excentricități constructive*. Prin urmare, la întocmirea normelor sovietice, s'a căutat să se țină seama și de excentricitățile, pentru a căror înlăturare se luaseră măsurile cuvenite, în încercările lui Rein. Insă după cum reiese din exemplele date de Otreșco [4], excentricitățile constructive pot căpăta o importanță covârșitoare. Astfel, dacă avem în vedere cornierele de 60 × 60/8, de care ne-am ocupat

mai sus, şi dacă presupunem că nituirea se face, ca de obiceiu, pe axa aripei, găsim, după modul dat de O t r e ş c o, de a considera chestiunea o excentricitate 1,2 cm faţă de axa centrului de greutate, care depăşeşte chiar excentricitatea de 1,0 cm luată de noi în calcule şi care dădea 0,56, pe când, dacă avem în vedere un profil *I*, excentricităţile constructive se înlătură.

Acesta poate să fie un domeniu important pentru calculul probabilităţilor: considerarea profilelor care pot interveni la diferite valori ale coeficientului de subţirime şi excentricităţilor corespunzătoare. Căci excentricităţile datorite neomogenităţii nu pot avea o importanţă apreciabilă. Putem presupune o deplasare de ordinul a 1,0 cm a centrului de greutate real al unei corniere de 60 × 60/8, sau chiar a unui profil *I*, 60? Putem presupune o deplasare de acelaşi ordin prin execuţie, atunci când toleranţa admisă este numai de 1 mm?

Pe de altă parte, mărturisim că nu prea vedem cum s'ar putea determina excentricităţile probabile datorite neomogenităţii, sau chiar execuţiei.

Pentru execuţie ar trebui să se facă măsurători de precizie pe găuri, înainte de nituire, măsurători făcute în număr suficient de mare şi răspândite pe întreg teritoriul U.R.S.S., şi dacă aceasta ar fi posibil — negreşit cu cheltuieli de bani şi timp, corespunzătoare — cum se pot constata excentricităţile datorite neomogenităţii materialului? Aceasta, încă odată, atunci când excentricităţile constructive sunt acelea care predomină şi pot fi într'adevăr luate în consideraţie în calcule, după cum pot fi luate în consideraţie, tot prin calculul probabilităţilor, toleranţele admise la execuţie.

★

Se pune însă o altă chestiune: în ce măsură trebue să introducem în calcule excentricităţile şi în special pe cele constructive? Căci aceleaşi excentricităţi intervin şi la barele întinse, iar la acestea, nu ţinem seamă de excentricităţi, deoarece ele rămân să fie acoperite de coeficientul de siguranţă. Dacă luăm aceeaşi cornieră de 60 × 60/8 cu aceeaşi excentricitate de 1,0 cm şi cu celelalte elemente luate mai sus (înafară de efectul forţelor orizontale), supusă însă la tensiune, găsim că excentricitatea reduce efortul unitar admisibil dela 1400 kg/cm² la 1230 kg/cm², deci cu 10,0%, adică un procent important din scăderea procentuală de 12,7%, găsită în cazul compresiunii. Rezultă încă odată că putem considera cele două curbe trase de noi, ţinând seama de excentricitate ca acoperitoare. De altfel, şi diagramele din figurile 3 şi 4 ne arată că normele în vigoare nu ţin seama, chiar la flambaj, de unele excentricităţi. Astfel, până la $0 = 30$, curba sovietică este situată deasupra curbelor cu excentricitate din diagrama din figura 3.

Este încă o latură a problemei de care, dacă se ţine seama, se poate ajunge fie la o sporire a unor rezistenţe admisibile la flambaj, fie la o reducere generală a coeficientului de siguranţă.

Să revenim acum la formula lui Schwartz asupra *barelor solicitate la compresiune axială* care, după cum am văzut, se bucură de o mare favoare la mulţi tehnicieni. Este adevărat că această favoare este întrucâtva justificată, căci, dacă din punct de vedere teoretic formula este foarte criticabilă, faptul că aplicarea ei fără a fi dat naştere la accidente, atâta timp şi în atâtea ţări, îi dă consacrarea practicei, pune negreşit chestiunea, dacă ea nu este prea mult acoperitoare. Acest lucru vom căuta să-l vedem.

Se știe că formula lui Schwartz presupune că bara supusă la forță axială a căpătat o săgeată totală f datorită combinării acțiunii compresiunii axiale cu forțele perturbatoare. Cu alte cuvinte, se dă o valoare anumită amplitudinii care în formula lui Euler rămâne nedeterminată. Se pune atunci

$$\frac{fu}{i^2} = \eta \lambda^2,$$

în care

u este distanța dela fibra marginală la axa neutră;

i este raza de giratie;

λ este coeficientul de subțirime;

η este un coeficient ce rămâne a se determina și care la oțel se ia $\eta = 0{,}0001$;

Formula de mai sus poate fi scrisă

$$\eta = \frac{f}{i} \cdot \frac{u}{i}$$

Dacă luăm $f/l = 1/500$ și $u/l = \frac{1}{20}$ găsim tocmai valoarea

$$\eta = 1/10.000$$

De unde ar reieși că s'a ajuns la valoarea lui η luând pentru f/l valoarea medie ce se ia de obiceiu la astfel de grinzi.

Este evident că această ipoteză este cu totul nejustificată la piesele supuse la compresiune axială. După cum la grinzile supuse la încovoiere simplă, săgeata depinde de încărcare, tot astfel la piesele supuse la compresiunea axială va depinde, în primul rând, de forța perturbatoare. Iar valoarea de 1/500, fixată ca un maxim, admisibilă la grinzile supuse la încovoiere, nu poate avea nicio legătură cu săgeata reală luată de o piesă supusă la compresiune axială. De asemenea, raportul între înălțimea piesei comprimate și lungimea ei nu poate atinge valoarea 1/10 decât în cazuri excepționale.

Dacă luăm de exemplu un stâlp compus din două fiare U tip 30 și înalt de 6,00 m (ceea ce dă $\lambda = 51$, avem $\frac{l}{u} = 40$; deci ar urma, celelalte condiții rămânând egale, $\eta = 1/20.000$. Dacă am avea o diagonală de fermă din corniere $60 \times 60/6$ cu lungime de 3,70 m (ceea ce dă $\lambda = 202$) avem $l/u = 86$. Deci și mai mult. Prin urmare, chiar dacă ar admite ca bună valoarea 1/500, găsim că valoarea $\eta = 1/10.000$ este exagerată.

Dacă ținem seama de ambii factori, găsim că fiarele U considerate vor trebui să capete o săgeată de 24 mm, iar cornierele 31,7 mm, săgeți care apar în mod evident exagerate. In consecință, putem spune că valoarea $y = 1/10.000$ este într'adevăr acoperitoare, dar mult prea acoperitoare.

Coeficientul β din formulele de mai sus introduce în mod obiectiv influența eforturilor transversale, iar influența dimensiunilor secțiunii este introdusă cu ajutorul dimensiunii u, pe care am luat-o chiar prea acoperitoare pentru unele cazuri. De asemenea, am introdus și influența excentricității, fără a

ține seama de partea acoperită de coeficientul de siguranță în cazul tensiunii. Așa încât putem spune că și rezultatele noastre sunt acoperitoare.

Calculul comparativ arată că cea mai acoperitoare curbă a noastră de rezistențe admisibile la flambaj ($\lambda = 30$ cu excentricitate) se prezintă astfel față de curba lui Schwartz:

La $\lambda = 10$ și 20, din pricina excentricităților, trece pe dedesubt cu 5%, respectiv 3,1‰. După aceea se urcă, ajungând la o depășire de 31,5% la $\lambda = 70$, 38,5% la $\lambda = 90$, de unde începe să scadă, trecând prin 29,2 la $\lambda = 110$. La $\lambda = 165$, curba noastră trece sub curba lui Schwartz.

După cum am arătat, pentru λ mare, ipoteza noastră $u = 30$ cm este mult prea acoperitoare. Așa că, de fapt, putem socoti că și aici curba, socotită pe baza sguduirilor inevitabile, se ridică deasupra curbei lui Schwartz.

In orice caz, normele sovietice se dovedesc a fi acoperitoare.

IV. LIMITAREA LUNGIMII DE FLAMBAJ

In problemele așa zise de flambaj, un loc ce merită importanță, îl ține coeficientul de subțirime maxim admis pentru diferite elemente de construcție. Se știe că stabilirea acestui λ maxim se face din sentiment. Nimeni nu poate spune, de ce admite o valoare sau alta. Dacă admitem însă procedeul propus de noi, trebue să ne gândim și la rezonanță.

In general, forța excitatoare, fie ea un cutremur, fie sguduiturile produse de vehicule, se repetă. In cazul cutremurelor, autorii sovietici au arătat că nu poate fi vorba de o excitare armonică al cărui rezultat să fie o rezonanță. In cazul podurilor, deși loviturile se produc ritmic, ele sunt însă limitate ca număr și se produc în locuri diferite, așa încât, pe de o parte, sguduirile rezultate nu pot avea caracterul armonic, iar pe de altă parte, efortul unitar în piesă nu capătă valoarea maximă decât o singură dată, după care el descrește.

La construcțiile metalice, efortul unitar maxim este de durată, însă, dacă este vorba de sguduirile produse de vehicule, rămân celelalte împrejurări. Dacă însă avem de a face cu vibrații produse de mașini, atunci putem avea și efort unitar maxim de durată și excitații armonice, astfel încât se pot realiza condițiile rezonanței. De aceea, trebue să tratăm separat celelalte cazuri de cazul vibrațiilor de mașini, lucru care nu se face. In cele ce urmează nu ne vom ocupa de vibrațiile produse de mașini, care nu pot fi concentrate în cazuri generale. Chiar în cazul când nu există condițiile obiective pentru producerea fenomenului de rezonanță, credem că este cazul să aplicăm metoda folosită la cutremure de normele sovietice, anume de a socoti drept măsură a rigidității frecvența vibrațiilor proprii și de a pune condiția ca aceasta să fie diferită de aceea a sarcinii excitatoare. In această privință, avem rezultatele la care a ajuns P u w e i n [5], reluate de S t. B ă l a n [6]. Se ajunge anume pentru frecvența circulară proprie la valoarea

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}\sqrt{1-\frac{\sigma_e}{\sigma_E}}$$

în care μ este massa unității de volum $\mu = \frac{\Omega\gamma}{g}$, γ fiind greutatea specifică a materialului și g accelerația gravității. Celelalte notații au semnificările cunoscute.

Punând:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_E}}$$

$$\gamma = 0{,}0078 \text{ kg/cm}^2$$

$$g = 9{,}81 \text{ cm/sec}^2$$

$$F = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$$

însemnând cu f frecvența proprie și înlocuind pe I cu Ωi^2, găsim

$$f = \frac{805\,000}{l\lambda}\eta$$

In cazul cutremurelor avem pentru frecvența excitatoare aproximativ $= 1$, iar în cazul vehiculelor putem lua $f = 5$ așa încât ne putem da condiția

$$f > 5$$

deci,

$$\frac{805\,000}{l\lambda}\eta > 5$$

de unde

$$l < \frac{161\,000}{\lambda}\eta$$

Ajungem, prin urmare, nu la o limitare a coeficientului de subțirime, ci a lungimii de flambaj în funcție de coeficientul de subțirime și de efortul unitar efectiv.

Dacă punem

$$\eta_a = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{af}}{\sigma_E}}$$

σ_{af} fiind, așa cum am spus, rezistența admisibilă la flambaj, formula

$$l_a = \frac{161\,000}{\lambda}\eta_a$$

ne dă lungimea sub care trebue să fie aceea a barei pentru un anumit coeficient de subțirime, atunci când o dimensionăm pentru rezistența admisibilă la flambaj. Dacă ne scoborîm sub această rezistență admisibilă, lungimea poate crește negreșit până la $\sigma_e = 0$, așa ca $\eta = 1$, când dăm peste frecvența vibrațiilor proprii ale barei nesolicitate axial.

In tabloul care urmează, dăm lungimile sub care ar trebui să rămânem, atât în cazul $\beta u = 3{,}00$ (poduri şi construcţii metalice în regiuni seismice), cât şi în cazul $\beta u = 1{,}5$ (construcţii metalice în regiuni aseismice).

λ	βu=3,00	βu = 1,5	λ	βu =3,00	βu = 1,5
40	**38,20**	38,20	190	6,10	5,35
50	**29,80**	29,70	200	5,80	5,25
60	22,00	21,90	210	5,50	5,05
70	19,40	19,30	220	5,35	4,80
80	16,10	15,95	230	5,15	4,60
90	13,94	13,42	240	4,95	4,40
100	11,80	11,50	250	4,80	4,25
110	10,60	10,00			
120	9,75	9,10			
130	9,15	8,30			
140	8,15	7,65			
150	7,55	7,20			
160	7,15	6,60			
170	6,75	6,25			
180	6,45	5,90			

Din acest tablou reiese un fapt la care trebuia să ne aşteptăm, deşi în contradicţie cu ideile obişnuite, anume că lungimile admisibile pentru construcţiile metalice ar trebui să fie mai mici decât pentru poduri, diferenţele fiind cu atât mai mari, cu cât λ este mai mare. Aceasta din pricină că σ_{af} este mai mare la construcţiile metalice decât la poduri.

Pentru a ne da seama de rezultatele la care se poate ajunge pe această cale, să luăm o diagonală de pod cu o lungime de flambaj de 8,50 m (corespunzând unor panouri de 6,00 m cu înălţimea teoretică a grinzii tot de 6,00) şi cu $\lambda = 150$, adică la limita admisă de normele germane. Din tablou se vede că, în cazul rezistenţelor admisibile la flambaj, socotite după metoda propusă de noi, lungimea ar trebui să fie sub 7,55 m. Cu rezistenţele admisibile la flambaj după normele sovietice, lungimea ar trebui să fie sub 7,64 m, iar cu cele din normele germane sub 8,30. Reiese că, chiar cu rezistenţele admisibile la flambaj după normele germane, bara nu ar avea o rigiditate suficientă şi că ar trebui ca efortul unitar să fie sub cel admis de normele germane. Dacă presupunem $\lambda = 130$ şi σ_{af} din normele sovietice, găsim că lungimea trebue să fie sub 9,20 m. Din acest punct de vedere, limitarea în general a lui λ la 130 din normele sovietice apare raţională, întru cât panouri de 6,00 nu pot fi un lucru excepţional. Negreşit, dacă am avea panouri de 6,50 m sau mai mari (în care caz lungimea de flambaj ar fi de 9,20 m sau mai mare) nici limitarea lui λ la 130 nu ar mai fi suficientă. De aceea, am spus că limitarea lui λ nu este suficientă, decât în anumite limite.

In cazul când impulsiunea vine dela maşini cu turaţie mare, trebue să luăm pentru f o valoare mai mare decât 5. In acest caz, s'ar putea să fie nevoie să ne încadrăm sub $f = 5$, ceea ce ar da naştere la unele dificultăţi. In orice caz, trebue cercetat fiecare caz în parte.

CONCLUZIUNI

Din cauza sguduirilor inevitabile, piesele supuse la compresiune axială ating un punct critic, datorită scurgerii materialului, înainte de a atinge pe cel care reiese din formula lui Euler. Aplicând metoda compresiune-flexiune,

ne situăm în cazurile obișnuite, când trebuia să luăm măsuri să nu se depășească limita de curgere, ceea ce rezolvă și chestiunea coeficientului de siguranță unic. Cu această metodă, putem stabili pentru cazurile obișnuite, curbe acoperitoare ale rezistențelor admisibile la flambaj, care au aspectul curbelor la care ajung de obiceiu normele, silite de multe ori să jongleze cu coeficientul de siguranță. In cazuri excepționale, rămâne să aplicăm de fiecare dată formulele.

Metoda permite să se țină seama de eventualele excentricități. Curbele influenței procentuale a excentricităților au și ele aspectul curbei folosite de normele sovietice. Ele arată că influența excentricităților crește până către $\lambda=100$, de unde începe să scadă pentru ca, în cazurile considerate, să devină neglijabilă către $\lambda = 200$. Dacă ținem seama de partea care, și în cazul tensiunii este acoperită de coeficientul de siguranță, influența excentricităților devine și mai mică. Introducând în întregime influența excentricităților, găsim, afară de cazul podurilor pentru $\lambda \geqslant 180$, că normele sovietice tot mai prezintă o rezervă, în special către $\lambda = 100$, rezervă cu atât mai mare, cu cât sguduirile sunt mai puțin intense și cu cât secțiunea are o înălțime mai mică și care poate depăși 20%. In orice caz, la construcțiile metalice în regiuni aseismice, ne putem bizui pe cel puțin 15%. Metoda permite să se rezolve și chestiunea rezistenței minime; ținând seama de frecvența proprie în raport cu cea a sguduirilor, se constată că sistemul empiric de a limita coeficientul de subțirime nu este just și că pentru fiecare λ există o lungime ce nu trebue depășită. Intr'o oarecare măsură, această lungime poate fi depășită, însă cu condiția ca să se reducă rezistența admisibilă la flambaj. Calculele comparative arată că există cazuri care se pot întâlni, când pentru $\lambda = 150$, admis de normele germane ca limită la barele de poduri, rezistența admisibilă la flambaj dată de aceste norme ar trebui micșorată, lucru ce nu se întâmplă, dacă limita se ridică la $\lambda = 130$, ca în normele sovietice. Din acest punct de vedere, coeficientul de siguranță, folosind normele germane, este acela care în anumite cazuri apare ca fiind prea mic.

О БРУСЬЯХ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ОСЕВОМУ СЖАТИЮ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматривается промежуточное состояние, когда брус, подверженный осевому сжатию, испытывает еще поперечную нагрузку, после снятия которой брус переходит в состояние, изучающееся с точки зрения устойчивости.

Допуская некоторые гипотезы о величине неизбежных поперечных нагрузок и размерах поперечного сечения и учитывая вероятные эксцентричности монтирования, приходят к заключению, что советские нормы для металлических конструкций и дорожных мостов представляют достаточный запас прочности, который для некоторых значений коэффициента тонкости можно еще уменьшить. Из условия, что собственная частота брусьев не должна достигать некоторого значения, приходят к заключению, что для всякого коэффициента тонкости существует определенная длина, которую не следует превышать, в противном случае надлежит уменьшить допускаемое напряжение.

SUR LES BARRES SOLLICITÉES PAR LA COMPRESSION AXIALE

(RÉSUMÉ)

On a considéré la situation intermédiaire, où une barre soumise à la compression axiale est actionnée en plus par des forces transversales, la barre passant après leur disparition dans la situation que l'on étudie du point de vue de la stabilité.

En faisant certaines hypothèses sur la valeur des forces transversales inévitables et sur les dimensions de la section transversale et en tenant compte des excentricités probables, on est arrivé à la conclusion que les normes soviétiques en vigueur pour les constructions métalliques et les ponts-routes présentent un coefficient de sécurité suffisant qui, pour certaines valeurs de la sveltesse, pourrait être encore diminué. De la condition que la fréquence propre des barres ne doit atteindre certaines valeurs, on arrive à la conclusion que pour chaque sveltesse il existe une longueur déterminée ne devant pas être dépassée, sinon, l'effort admissible doit être réduit.

BIBLIOGRAFIE

1. Cristea Niculescu, *Calculul pieselor supuse la flambaj după prescripțiile germane.* Bul. Soc. Politehnice, Iunie 1937, p. 502.
2. — *Asupra flambajului.* Bul. Soc. Politehnice din București, Mai-Decembrie 1948, p. 123.
3. — *Asupra barelor supuse la compresiune și flexiune.* Bul. Soc. Politehnice, Septembrie 1940, p. 829.
4. Otrești co, *Construcții metalice* (traducere). ODEP, 1950, v. I, p. 39, 40.
5. Puwein, *Verminderung der Knicklast eines Stabes durch Querschwingungen.* Bauingenieur, 1939, Nr. 1, p. 14.
6. St. Bălan, *Contribuțiuni la flambajul barelor drepte supuse la vibrații transversale* Teză de doctorat. Fac. de Construcții, București, 1945.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

APLICAREA CRITERIILOR DE PLASTICITATE ÎN CAZUL GRINZILOR ÎNCOVOIATE

DE

AL. STOENESCU

GENERALITĂŢI

Rezistenţele produse în elementele unei construcţii oarecare variază sub acţiunea încărcărilor. Pentru încărcări mici, deformaţiile pot fi considerate elastice, iar rezistenţele, proporţionale cu deformaţiile. Mărindu-se încărcările, starea de deformaţii elastice se transformă într'o stare de deformaţii plastice; rezistenţele cele mai mari se fixează la limita de curgere a materialului, iar cele mai mici continuă să crească, suportând supraîncărcarea şi căutând astfel să uşureze situaţia celor mai obosite molecule.

Această tendinţă de egalizare a rezistenţelor prin trecerea materialului de construcţie în stare plastică constitue fenomenul de adaptabilitate (fenomen care precede întotdeauna distrugerea elementului de construcţie).

Prin studiul în domeniul plastic şi prin aplicarea adaptabilităţii se ajunge la determinarea stadiului critic al întregei construcţii şi se poate stabili un coeficient de siguranţă general al construcţiei.

De aici rezultă, pe de o parte, o apropiere de modul real de comportare sub încărcări al unei construcţii şi, pe de altă parte, realizarea unei economii de material apreciabile.

In cadrul acestor consideraţii generale, s'a prevăzut la Institutul de Siderurgie, Metalurgie şi Mecanică Aplicată studiul temei:

Studiul rezistenţei materialelor în domeniul plastic cu subtema:

Studiul încovoierii plastice sub încărcări statice, coeficient de adaptabilitate pentru profilele laminate standardizate la noi în ţară.

Prin studiul acestor probleme se urmăreşte realizarea economiilor de material metalic în construcţii.

★

Conform literaturii de specialitate cercetate, studiul încovoierii plastice cuprinde cazul izolat al încovoierii sub acţiunea rezistenţelor normale pe secţiune (σ_x), ţinându-se rareori seama de rezistenţele de lunecare (τ) şi ne-

glijându-se rezistențele normale pe planul median neutru (σ_y); criteriile generale de plasticitate nu se aplică.

In cele ce urmează, am căutat să considerăm cazul general pentru o bară rectilinie, metalică, de secțiune dreptunghiulară, având în vedere acțiunea simultană a rezistențelor plane (σ_x, σ_y, τ).

Ipotezele de bază ale calculului sunt cele clasice, și anume:

1. Curbă caracteristică (σ, ε) Prandtl, conform figurii 1.

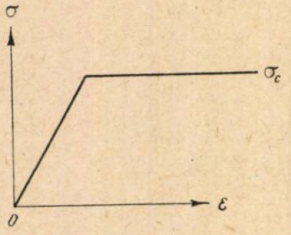


Fig. 1

2. Secțiunile plane ale barei rămân plane după încovoiere (B e r n o u l l i, N a v i e r).

3. Materialul este omogen, cu aceleași calități la tensiune și compresiune (profile laminate de oțel).

Starea de rezistențe în secțiunea elasto-plastică a barei trebue să satisfacă ecuațiile lui Cauchy:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

precum și criteriul de plasticitate Mohr-Caquot:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 \leqslant \sigma_c^2, \tag{3}$$

sau criteriul de plasticitate Hencky-Mises:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2 \leqslant \sigma_c^2, \tag{4}$$

σ_c fiind rezistența normală de curgere, plastică.

Intr'o secțiune elasto-plastică (fig. 2), supusă la momentul încovoietor M, forței tăietoare Q, și sarcinei uniform repartizate p rezultă următoarele:

a) Un sâmbure elastic de înălțime ($2y_0$), dată de relația:

$$y_0 = \frac{h}{2}\sqrt{3 - \frac{12M}{bh^2\sigma_c}}, \tag{5}$$

situat între două zone plastice (fig. 2).

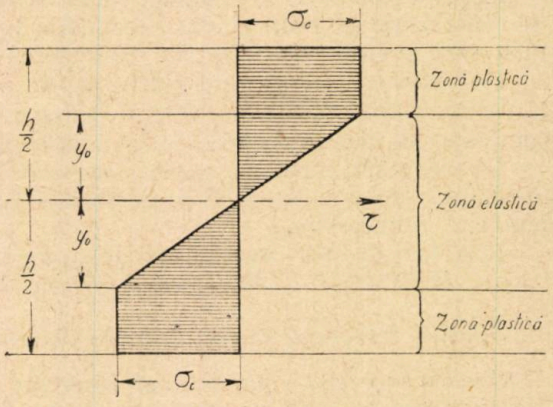


Fig. 2

b) Prin integrarea ecuației (1), rezultă repartiția în secțiune pe înălțimea $2y_0$ a sâmburelui elastic al rezistențelor, τ, conform formulei lui Juravschi (fig. 3):

$$\tau = \frac{3Q(y_0^2 - y^2)}{4by_0^3} \tag{6}$$

c) Prin integrarea ecuației (2), rezultă o repartiție a rezistențelor σ'_y, datorite sarcinii uniform repartizate p, conform formulei:

$$\sigma'_y = \frac{3p\left(y_0^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)}{4by_0^3} + \frac{p}{2b} \tag{7}$$

precum și o repartiție a rezistențelor σ_y'' datorite forței tăietoare Q, conform formulei:

$$\sigma_y'' = \frac{9Q^2(y^3 - y_0^2 y)}{8b^2 \sigma_c y_0^5}. \tag{8}$$

Rezultă, pentru rezistența totală σ_y, valoarea:

$$\sigma_y = \sigma_y' + \sigma_y'' = \frac{3p\left(y_0^2 y - \frac{1}{3} y^3\right)}{4by_0^3} + \frac{9Q^2(y^3 - y_0^2 y)}{8b^2 \sigma_c y_0^5} + \frac{p}{2b}. \tag{9}$$

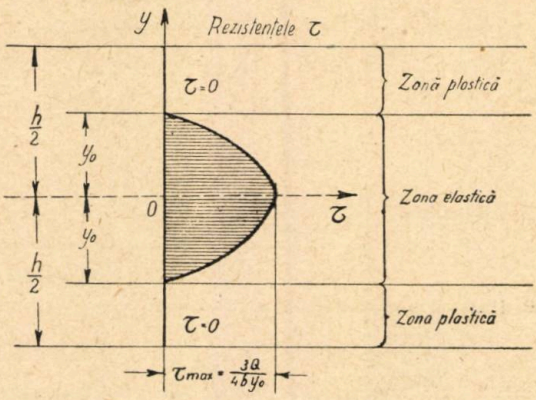


Fig. 3

Maximul și minimul lui σ_y are loc pentru poziția:

$$y_1 = \pm y_0 \sqrt{\frac{3Q^2 - 2pby_0^2 \sigma_c}{9Q^2 - 2pby_0^2 \sigma_c}} \tag{10}$$

și are mărimea

$$\sigma_{y_{\text{min.}}^{\text{max.}}} = \frac{p}{2b} + \sqrt{\frac{3Q^2 - 2pby_0^2 \sigma_c}{(9Q^2 - 2pby_0^2 \sigma_c)^3}} \left[\frac{p(6Q^2 - pby_0^2 \sigma_c)}{b} \pm \frac{27Q^4}{4b^2 y_0^2 \sigma_c}\right] \tag{11}$$

Semnul + corespunde compresiunii;
Semnul — corespunde tensiunii.

In figurile (4), (5), și (6) sunt arătate curbele de variație în secțiune ale lui σ_y', σ_y'' și σ_y.

Aplicând criteriile de plasticitate în zona plastică superioară, unde, pe lângă rezistențele σ_x, se produc și rezistențe $\sigma_y = \sigma_y' = \frac{p}{b}$, deducem în cazul criteriului Mohr-Caquot:

$$\sigma_x = \sigma_c' = \sigma_c + \frac{p}{b}, \tag{12}$$

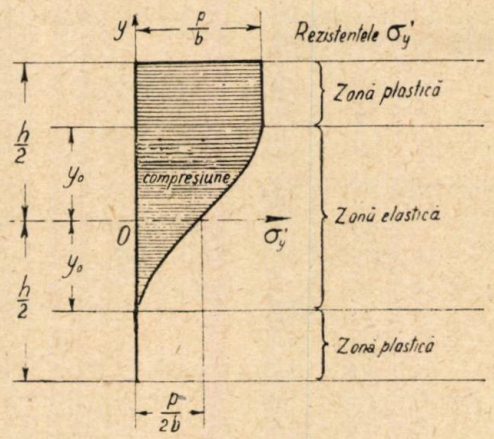


Fig. 4

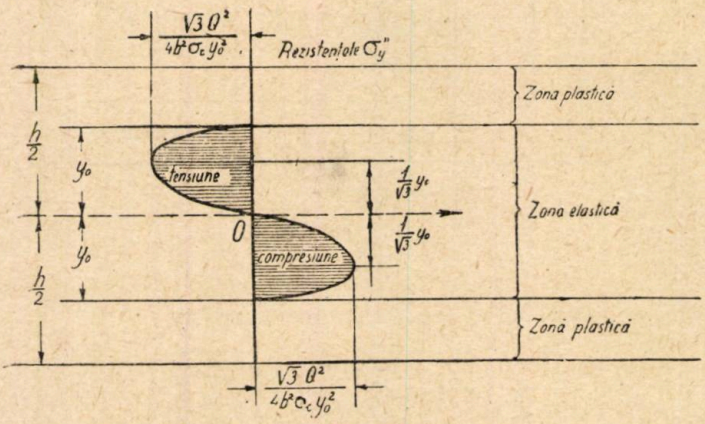


Fig. 5

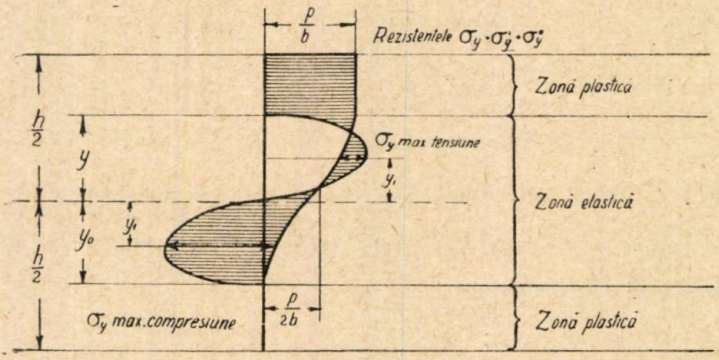


Fig. 6

iar în cazul criteriului Hencky-Mises:

$$\sigma_x = \sigma_c' = \sqrt{\sigma_c^2 - \frac{3p^2}{4b^2}} + \frac{p}{2b} > \sigma_c . \tag{13}$$

Rezultă deci că efectul rezistențelor σ_y' din zona plastică superioară este favorabil elementului de construcție; pentru plastificarea acestei zone este necesar ca rezistențele σ_x să întreacă rezistența de curgere a materialului σ_c.

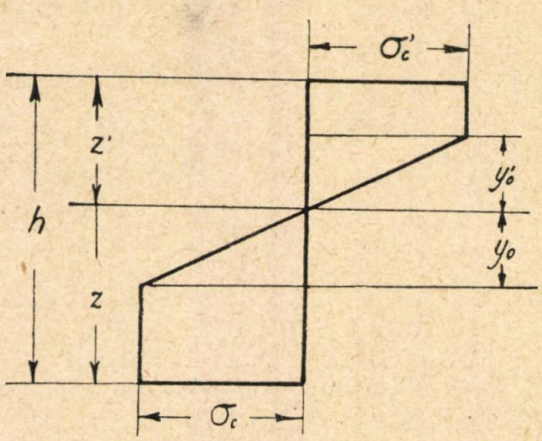


Fig. 7

Aceasta produce o disimetrie în repartiția rezistențelor σ_x în secțiune, arătată în figura 7.

Studiind efectele acestei disimetrii, se ajunge ușor la următoarele rezultate (prin aplicarea condițiilor elementare de echilibru):

$$y_0 = \frac{2\sigma_c}{\sigma_c + \sigma_c'} \sqrt{\frac{3\sigma_c \sigma_c'}{(\sigma_c + \sigma_c')^2} h^2 - \frac{6M}{b(\sigma_c + \sigma_c')}}$$

$$y_0' = \frac{2\sigma_c'}{\sigma_c + \sigma_c'} \sqrt{\frac{3\sigma_c \sigma_c'}{(\sigma_c + \sigma_c')^2} h^2 - \frac{6M}{b(\sigma_c + \sigma_c')}} . \tag{14}$$

Axa neutră nu mai trece prin centrul de greutate al secțiunii și se ridică spre zona superioară cu distanță (fig. 8):

$$\Delta z = \frac{\sigma_c' - \sigma_c}{2(\sigma_c + \sigma_c')} \left[h - 2 \sqrt{\frac{3\sigma_c \sigma_c'}{(\sigma_c + \sigma_c')^2} h^2 - \frac{6M}{b(\sigma_c + \sigma_c')}} \right]. \tag{15}$$

$$z = \frac{\sigma_c'}{\sigma_c + \sigma_c'} h - \frac{y_0}{2\sigma_c} (\sigma_c' - \sigma_c)$$

$$z' = \frac{\sigma_c}{\sigma_c + \sigma_c'} h + \frac{y_0}{2\sigma_c} (\sigma_c' - \sigma_c). \tag{16}$$

Distribuția nouă a rezistențelor σ_x modifică repartiția în secțiune a rezistențelor τ și σ_y. Reluând ecuațiile lui Cauchy și integrând, se obțin următoarele rezultate:
Pentru rezistențele τ:

$$\tau = \frac{6\sigma_c'^2 Q}{b(\sigma_c + \sigma_c')^3 y_0'^3}[\sigma_c y_0'^2 + (\sigma_c' - \sigma_c) y_0' y - \sigma_c' y^2]$$

$$\tau = \frac{6\sigma_c^2 Q}{b(\sigma_c + \sigma_c')^3 y_0'^3}[\sigma_c' y_0^2 + (\sigma_c' - \sigma_c) y_0 y - \sigma_c y^2], \quad (17)$$

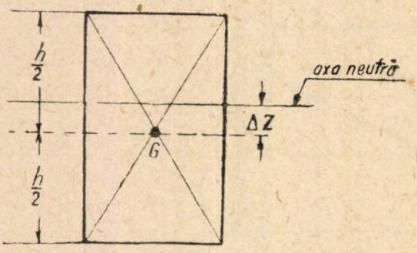


Fig. 8

cu maximul:

$$\tau_{max} = \frac{3\sigma_c' Q}{2b(\sigma_c + \sigma_c') y_0'} = \frac{3\sigma_c Q}{2b(\sigma_c + \sigma_c') y_0}, \quad (18)$$

pentru

$$y = \frac{\sigma_c' - \sigma_c}{2\sigma_c'} y_0' = \frac{\sigma_c' - \sigma_c'}{2\sigma_c} y_0.$$

Considerând $\sigma_c' = \sigma_c$, obținem formula lui Juravschi.
Pentru rezistențele σ_y' și σ_y'':

$$\sigma_y' = \frac{\sigma_c'^2 p}{b(\sigma_c + \sigma_c')^3 y_0'^3}[-(3\sigma_c + \sigma_c') y_0'^3 + 6\sigma_c y_0'^2 y +$$

$$+ 3(\sigma_c' - \sigma_c) y_0' y^2 - 2\sigma_c' y^3] + \frac{p}{b},$$

sau:

$$\sigma_y' = \frac{\sigma_c^2 p}{b(\sigma_c + \sigma_c')^3 y_0^3}\left[-(3\sigma_c + \sigma_c')\frac{\sigma_c'^2}{\sigma_c^2} y_0^3 + 6\sigma_c' y_0^2 y + \right.$$

$$\left. + 3(\sigma_c' - \sigma_c) y_0 y^2 - 2\sigma_c y^3\right] + \frac{p}{b} \quad (19)$$

$$\sigma_y'' = \frac{72\sigma_c^4 Q^2}{b^2(\sigma_c + \sigma_c')^6 y_0'^5}[-\sigma_c y_0'^2 y - (\sigma_c' - \sigma_c) y_0' y^2 + \sigma_c y^3],$$

sau:

$$\sigma_y'' = \frac{72\sigma_c^4 Q^2}{b^2(\sigma_c + \sigma_c')^6 y_0^5}[-\sigma_c' y_0^2 y - (\sigma_c' - \sigma_c) y_0 y^2 + \sigma_c y^3].$$

Pentru $\sigma_c = \sigma_c'$, formulele (19) se transformă în formulele (7) și (8).

Dacă aplicăm criteriul de plasticitate Mohr-Caquot, sau Hencky-Mises în *zona elastică*, se obține o inegalitate de forma:

$$\varphi(y_0, y) \leqslant \sigma_c^2, \tag{20}$$

Considerând valorile y care fac maximă funcția φ, avem:

$$\frac{\partial \varphi(y_0, y)}{\partial y} = 0; \quad \varphi(y_0, y) = \sigma_c^2. \tag{21}$$

Rezolvând sistemul (21) în raport cu y și y_0, se obține poziția primei molecule din zona elastică, care trece în stare plastică, precum și înălțimea minimă a sâmburelui elastic înainte de a începe să se plastifice.

Soluționarea ecuațiilor (21) este practic destul de anevoioasă; ea ne arată însă că, în orice caz, secțiunea nu poate fi plastificată complet prin încovoiere, întru cât rezistențele τ și σ_y încep această plastificare anterior.

OBSERVAȚII CRITICE

Rezultatele obținute mai sus sunt valabile numai atâta vreme cât ipotezele de bază rămân valabile. Verificarea acestor ipoteze se poate face însă numai experimental. Ipoteza secțiunilor plane se verifică direct. Pentru verificarea curbei caracteristice (σ, ε), se supune grinda la încovoiere și se măsoară alungirile și scurtările ε, pe fața superioară sau pe cea inferioară a grinzii.

Obținem astfel experimental $\varepsilon = f(x)$. Pe de altă parte, momentul încovoietor M și forța tăietoare Q sunt funcții cunoscute de x.

Dar din studiul echilibrului unei bare rectilinii de secțiune dreptunghiulară, în ipoteza secțiunilor plane, se găsește prin calcule relativ simple:

$$\sigma = \frac{4M}{bh^2} + \frac{2Q}{bh^2 \dfrac{d(\log \varepsilon)}{dx}}.$$

Deci σ se poate obține pentru fiecare valoare a lui ε și deci, din aceasta, se poate determina prin încercări de încovoiere curba caracteristică (σ, ε).

O altă observație critică este aceea că disimetria produsă prin aplicarea criteriului general de plasticitate în zona plastică este un fenomen secundar, care poate fi neglijat în practică; studiul făcut arată însă că această disimetrie este favorabilă rezistenței elementului de construcție, întru cât, în acest caz, înălțimea sâmburelui elastic crește, maximul rezistenței τ scade, etc.

Criteriul de plasticitate general aplicat în zona elastică rămâne însă important, deoarece el ne arată modul real în care se plastifică sâmburele central pe măsură ce cresc încărcările.

ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПЛАСТИЧНОСТИ К ИЗОГНУТЫМ БАЛКАМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исследование состоит в применении критериев пластичности к изогнутым балкам как в пластифицированных частях, так и внутри упругого ядра.

Приходят к диссиметричному распределению нормальных унитарных напряжений, к новым формулам для остальных унитарных напряжений, а также к условиям пластичности упругого ядра.

APPLICATION DES CRITÉRIUMS DE PLASTICITÉ DANS LE CAS DES POUTRES FLÉCHIES

(RÉSUMÉ)

L'étude consiste en l'application des critériums de plasticité dans le cas des poutres fléchies autant dans les zones plastifiées qu'à l'intérieur du noyau élastique.

On arrive à une répartition dissymétrique des efforts unitaires normaux, à de nouvelles formules pour les autres efforts unitaires ainsi qu'aux conditions de plasticité du noyau élastique.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

CALCULUL SPAŢIAL AL CADRELOR CU GRINZI LONGITUDINALE PRINCIPALE ŞI GRINZI TRANSVERSALE SECUNDARE

DE

PANAIT C. MAZILU

Planşeele de beton armat, în care grinzile transversale se sprijină pe grinzile longitudinale şi acestea, la rândul lor, pe stâlpi, sunt întrebuinţate pe scară mare în construcţiile industriale, datorită avantajelor pe care le oferă desvoltării instalaţiilor de ventilaţie, aer condiţionat, electrice, etc., în lungul clădirii, precum şi aspectului convenabil pentru arhitectura tavanelor la sălile de dimensiuni mari.

Din punctul de vedere al calculului eforturilor, acest sistem produce dificultăţi, deoarece, în sens transversal, pe clădire, stâlpii sunt legaţi direct numai printr'o nervură secundară, iar în unele cazuri, nici nu sunt legaţi direct. In aceste condiţiuni, calculul eforturilor nu se poate face prin reducerea schemei statice la un cadru plan — aşa cum se calculează în mod obişnuit construcţiile — căci acest mod de calcul ar implica eforturi inexacte în grinzile secundare şi în stâlpi, precum şi ignorarea eforturilor de torsiune din grinzile principale.

In cele ce urmează, vom expune felul în care se poate face calculul spaţial al eforturilor, ţinând seama de legăturile reale ale sistemului.

Din punct de vedere teoretic, se pleacă dela metoda deformaţiilor, în care se aleg ca necunoscute rotaţiile de noduri şi rotaţiile de bare. Dacă nodurile se presupun nedeplasabile, necunoscutele vor fi numai rotaţiile nodurilor. Problema nodurilor deplasabile se rezolvă în etapa a doua şi nu este necesar să fie analizată la început.

Deoarece grinzile longitudinale şi secundare ale acestor planşee se intersectează în unghiuri drepte, necunoscutele problemei — rotaţiile nodurilor — vor fi reprezentate prin vectori după două direcţii perpendiculare; adică, fiecare necunoscută provoacă încovoieri într'un sistem de grinzi, precum şi torsiuni în sistemul de grinzi perpendiculare.

Construcţiile efective sunt însă astfel făcute, încât nu este necesar să se ţină concomitent seama de rotaţiile după cele două direcţii ortogonale. La planşee, este suficient să se ţină seama de necunoscutele φ (rotaţii de noduri) de pe o singură direcţie şi anume, după direcţia grinzilor longitudinale principale,

care vor provoca eforturi de încovoiere în grinzile secundare transversale și în stâlpi, precum și eforturi de torsiune în grinzile principale longitudinale.

Din punct de vedere practic, nu este necesar un calcul spațial și după o direcție perpendiculară pe prima, căci efectul de torsiune în grinzile secundare este cu totul neînsemnat. Pe această direcție, un calcul obișnuit plan care să determine momentele de încovoiere în grinzile principale și pe direcția corespunzătoare din stâlpi este, în general, complet satisfăcător. De asemenea, nu este, în general, nevoie să se țină seama de diferențele de săgeți ale grinzilor principale într'un plan perpendicular pe ele.

In cele ce urmează, se expune felul în care se pot calcula aceste planșee, pornind dela metoda generală a deformațiilor, dar conducând calculele în vederea aplicării aproximațiilor succesive, pentru a se evita operația rezolvării de ecuații cu multe necunoscute.

După cum s'a enunțat, se aleg ca necunoscute rotațiile φ ale nodurilor, vectorii acestor rotații fiind dirijați după aceeași direcție, direcția grinzilor principale.

De asemenea, momentele de torsiune în grinzile principale și momentele încovoietoare în grinzile secundare și în stâlpi, au vectorii dirijați după aceeași direcție, sarcinile exterioare acționând în planul perpendicular pe grinzile principale.

Ca sistem de bază, se alege sistemul obișnuit în metoda deformațiilor, și anume, sistemul în care toate nodurile sunt considerate perfect încastrate (fără nicio rotație), adică, sistemul în care valorile necunoscutelor sunt nule pentru orice încărcare exterioară.

Pe baza teoremei suprapunerii efectelor se poate scrie că efortul într'o secțiune oarecare j este o funcție lineară de toate necunoscutele $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots \varphi_m$, precum și de sarcinile exterioare.

Dacă momentul din secțiunea j este efortul căutat, atunci se poate scrie:

$$M_j = \varphi_1 \cdot r_{j1} + \varphi_2 \cdot r_{j2} + \ldots + \varphi_m \cdot r_{jm} + r_{j0} \cdot$$

Pentru a găsi semnificațiile coeficienților r_{j1}, etc., se procedează prin particularizare.

Se face: $\varphi_1 = 1$ și $\varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_m = 0$, de asemenea încărcarea exterioară nulă, deci $r_{j0} = 0$.

Atunci: $M_j = 1 \cdot r_{j1}$.

Deci r_{j1} este momentul care apare în secțiunea j, când sistemul de bază este încărcat numai cu necunoscuta $\varphi_1 = 1$ (adică s'a rotit numai nodul 1 cu $\varphi_1 = 1$, celelalte noduri rămânând perfect încastrate).

In mod analog, se obțin semnificațiile tuturor celorlalți coeficienți.

Pentru a obține ecuațiile necesare, se scrie că fiecare nod în care s'a introdus câte o necunoscută φ, este în echilibru, adică suma momentelor din orice nod este nulă.

Fie M_1 suma momentelor din nodul 1, etc.

Atunci, ecuațiile în cazul figurii 1 vor fi:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \varphi_1 r_{11} + \varphi_2 r_{12} + \varphi_3 r_{13} + \varphi_4 r_{14} + \varphi_5 r_{15} + \ldots + \varphi_9 r_{19} + r_{10} = 0 \\
M_2 &= \varphi_1 r_{21} + \varphi_2 r_{22} + \varphi_3 r_{23} + \varphi_4 r_{24} + \varphi_5 r_{25} + \ldots + \varphi_9 r_{29} + r_{20} = 0 \qquad (1.1) \\
&\vdots \\
M_9 &= \varphi_1 r_{91} + \varphi_2 r_{92} + \varphi_3 r_{93} + \varphi_4 r_{94} + \varphi_5 r_{95} + \ldots + \varphi_9 r_{99} + r_{90} = 0,
\end{aligned}$$

un sistem de 9 ecuații cu 9 necunoscute care, din punct de vedere teoretic, pune problema în ecuație.

Pentru rezolvare, trebue găsite expresiile analitice ale tuturor coeficienților a căror semnificație fizică a fost stabilită mai sus.

Se începe cu termenii r_{hj} în care $h \neq j$.

In primul rând, reiese că toți termenii r_{hj} — în care h și j nu sunt două noduri succesive, fie pe grinzile secundare, fie pe grinzile principale, fie pe

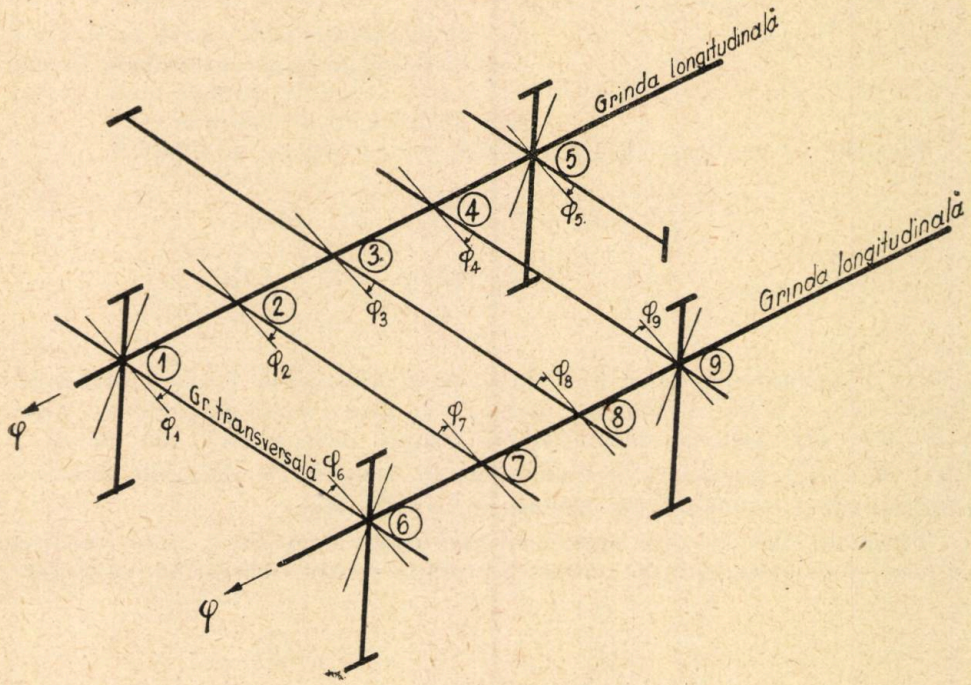


Fig. 1

stâlpi, — sunt nuli, datorită sistemului de bază ales, cu nodurile perfect încastrate.

De exemplu, dacă se rotește numai nodul 2, toate celelalte noduri rămânând perfect încastrate, vor apare momente în nodul 2 și în nodurile 1,3 și 7, dar nu va apare niciun moment în restul nodurilor.

Deci r_{22}, r_{21}, r_{23} și r_{27} vor avea valori, pe când:

$$r_{24} = r_{25} = r_{26} = r_{28} = r_{29} = 0.$$

Termenii $r_{hj} \neq 0$ sunt de două categorii, după cum h și j sunt capetele unui panou al grinzilor secundare, sau al grinzilor longitudinale.

In cazul când h și j sunt capetele unei grinzi secundare (fig. 2), rezultatul este binecunoscut:

$$r_{hj} = -\frac{2EI_{hj}}{l_{hj}}. \qquad (1.2)$$

r_{hj} este momentul care apare în nodul h, când sistemul de bază este încărcat numai cu $\varphi_j = 1$ (s'a rotit numai nodul j). r_{hj} este un moment încovoietor.

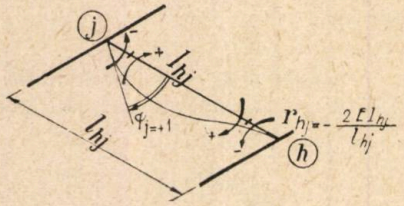


Fig. 2

In cazul când g și j sunt capetele unui panou al grinzii principale (fig. 3), avem:

$$r_{gj} = +\frac{GI^t_{gj}}{l_{gj}}. \qquad (1.3)$$

r_{gj} este momentul care apare în nodul j când sistemul de bază este încărcat numai cu $\varphi_j = 1$ (s'a rotit numai nodul j). r_{gj} este un moment de torsiune.

Termenii de pe diagonala principală r_{jj} sunt explicați în figura 4.

$$r_{jj} = M^i_1 + M^i_2 + M^i_3 + M^t_4 + M^t_5, \text{ adică:}$$

$$r_{jj} = -\frac{4EI_{j1}}{l_{j1}} - \frac{4EI_{j2}}{l_{j2}} - \frac{4EI_{j3}}{l_{j3}} - \frac{GI^t_{j4}}{l_{j4}} - \frac{GI^t_{j5}}{l_{j5}}. \qquad (1.4)$$

r_{jj} este momentul care apare în nodul j, când sistemul de bază este încărcat numai cu $\varphi_j = 1$ (s'a rotit numai nodul j). r_{jj} este o sumă de momente încovoietoare din grinzile secundare și stâlpii care pleacă din nodul j (M^i_1, M^i_2, M^i_3), precum și de momentele de torsiune pe panourile grinzilor longitudinale care pleacă din același nod j (M^t_4, M^t_5).

Termenul liber r_{j0} este momentul care apare în nodul j, când sistemul de bază — cu toate nodurile perfect încastrate — este încărcat numai cu sar-

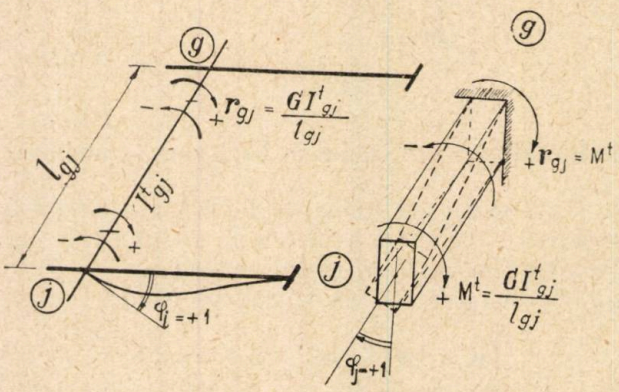


Fig. 3

cinile exterioare. Sarcinile aplicându-se pe nervurile transversale, r_{j0} va fi deci momentul de încastrare perfectă de pe grinzile secundare din nodul j.

$$r_{j0} = \mathfrak{M}_j. \qquad (1.5)$$

Modulul de elasticitate E se afectează necunoscutelor φ, adică toți coeficienții r_{jj}, r_{hj}, r_{gj} se împart cu E. Se notează:

$$\frac{I_{jh}}{l_{jh}} = K^i_{jh}, \tag{1.6}$$

care este rigiditatea practică la încovoiere și:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{I^t_{gj}}{l_{gj}} = K^t_{gj}, \tag{1.7}$$

care se va numi rigiditatea practică a barei gj la torsiune, unde G este modulul de elasticitate transversal și I^t este momentul de inerție la torsiune, care la secțiuni dreptunghiulare are expresia cunoscută:

$I^t = \eta_3 \cdot h \cdot b^3$ (1.7′) unde, $h > b$ și η_3 este un coeficient care se găsește în tabele, de exemplu în *Manualul inginerului — Hütte*, p. 689.

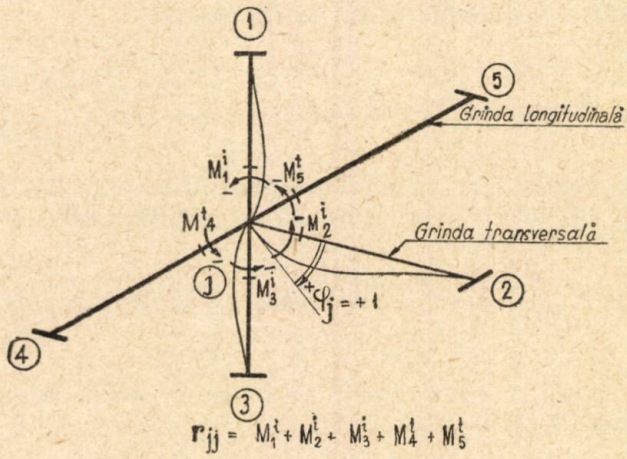


Fig. 4

La grinzi de beton se poate lua $\frac{G}{E} = 0{,}425$ (1.7″)

Se mai notează apoi într'un nod j:

$$K^i_j = K^i_{j1} + K^i_{j2} + K^i_{j3} + \ldots \tag{1.8}$$

adică, K^i_j este rigiditatea nodului j la încovoiere, egală cu suma rigidităților tuturor barelor supuse la încovoiere care pleacă din nodul j.

De asemenea, se notează:

$$K^t_j = K^t_{j4} + K^t_{j5}, \tag{1.9}$$

unde K^t_j este rigiditatea nodului j la torsiune, egală cu suma rigidităților la torsiune a barelor supuse la torsiune, care pleacă din nodul j.

In acest caz, ecuațiile sistemului (1.1) devin:

$$\begin{aligned}
&-4(K_1^i + K_1^t)\varphi_1 + 4K_{12}^t\varphi_2 + 0 + 0 + 0 - 2K_{16}^i\varphi_6 + 0 + 0 + 0 + \mathfrak{M}_1 = 0\\
&+4K_{21}^t\varphi_1 - 4(K_2^i + K_2^t)\varphi_2 + 4K_{23}^t\varphi_3 + 0 + 0 + 0 - 2K_{27}^i\varphi_7 + 0 + 0 + \mathfrak{M}_2 = 0\\
&0 + 4K_{32}^t\varphi_2 - 4(K_3^i + K_3^t)\varphi_3 + 4K_{34}^t\varphi_4 + 0 + 0 + 0 - 2K_{38}^i\varphi_8 + 0 + \mathfrak{M}_3 = 0\\
&\vdots\\
&0 + 0 + 0 - 2K_{94}^i\varphi_4 + 0 + 0 + 0 + 4K_{98}^t\varphi_8 - 4(K_9^i + K_9^t)\varphi_9 + \mathfrak{M}_9 = 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Acest sistem este, evident, simetric față de diagonala principală.

Se observă că, dacă ar lipsi termenii corespunzători rigidităților la torsiune (K_1^t, K_{12}^t, etc.), acesta ar fi tocmai sistemul de ecuații dela cadrele plane care se poate rezolva prin iterații, cu ajutorul aproximațiilor succesive.

O metodă analoagă poate fi folosită și în spațiu, deoarece criteriul teoretic pentru rezolvarea prin iterații este satisfăcut de sistemul (1.10). In adevăr, în fiecare ecuație a sistemului (1.10) există relația:

$$\begin{aligned}
&|r_{12}| + |r_{13}| + |r_{14}| + \ldots \leqslant |r_{11}|\\
&|r_{21}| + |r_{23}| + |r_{24}| + \ldots \leqslant |r_{22}|,\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.11}$$

adică, în fiecare ecuație, suma absolută a coeficienților secundari este mai mică decât valoarea absolută a coeficientului de pe diagonala principală. De exemplu:

$$\begin{aligned}
|r_{33}| = 4(K_3^i + K_3^t) &= 4K_{38}^i + 4K_{3a}^i + 4K_{32}^t + 4K_{34}^t > |r_{32}| + |r_{34}| + |r_{38}| =\\
&= 4K_{32}^t + 4K_{34}^t + 2K_{38}^i.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Se observă totuși că, dacă rigiditățile la încovoiere ale barelor ar fi nule ($K^i = 0$), atunci (1.11) devine:

$$|r_{12}| + |r_{13}| + \ldots = |r_{11}|, \tag{1.13}$$

pe când, dacă toate rigiditățile la torsiune ar fi nule ($K^t = 0$), atunci:

$$|r_{12}| + |r_{13}| + \ldots \leqslant \frac{1}{2}|r_{11}|. \tag{1.14}$$

Convergența iterațiilor este cu atât mai rapidă, cu cât partea I-a a inegalităților (1.11) este mai mică față de partea a II-a.

Cazul (1.14) îl constitue problema cadrului plan cu forțe în planul său și se observă că, la sistemele plane, rezolvarea prin iterații este rapid convergentă după cum se știe de altfel dela metoda repartizării și transmiterii momentelor de încastrare prin aproximații succesive.

In cazul problemei în spațiu, acest avantaj al rapidității convergenței nu mai este însă întotdeauna asigurat după cum arată condiția (1.12) și la limită, expresia (1.13).

Deci, din punct de vedere teoretic, se va putea folosi și în spațiu o metodă directă de aproximații succesive, în care — după cum se poate vedea

cu ușurință — trebue făcute transmiteri în spațiu: pe grinzile secundare se transmit momentele încovoietoare cu coeficientul de transmitere $\gamma^i = +\frac{1}{2}$, iar pe grinzile longitudinale se transmit momentele de torsiune cu coeficientul de transmitere $\gamma^t = -1$.

Acesta este primul procedeu de rezolvare; mersul operațiilor este explicat direct, în exemplul Nr. 1.

Se observă însă că, așa cum ne arată condițiile (1.11), precum și valoarea $\gamma^t = -1$, convergența la torsiune va fi mai înceată decât la încovoiere și deci, acest procedeu se poate aplica ușor numai în cazurile în care construcția

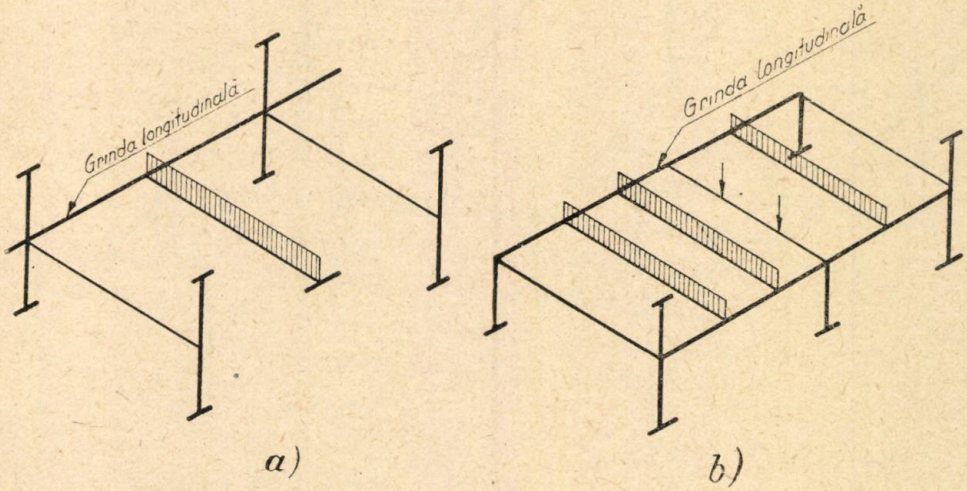


Fig. 5

are noduri foarte rigide la încovoiere și un număr mic de bare supuse la torsiune (fig. 5, *a*); altfel, momentele de torsiune se plimbă de-a-lungul grinzii longitudinale, descrescând foarte lent (de exemplu fig. 5, *b*).

Deci, aplicarea procedeului de mai sus este avantajoasă numai pentru cazuri locale, unde transmiterile la torsiune se pot limita într'o regiune restrânsă. Inafară de aceasta, schema de calcul spațială este greu de aranjat și de urmărit, dacă problema de torsiune nu este limitată la o mică regiune.

★

Folosirea procedeului descris mai sus nu este avantajoasă pentru cadrele etajate, cu planșee alcătuite din grinzi principale longitudinale și grinzi secundare transversale. Din acest motiv, el este transformat într'un al doilea procedeu, după cum urmează:

Se pleacă dela observația că operația de transmitere a momentelor de torsiune de-a-lungul grinzilor principale dăunează convergenței. Deci, această operație trebue eliminată din procesul aproximațiilor succesive. Pentru aceasta, se precizează următoarele date ale problemei:

Cazul studiat este reprezentat în figura 6, în care panourile de lățime L se repetă identic în tot lungul construcției și se încarcă identic. Planșeele de

deasupra şi de dedesubt pot avea altă dispoziţie de grinzi, dar respectând aceeaşi condiţie de simetrie pe panoul L. In acest caz, problema se limitează numai la sistemul parţial format de construcţia de panou L, dispusă şi încărcată simetric faţă de planul de simetrie vertical transversal, care trece prin stâlpii $X-X$.

Din condiţiile de simetrie impuse, rezultă că momentul de torsiune, în grinzile longitudinale în secţiunile dela limitele panoului L, sunt nule. Dacă limita panoului cade între două grinzi transversale, momentul de torsiune

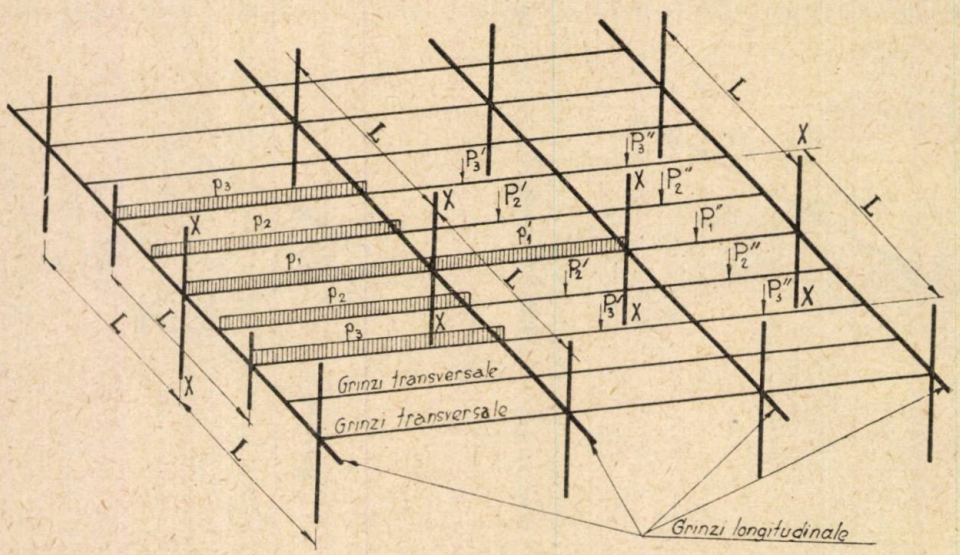


Fig. 6

este nul pe toată distanţa dintre cele două grinzi; dacă însă limita cade chiar într'o grindă transversală, momentul de torsiune trece prin zero în secţiunea ipotetică dela limita panoului L.

Urmărind eliminarea operaţiilor de transmitere a momentelor de torsiune de-a-lungul grinzilor principale, observăm că construcţia din panoul L poate fi descompusă într'un număr de sisteme plane egal cu numărul de grinzi secundare distincte — caracteristice, cuprinse în lăţimea L.

Aceste sisteme distincte pot fi tratate ca sisteme plane, prin aproximaţii succesive (metoda repartizării şi transmiterii momentelor). Introducem însă un corectiv, şi anume acela că aceste sisteme nu pot fi tratate independent unul de altul, ci rămân legate între ele prin condiţiile de compatibilitate ale deformaţiilor impuse de rigiditatea la torsiune a grinzilor longitudinale.

In aceste condiţii, se înţelege cu uşurinţă că, din cele două operaţii caracteristice metodei aproximaţiilor succesive — repartizarea momentelor şi transmiterea momentelor — ultima — transmiterea momentelor — se va face exact ca la sistemele plane. Repartizarea momentelor se va face însă altfel decât la sistemele plane, în sensul că momentul M^i, care urmează să fie repartizat prin încovoiere la barele în acelaşi nod în plan, nu va mai fi suma momentelor

de încastrare din acel nod, ci o funcție bineînțeles lineară — de toate momentele de încastrare din nodurile de pe aceeași grindă longitudinală.

Deci, singura problemă nouă, apărută față de problema plană, este determinarea acestei funcții lineare care va evalua momentul de încovoiere M^i ce trebue repartizat în fiecare nod, numai la barele încovoiate.

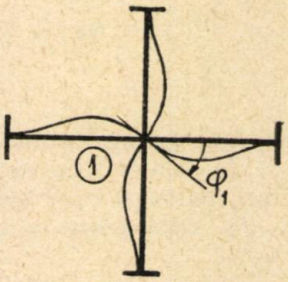


Fig. 7 a

Se pornește tot dela metoda generală a deformațiilor.

Baza teoretică a metodei repartizării și transmiterii momentelor în plan poate fi schematizată ca în figura 7 a. Presupunând toate nodurile construcției perfect rigide, se limitează construcția într'o primă fază numai la nodul 1, legat prin barele corespunzătoare de celelalte noduri. Singura necunoscută în această fază este deci φ_1, rotația nodului 1. Forma de bază pentru prima fază este aceea din figura 7 a. Metoda generală a deformațiilor determină necunoscuta φ_1 prin ecuația:

$$M_1 = r_{11}\,\varphi_1 + r_{10} = 0,$$

în care sunt cunoscute semnificațiile coeficienților.

Trecând acum la problema din spațiu, așa cum a fost schematizată, forma de bază în prima fază de calcul este aceea din figura 7 b în care toată construcția

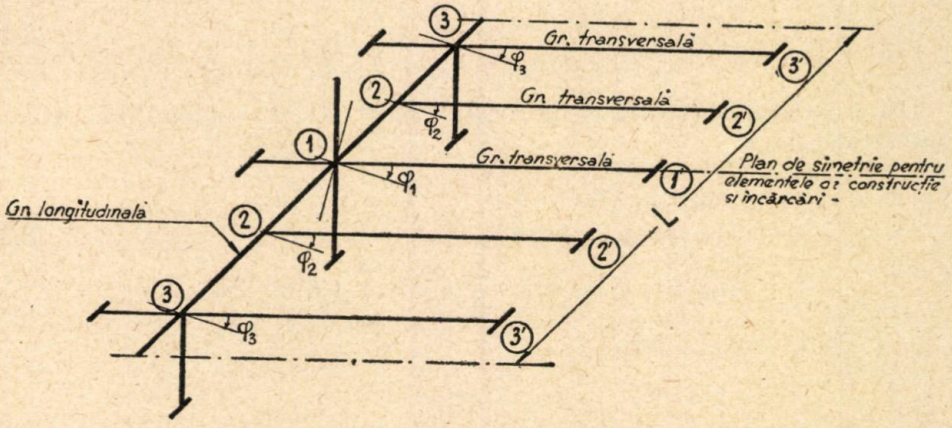


Fig. 7 b

este limitată la grinda longitudinală, la barele transversale, precum și la stâlpii care pleacă din nodurile grinzii longitudinale și a căror extremități opuse sunt perfect încastrate.

In acest caz, necunoscutele vor fi numai rotațiile nodurilor de pe grinda longitudinală φ_1, φ_2, φ_3, . . .

Pornind dela sistemul general de ecuații din metoda deformațiilor, rezultă, după cum s'a văzut:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \cdot r_{11} + \varphi_2 \cdot r_{12} + 0 + 0 + 0 \ldots + r_{10} = 0 \\
&\varphi_1 \cdot r_{21} + \varphi_2 \cdot r_{22} + \varphi_3 \cdot r_{23} + 0 + 0 + 0 \ldots + r_{20} = 0 \\
&0 + \varphi_2 \cdot r_{23} + \varphi_3 \cdot r_{33} + \varphi_4 \cdot r_{34} + 0 + 0 + \ldots + r_{30} = 0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.0}$$

în care semnificațiile tuturor coeficienților sunt cunoscute.

In cele ce urmează, se vor stabili funcțiile lineare căutate pentru două, trei, patru și cinci grinzi transversale în panoul L.

1. *Două grinzi secundare (două intervale) în panoul L* (fig. 8).

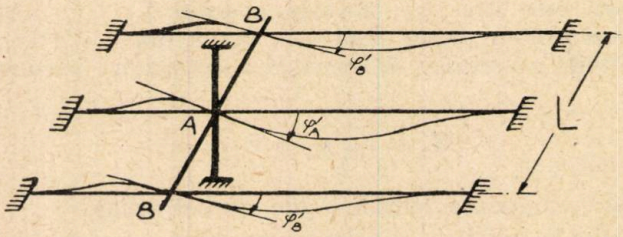


Fig. 8

Sistemul ecuației (2.0) devine:

$$\begin{aligned}
&\varphi_A \cdot r_{AA} + \varphi_B \cdot r_{AB} + r_{AO} = 0 \\
&\varphi_A \cdot r_{BA} + \varphi_B \cdot r_{BB} + r_{BO} = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dacă se face convenția ca $\varphi = 4E\varphi'$, unde φ' este unghiul real, atunci coeficienții devin:

$$\begin{aligned}
&r_{AA} = -(K_A^i + K_A^t) = -(K_A^i + 2K_{AB}^t) \\
&r_{AB} = r_{BA} = +2K_{AB}^t \\
&r_{BB} = -(K_B^i + 2 \cdot \frac{1}{2} K_B^t) = -(K_B^i + 2K_{AB}^t) \\
&r_{AO} = \mathfrak{M}_A \\
&r_{BO} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_B,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

unde semnificațiile sunt cele utilizate anterior:

$$K_A^i = \frac{I_{AA_1}}{l_{AA_1}} + \frac{I_{AA_2}}{l_{AA_2}} + \frac{I_{AA_3}}{l_{AA_3}} + \frac{I_{AA_4}}{l_{AA_4}}; \quad K_B^i = \frac{I_{BB_1}}{l_{BB_1}} + \frac{I_{BB_2}}{l_{BB_2}}$$

$$K_{AB}^t = \frac{G}{E} \cdot \frac{I_{AB}^t}{4\, l_{AB}}. \tag{2.2'}$$

$\mathfrak{M}_A$ și $\mathfrak{M}_B$ sunt momentele de încastrare perfectă din nodurile A și B din sarcinile exterioare.

Sistemul (2.1) devine:

$$\begin{aligned} -(K_A^i + 2K_{AB}^t)\cdot \varphi_A + 2K_{AB}^t \cdot \varphi_B + \mathfrak{M}_A = 0 \\ 2K_{AB}^t \cdot \varphi_A - (K_B^i + 2K_{AB}^t)\varphi_B + \mathfrak{M}_B = 0. \end{aligned} \tag{2.1'}$$

Dacă se notează:

$$\frac{K_A^i}{K_{AB}^t} = a; \quad \frac{K_B^i}{K_{AB}^t} = b; \tag{2.3}$$

$$\text{și } 1 + \frac{a}{2} = s_1; \; 1 + \frac{b}{2} = s_2; \; D = K_A^i + K_B^i \cdot s_1, \tag{2.4}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{s_2}{D}\cdot \mathfrak{M}_A + \frac{1}{D}\cdot \mathfrak{M}_B \\ \varphi_B &= \frac{1}{D}\cdot \mathfrak{M}_A + \frac{s_1}{D}\cdot \mathfrak{M}_B; \end{aligned} \tag{2.5}$$

coeficienții lui $\mathfrak{M}_A$ și $\mathfrak{M}_B$ sunt evident simetrici față de diagonala principală.

Pentru a trece dela unghiurile φ_A, φ_B la momentele $\mathfrak{M}_A^i$, $\mathfrak{M}_B^i$, este suficient să se multiplice (2.5) cu rigiditățile la încovoiere ale nourilor A, respectiv B.

$$M_A^i = -\varphi_A . K_A^i \; ; \; M_B^i = -\varphi_B \cdot K_B^i, \tag{2.6}$$

Dacă se notează

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{K_A^i}{D}\cdot s_2; \; \alpha'' = \frac{K_A^i}{D} \\ \beta' &= \frac{K_B^i}{D}; \qquad \beta'' = \frac{K_B^i}{D}\cdot s_1, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

rezultă:

$$\left.\begin{aligned} M_A^i &= -\frac{K_A^i}{D} s_2 \cdot \mathfrak{M}_A - \frac{K_A^i}{D}\cdot \mathfrak{M}_B = -\alpha' \mathfrak{M}_A - \alpha'' \mathfrak{M}_B \\ M_B^i &= -\frac{K_B^i}{D}\cdot \mathfrak{M}_A - \frac{K_B^i}{D}\cdot s_1 \mathfrak{M}_B = -\beta' \mathfrak{M}_A - \beta'' \mathfrak{M}_B. \end{aligned}\right\} \tag{2,8}$$

Se găsesc ușor relațiile de verificare:

$$\alpha' + \beta' = 1; \quad \alpha'' + \beta'' = 1 \tag{2.9}$$

$$M_A^i + M_B^i = -(\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B). \tag{2.10}$$

Cu ajutorul coeficienților α', α'', β', β'' și al momentelor de încastrare perfectă din încărcări, se găsesc expresiile momentelor M_A^i și M_B^i cu (2.8) care se repartizează la barele încovoiate din nodul A respectiv B, proporțional cu rigiditățile la încovoiere, exact ca la problema plană; apoi, se fac transmiterile la capetele opuse cu coeficientul $\gamma = \frac{1}{2}$. Se va face apel la relațiile (2.8) pentru fiecare operație de determinare a momentelor care trebue repartizate.

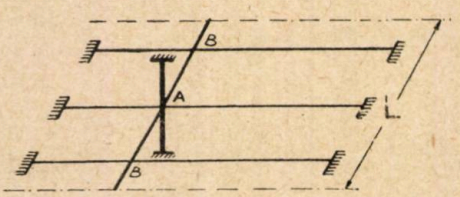


Fig. 9

2. *Trei grinzi secundare (trei intervale) în panoul L* (fig. 9).

Sistemul de ecuații este același ca și în cazul precedent:

$$\begin{aligned} r_{AA} \cdot \varphi_A + r_{AB}\varphi_B + r_{AO} &= 0 \\ r_{BA} \cdot \varphi_A + r_{BB}\varphi_B + r_{BO} &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

unde:

$$\begin{aligned} r_{AA} = -(K_A^i + 2K_{AB}^t); \quad r_{AB} = r_{BA} = +2K_{AB}^t \\ r_{BB} = -2(K_B^i + K_{AB}^t) \\ r_{10} = \mathfrak{M}_A; \quad r_{20} = 2\mathfrak{M}_B. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cu notațiile:

$$\frac{K_A^i}{K_{AB}^t} = a; \quad \frac{K_B^i}{K_{AB}^t} = b; \tag{3.3}$$

și: $1 + \frac{a}{2} = s_1$; $1 + b = s_2'$; $D = K_A^i + 2K_B^i \cdot s_1$ (3.4)

se găsește:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_A &= +\frac{s_2'}{D}\mathfrak{M}_A + \frac{1}{D} \cdot 2\mathfrak{M}_B \\ \varphi_B &= \frac{1}{D} \cdot \mathfrak{M}_A + \frac{s_1}{D} \cdot 2\mathfrak{M}_B. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Trecând la momente cu ajutorul expresiilor (2.6) și notând:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{K_A^i}{D}s_2'; \quad \alpha'' = \frac{K_A^i}{D} \\ \beta' &= \frac{K_B^i}{D}; \quad \beta'' = \frac{K_B^i}{D}s_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

se găsește:

$$\left.\begin{aligned} M_A^i &= -\alpha' \cdot \mathfrak{M}_A - \alpha'' \cdot 2\mathfrak{M}_B \\ M_B^i &= -\beta' \cdot \mathfrak{M}_A - \beta'' \cdot 2\mathfrak{M}_B, \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

cu relațiile de verificare:

$$\alpha' + 2\beta' = 1; \quad \alpha'' + 2\beta'' = 1; \tag{3.9}$$

și

$$M_A^i + 2M_B^i = -(\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B). \tag{3.10}$$

3. *Patru grinzi transversale (patru intervale) în panoul L* (fig. 10).

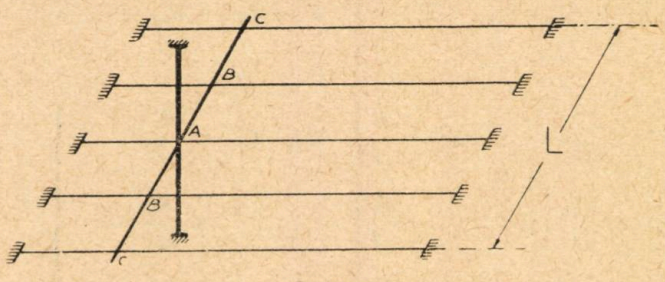


Fig. 10

Sistemul de ecuații (2.0) devine:

$$\begin{aligned} r_{AA} \cdot \varphi_A + r_{AB} \cdot \varphi_B + \quad 0 \quad + r_{AO} &= 0 \\ r_{BA} \cdot \varphi_A + r_{BB} \cdot \varphi_B + r_{BC} \cdot \varphi_C + r_{BO} &= 0 \\ 0 \quad + r_{CB} \cdot \varphi_B + r_{CC} \cdot \varphi_C + r_{CO} &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

unde:

$$\begin{aligned} &r_{AA} = -(K_A^i + 2K_{AB}^t); \quad r_{BB} = -2(K_B^i + K_{AB}^t + K_{BC}^t); \\ &r_{CC} = -(K_c^i + 2K_{BC}^t); \quad r_{AB} = r_{BA} = +2K_{AB}^t; \quad r_{BC} = r_{CB} = +2K_{BC}^t \\ &r_{AO} = \mathfrak{M}_A; \quad r_{BO} = 2\mathfrak{M}_B; \quad r_{CO} = \mathfrak{M}_C. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dacă se notează:

$$\frac{K_A^i}{K_{AB}^t} = a'; \frac{K_A^i}{K_{BC}^t} = a''; \frac{K_B}{K_{AB}^t} = b'; \frac{K_B}{K_{BC}^t} = b''; \frac{K_C^i}{K_{AB}^t} = c'; \frac{K_C}{K_{BC}^t} = c'' \tag{4.3}$$

$$1 + \frac{a'}{2} = s_1; 1 + b' = s_2; 1 + b'' = s_3; 1 + \frac{c''}{2} = s_4;$$

$$s_1 \cdot s_3 + \frac{a''}{2} = s_5; \; s_2 \cdot s_4 + \frac{c'}{2} = s_6; \; s_1 \cdot s_4 = s_7 \tag{4.4}$$

$$D = K_A^i + 2K_B^i \cdot s_1 + K_c^i \cdot s_5$$

Se obțin soluțiile:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{s_6}{D}\cdot \mathfrak{M}_A + \frac{s_4}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_B + \frac{1}{D}\cdot \mathfrak{M}_C \\ \varphi_B &= \frac{s_4}{D}\cdot \mathfrak{M}_A + \frac{s_7}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_B + \frac{s_1}{D}\cdot \mathfrak{M}_C \\ \varphi_C &= \frac{1}{D}\cdot \mathfrak{M}_A + \frac{s_1}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_B + \frac{s_5}{D}\cdot \mathfrak{M}_C \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Coeficienții sunt simetrici față de diagonala principală.
Pentru a trece la momente, se multiplică cu rigiditățile:

$$M_A^i = -K_A^i\cdot\varphi_A;\quad M_B^i = -K_B^i\cdot\varphi_B;\quad M_C^i = -K_C^i\cdot\varphi_C \tag{4.6}$$

și notând:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{K_A^i}{D}\cdot s_6;\quad \alpha'' = \frac{K_A^i}{D}\cdot s_4;\quad \alpha''' = \frac{K_A^i}{D} \\ \beta' &= \frac{K_B^i}{D}\cdot s_4;\quad \beta'' = \frac{K_B^i}{D}\cdot s_7;\quad \beta''' = \frac{K_B^i}{D}\cdot s_1 \\ \gamma' &= \frac{K_C^i}{D};\quad \gamma'' = \frac{K_C^i}{D}\cdot s_1;\quad \gamma''' = \frac{K_C^i}{D}\cdot s_5, \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

se obține:

$$\left.\begin{aligned} M_A^i &= -\alpha'\cdot\mathfrak{M}_A - \alpha''\cdot 2\,\mathfrak{M}_B - \alpha'''\cdot\mathfrak{M}_C \\ M_B^i &= -\beta'\cdot\mathfrak{M}_A - \beta''\cdot 2\,\mathfrak{M}_B - \beta'''\cdot\mathfrak{M}_C \\ M_C^i &= -\gamma'\cdot\mathfrak{M}_A - \gamma''\cdot 2\,\mathfrak{M}_B - \gamma'''\cdot\mathfrak{M}_C, \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

cu relațiile de verificare:

$$a' + 2\beta' + \gamma' = 1;\quad \alpha'' + 2\beta'' + \gamma'' = 1;\quad \alpha''' + 2\beta''' + \gamma''' = 1 \tag{4.9}$$

$$M_A^i + 2M_B^i + M_C^i = -(\mathfrak{M}_A + 2\,\mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C). \tag{4.10}$$

4. *Cinci grinzi* (*cinci intervale*) *în panoul L* (fig. 11).
Același sistem de ecuații (4.1) ca și în cazul precedent, în care însă coeficienții au semnificațiile:

$$r_{AA} = -(K_A^i + 2K_{AB}^t);\quad r_{BB} = -2(K_B^i + K_{AB}^t + K_{BC}^t);$$

$$r_{CC} = -2(K_C^i + K_{BC}^t)$$

$$r_{AB} = r_{BA} = +2K_{AB}^t;\quad r_{AC} = r_{CA} = 0;\quad r_{BC} = r_{CB} = +2K_{BC}^t; \tag{5.2}$$

$$r_{AO} = \mathfrak{M}_A;\quad r_{BO} = 2\,\mathfrak{M}_B;\quad r_{CO} = 2\,\mathfrak{M}_C.$$

Cu aceleași notații (4.3) din cazul precedent și cu noile notații

$$1+\frac{a'}{2}=s_1;\quad 1+b'=s_2;\quad 1+b''=s_3;\quad 1+c''=s_4'$$

$$s_1\cdot s_3+\frac{a''}{2}=s_5;\quad s_2\cdot s_4+c'=s_6';\quad s_1\cdot s_4'=s_7' \tag{5.4}$$

$$D=K_A^i+2K_B^i\cdot s_1+2K_C^i\cdot s_5\,,$$

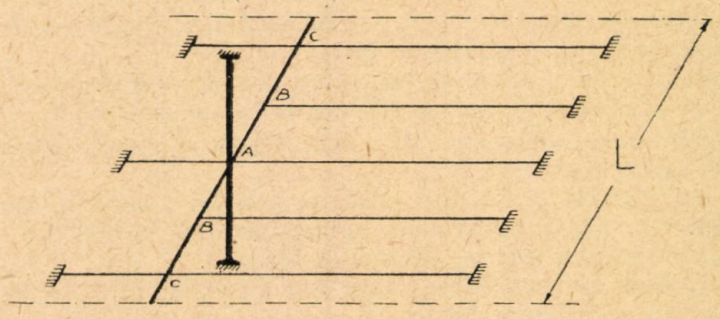


Fig. 11

rezultă soluțiile:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_A&=\frac{s_6'}{D}\cdot\mathfrak{M}_A+\frac{s_4'}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_B+\frac{1}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_C\\
\varphi_B&=\frac{s_4'}{D}\cdot\mathfrak{M}_A+\frac{s_7'}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_B+\frac{s_1}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_C\\
\varphi_C&=\frac{1}{D}\cdot\mathfrak{M}_A+\frac{s_1}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_B+\frac{s_5}{D}\cdot 2\,\mathfrak{M}_C.
\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Trecând la momente prin multiplicarea unghiurilor cu rigiditățile corespunzătoare (expresiile 4.6) și notând:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'&=\frac{K_A^i}{D}\cdot s_6';\quad \alpha''=\frac{K_A^i}{D}\cdot s_4';\quad \alpha'''=\frac{K_A^i}{D}\\
\beta'&=\frac{K_B^i}{D}\cdot s_4';\quad \beta''=\frac{K_B^i}{D}\cdot s_7';\quad \beta'''=\frac{K_B^i}{D}\cdot s_1\\
\gamma'&=\frac{K_C^i}{D};\quad \gamma''=\frac{K_C^i}{D}\cdot s_1;\quad \gamma'''=\frac{K_C^i}{D}\cdot s_5.
\end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

rezultă:

$$\left.\begin{aligned}
M_A^i&=-\alpha'\cdot\mathfrak{M}_A-\alpha''\cdot 2\,\mathfrak{M}_B-\alpha'''\cdot 2\,\mathfrak{M}_C\\
M_B^i&=-\beta'\cdot\mathfrak{M}_A-\beta''\cdot 2\,\mathfrak{M}_B-\beta'''\cdot 2\,\mathfrak{M}_C\\
M_C^i&=-\gamma'\cdot\mathfrak{M}_A-\gamma''\cdot 2\,\mathfrak{M}_B-\gamma'''\cdot 2\,\mathfrak{M}_C.
\end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Cu relațiile de verificare:

$$\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' = 1; \quad \alpha'' + 2\beta'' + 2\gamma'' = 1; \quad \alpha''' + 2\beta''' + 2\gamma''' = 1 \tag{5.9}$$

$$M_A^i + 2M_B^i + 2M_C^i = -(\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B + 2\mathfrak{M}_C). \tag{5.10}$$

Funcțiile care stabilesc valorile momentelor din fiecare nod al fiecărui sistem plan în care a fost descompus sistemul spațial fiind determinate, calculele se efectuează foarte ușor. Operațiile sunt următoarele:

a) Se determină coeficienții α', α'', α''', β', β'', β''', γ', γ'', γ''' pentru fiecare grindă longitudinală în funcție de elementele geometrice ale construcției, cu expresiile (2.7), (3.7), (4.7), sau (5.7).

b) Se stabilesc momentele de încastrare perfectă din încărcări pe grinzile secundare și pe stâlpi; se trec pe schema de calcul sub faza 1.

c) Se determină momentele M_A^i, M_B^i, M_C^i cu ajutorul expresiilor (2.8), (3.8), (4.8) sau (5.8).

d) Se repartizează momentele aflate la punctul *c* barelor încovoiate din nodul respectiv, exact ca în plan, proporțional cu coeficienții de repartiție la încovoiere; se trec pe schemă în faza 2.

e) Se transmit momentele dela faza 2 în capetele opuse ale barelor încovoiate; se trec pe schemă sub faza 3, exact ca în plan.

f) Se repetă operațiile *c*, *d*, *e*, până când corecțiunile sunt destul de mici. De obiceiu, două repetări sunt suficiente.

Aplicația 2 arată în detaliu mersul operațiilor.

Observație. Așa cum au fost deduse expresiile de calcul, se observă că metoda iterației prin aproximații succesive pentru unghiurile φ, poate fi utilizată în mod direct, în loc să se lucreze cu momente.

In acest caz, trebue folosite formulele (2.5), (3.5), (4.5) (5.5).

Schemele de calcul ar fi fost mai simple datorită faptului că la fiecare nod ar fi apărut numai câte o singură coloană de cifre.

Deoarece operația finală a trecerii dela unghiuri la momente este destul de anevoioasă, această metodă este mai puțin recomandabilă pentru eforturile din sarcini permanente.

Operațiile de aproximații succesive asupra unghiurilor φ duc mai repede la rezultat pentru liniile de influență, deoarece acolo nu mai apare necesitatea trecerii la valorile momentelor; la planșeele de construcții însă, nu se pune problema liniilor de influență.

De asemenea, operațiile reiterației asupra unghiurilor pot fi aplicate și la primul procedeu (indicat la început), pornind dela ecuațiile (1.10).

★

Cele de mai sus, precum și exemplele tratate presupun nodurile nedeplasabile. Pentru a ține seama de gradele de libertate a schemei, provenite din deplasările nodurilor, la sarcini verticale, sau, în special, la sarcini orizontale (vânt, efectul cutremurelor), se face uz tot de elementele stabilite aici, dând fiecărui etaj câte o deplasare distinctă.

Deoarece această a doua etapă de calcul nu necesită niciun element teoretic nou față de cele expuse, nu se mai tratează un exemplu special.

Aplicația 1. (Primul procedeu)

Elementele geometrice, schema de încărcare și rigiditățile tuturor barelor sunt trecute pe figura 12, *A*.

Rigiditățile la încovoiere au notată litera « *i* », iar rigiditățile la torsiune au notată litera « *t* » lângă valorile lor. De exemplu:

$$K^i_{AA_1} = 0{,}8 \; ; \quad K^t_{AB} = 0{,}4.$$

(Exemple pentru determinarea rigidităților sunt date în aplicația 2).

La fiecare nod, se scrie coeficientul de repartiție al fiecărei bare, ca un raport între rigiditatea barei și rigiditatea totală a nodului. De exemplu:

$$C_{AA_1} = \frac{0{,}8}{0{,}8 + 1{,}3 + 0{,}4} = 0{,}32; \quad C_{AB} = \frac{0{,}4}{0{,}8 + 1{,}3 + 0{,}4} = 0{,}16.$$

In fiecare nod va exista relația evidentă: $C_{AA_1} + C_{AA_2} + C_{AB} = 1$.

Operațiile sunt următoarele:

a) Se stabilesc momentele de încastrare perfectă pe grinzile transversale; se trec pe diagrama de calcul sub faza 1 (fig. 12 *B*).

b) Se repartizează momentele de încastrare din același nod cu semn schimbat, proporțional cu coeficientul de repartiție al fiecărui capăt de bară; se trec pe schemă sub faza 2.

c) Se transmit momentele dela faza 2 în capetele opuse ale barelor; se trec pe schemă sub faza 3. Momentele încovoietoare se transmit cu coeficientul de transmitere $\gamma^i = +\frac{1}{2}$, iar momentele de torsiune se transmit cu coeficientul de transmitere $\gamma^t = -1$.

De exemplu din faza 2 a rezultat în nodul *A*:

$$M^t_{AB} = -1{,}44 \text{ tm}.$$

Acest moment se transmite în capătul *B* al barei *AB* cu valoarea întreagă și cu semn schimbat, și se trece în faza 3:

$$M^t_{BA} = +1{,}44 \text{ tm}.$$

d) Se repetă operațiile (*b*) și (*c*), până când aproximația este considerată satisfăcătoare.

Insumând coloanele, se găsesc direct momentele încovoietoare în grinzile transversale și în stâlpi, precum și momentele de torsiune în grinda longitudinală.

Se observă că, dacă se încheie operațiile cu o fază 2, momentele din noduri își fac echilibru (au suma nulă), pe când momentele de torsiune de pe aceeași bară nu-și fac echilibru (au suma diferită de zero)

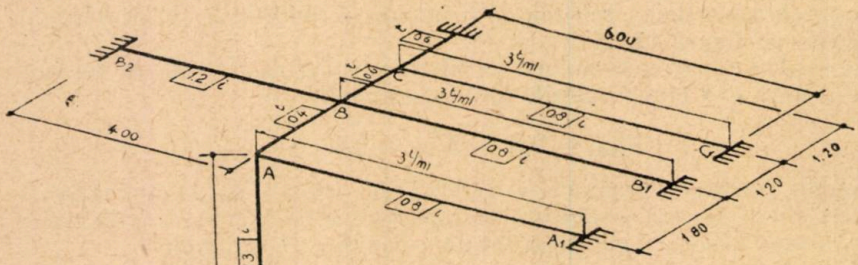
De exemplu:

$$M^t_{BC} = +0{,}64; \; M^t_{CB} = -0{,}75 \text{ și } M^t_{BC} + M^t_{CB} = -0{,}11 \neq 0.$$

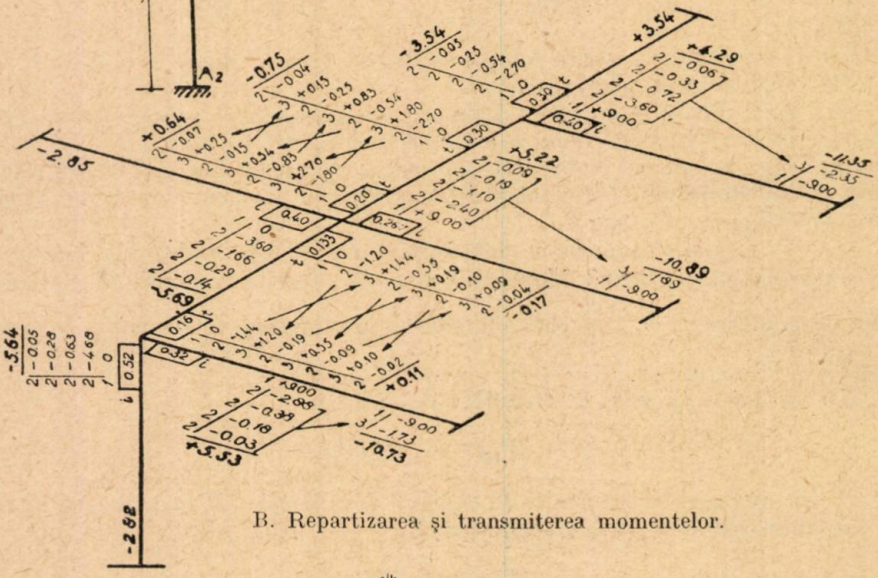
De aceea, pe diagrama de momente, a fost trecută o valoare medie. (fig. 12 *C*).

Dacă operațiile se terminau cu o fază 3, momentele de torsiune de pe aceeași bară își făceau echilibru, dar nodurile nu mai erau echilibrate.

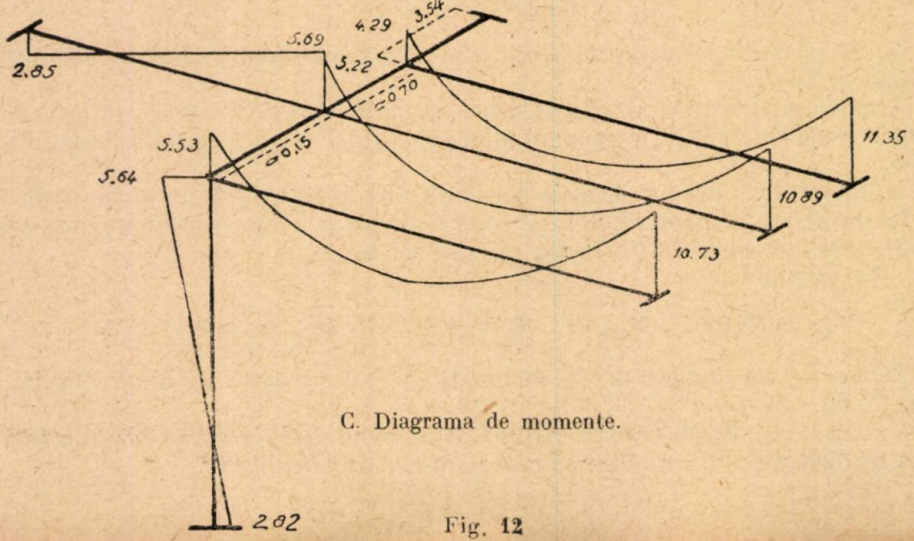
APLICAȚIA Nr. 1



A. Schema de încărcare.



B. Repartizarea și transmiterea momentelor.



C. Diagrama de momente.

Fig. 12

Observație. Aplicația a fost făcută pe un exemplu simplu, dar dacă am fi luat cazul unei construcții mai complicate, cu mai multe deschideri și mai multe etaje, schema de calcul ar fi devenit foarte greu de urmărit, iar convergența momentelor de torsiune ar fi fost foarte înceată.

Aceste inconveniente sunt remediate prin procedeul al doilea, după cum reiese din aplicația 2.

Aplicația 2 (Procedeul al doilea)

Construcția este arătată în figura 13. Se observă că, în panoul de lățime L, planșeul inferior are 4 grinzi transversale de câte două deschideri inegale;

APLICAȚIA Nr. 2

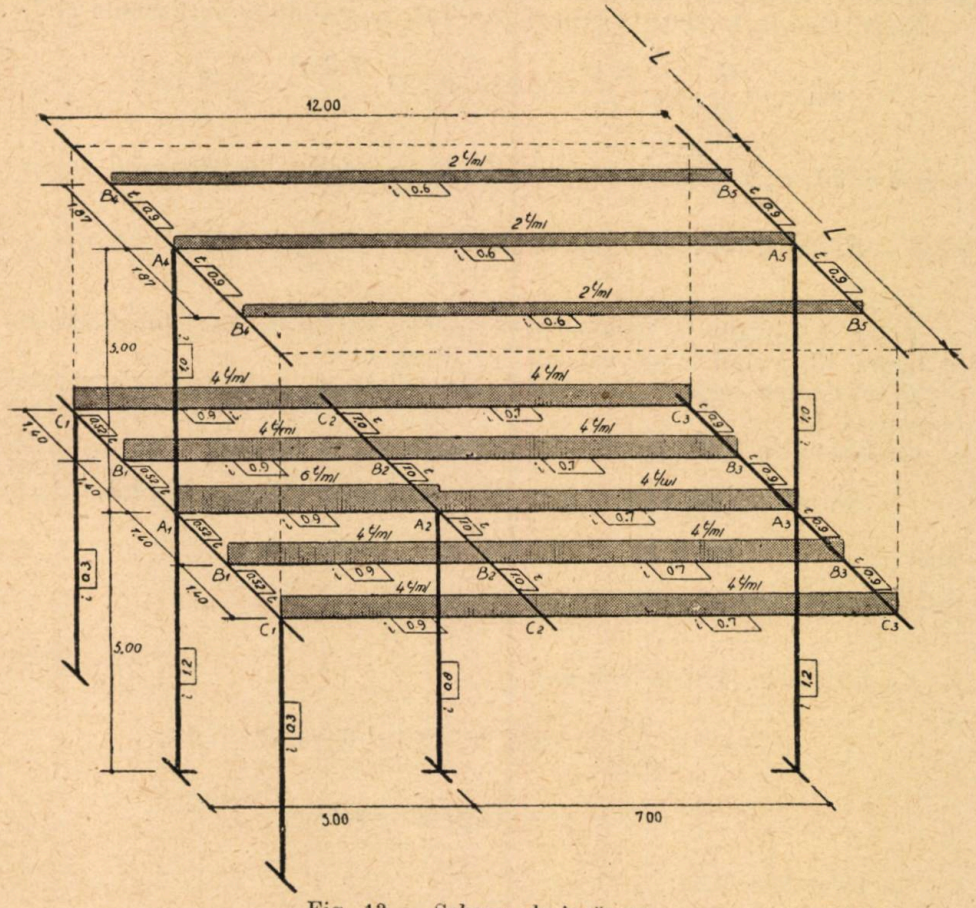


Fig. 13. — Schema de încărcare.

deci, 3 grinzi longitudinale cu elementele geometrice diferite: $A_1 - B_1 - C_1$, $A_2 - B_2 - C_2$ și $A_3 - B_3 - C_3$, dintre care prima are trei stâlpi, iar celelalte două câte un singur stâlp. Planșeul superior are trei grinzi transversale în panoul L, cu câte o singură deschidere și două grinzi longitudinale $A_4 - B_4$ și $A_5 - B_5$ cu câte un singur stâlp, prezentând caracteristice geometrice identice.

Operațiile sunt cele indicate în partea teoretică.

a) *Determinarea coeficienților* α, β, γ *pentru fiecare grindă longitudinală.*

Rigiditățile la încovoiere și la torsiune se determină cu formulele stabilite. De exemplu, rigiditatea la încovoiere a stâlpului $A_1 - A_4$, cu formula (1.6):

$$K^i_{A_1A_4} = \frac{I}{l} = \frac{50\ \text{dm}^4}{50\ \text{dm}} = 1\ \text{dm}^3.$$

Toate rigiditățile K^i ale grinzilor transversale și ale stâlpilor sunt trecute pe fiecare bară pe figura 13, având notată lângă valorile lor litera « i ».

Rigiditatea la torsiune a grinzii $A_1 - B_1$ se stabilește cu formula (1.7):

$$K^t_{A_1B_1} = \frac{G}{E} \cdot \eta_3 \cdot \frac{h.b^3}{4l} = 0{,}425 \cdot 0{,}229 \cdot \frac{7.3{,}5^3}{4.14} = 0{,}52\ \text{dm}^3,$$

unde $h = 70$ cm, $b = 35$ cm.; pentru $\frac{h}{b} = 2$, se găsește în *Manualul inginerului — Hütte*, p. 689, $\eta_3 = 0{,}229$. La beton, se ia $\frac{G}{E} = 0{,}425$.

Toate rigiditățile la torsiune sunt trecute pe fiecare bară longitudinală în figura 13, având lângă valorile lor litera « t ».

Determinarea coeficienților α, β, γ *la grinda* $A_1 - B_1 - C_1$ (4 nervuri în panoul L).

Cu formulele (1.8) se scrie:

$$K^i_A = 1{,}2 + 1 + 0{,}9 = 3{,}1;\ K^i_B = 0{,}9;\ K^i_C = 0\ 3 + 0{,}9 = 1{,}2,$$

apoi:

$$K^t_{AB} = K^t_{BC} = 0{,}52.$$

Cu formulele (4,3) se găsește:

$$a' = a'' = \frac{3{,}1}{0{,}52} = 5{,}96;\ b' = b'' = 0{,}9/0{,}52 = 1{,}73;$$

$$c' = c'' = 1{,}2/0{,}52 = 2{,}30.$$

Cu formulele (4.4):

$$s_1 = 1 + \frac{5{,}96}{2} = 3{,}98;\ s_2 = s_3 = 1 + 1{,}73 = 2{,}73;\ s_4 = 1 + \frac{2{,}30}{2} = 2{,}15;$$

$$s_5 = 3{,}98.\ 2{,}73 + \frac{5{,}96}{2} = 13{,}85;\ s_6 = 2{,}73.\ 2{,}15 + \frac{2{,}30}{2} = 7{,}02;$$

$$s_7 = 3{,}98.\ 2{,}15 = 8{,}55;\ D = 3{,}1 + 2.\ 0{,}9.\ 3{,}98 + 1{,}2.\ 13{,}85 = 26{,}87.$$

Cu formulele (4.7) se găsește:

$$\alpha' = \frac{3{,}1 \cdot 7{,}02}{26{,}87} = 0{,}811;\ \alpha'' = \frac{3{,}1 \cdot 2{,}15}{26{,}87} = 0{,}248;\ \alpha''' = \frac{3{,}1}{26{,}87} = 0{,}116.$$

$$\beta' = \frac{0{,}9 \cdot 2{,}15}{26{,}87} = 0{,}072;\ \beta'' = \frac{0{,}9 \cdot 8{,}55}{26{,}87} = 0{,}287;\ \beta''' = \frac{0{,}9 \cdot 3{,}98}{26{,}87} = 0{,}133.$$

$$\gamma' = \frac{1{,}2}{26{,}87} = 0{,}045;\ \gamma'' = \frac{1{,}2 \cdot 3{,}98}{26{,}87} = 0{,}178;\ \gamma''' = \frac{1{,}2 \cdot 13{,}85}{26{,}87} = 0{,}618.$$

Rezultatele se verifică cu formulele (4.9):

$$0{,}811 + 2 \cdot 0{,}072 + 0{,}045 = 1;\ 0{,}248 + 2 \cdot 0{,}287 + 0{,}178 = 1;$$

$$0{,}116 + 2 \cdot 0{,}133 + 0{,}618 = 1.$$

Determinarea coeficienților α, β, γ *la grinda* $A_2 - B_2 - C_2$.

$$K_A^i = 0{,}9 + 0{,}7 + 0{,}8 = 2{,}4;\ K_B^i = K_C^i = 0{,}9 + 0{,}7 = 1{,}6$$

$$K_{AB}^t = K_{BC}^t = 1{,}0.$$

Rezultă:

$$a' = a'' = \frac{2{,}4}{1} = 2{,}4;\ b' = b'' = c' = c'' = \frac{1{,}6}{1} = 1{,}6.$$

$$s_1 = 1 + \frac{2{,}4}{2} = 2{,}2;\ s_2 = s_3 = 1 + 1{,}6 = 2{,}6;\ s_4 = 1 + \frac{1{,}6}{2} = 1{,}8;$$

$$s_5 = 2{,}2 \cdot 2{,}6 + \frac{2{,}4}{2} = 6{,}92;\ s_6 = 2{,}6 \cdot 1{,}8 + \frac{1{,}6}{2} = 5{,}48;$$

$$s_7 = 2{,}2 \cdot 1{,}8 = 3{,}96;\ D = 2{,}4 + 2 \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}2 + 1{,}6 \cdot 6{,}92 = 20{,}50.$$

Apoi:

$$\alpha' = \frac{2{,}4 \cdot 5{,}48}{20{,}50} = 0{,}642;\ \alpha'' = \frac{2{,}4 \cdot 1{,}8}{20{,}50} = 0{,}211;\ \alpha''' = \frac{2{,}4}{20{,}50} = 0{,}117;$$

$$\beta' = \frac{1{,}6 \cdot 1{,}8}{20{,}50} = 0{,}140;\ \beta'' = \frac{1{,}6 \cdot 3{,}96}{20{,}50} = 0{,}309;\ \beta''' = \frac{1{,}6 \cdot 2{,}2}{20{,}50} = 0{,}171;$$

$$\gamma' = \frac{1{,}6}{20{,}50} = 0{,}078;\ \gamma'' = \frac{1{,}6 \cdot 2{,}2}{20{,}50} = 0{,}171;\ \gamma''' = \frac{1{,}6 \cdot 6{,}82}{20{,}50} = 0{,}541.$$

Relațiile de verificare (4.9) sunt satisfăcute.

Determinarea coeficienților α, β, γ *la grinda* $A_3 - B_3 - C_3$.

$$K_A^i = 1{,}2 + 1 + 0{,}7 = 2{,}9; \quad K_B^i = K_C^i = 0{,}7; \quad K_{AB}^t = K_{BC}^t = 0{,}9$$

$$a' = a'' = \frac{2{,}9}{0{,}9} = 3{,}22; \quad b' = b'' = c' = c'' = \frac{0{,}7}{0{,}9} = 0{,}78$$

$$s_1 = 1 + \frac{3{,}22}{2} = 2{,}61; \quad s_2 = s_3 = 1 + 0{,}78 = 1{,}78; \quad s_4 = 1 + \frac{0{,}78}{2} = 1{,}39$$

$$s_5 = 2{,}61 \cdot 1{,}78 + \frac{3{,}22}{2} = 6{,}25; \quad s_6 = 1{,}78 \cdot 1{,}39 + \frac{0{,}78}{2} = 2{,}86;$$

$$s_7 = 2{,}61 \cdot 1{,}39 = 3{,}63; \quad D = 2{,}9 + 2 \cdot 0{,}7 \cdot 2{,}61 + 0{,}7 \cdot 6{,}25 = 10{,}93$$

$$\alpha' = \frac{2{,}9 \cdot 2{,}86}{10{,}93} = 0{,}748; \quad \alpha'' = \frac{2{,}9 \cdot 1{,}39}{10{,}93} = 0{,}369; \quad \alpha''' = \frac{2{,}9}{10{,}93} = 0{,}265$$

$$\beta' = \frac{0{,}7 \cdot 1{,}39}{10{,}93} = 0{,}089; \quad \beta'' = \frac{0{,}7 \cdot 3{,}63}{10{,}93} = 0{,}232; \quad \beta''' = \frac{0{,}7 \cdot 2{,}61}{10{,}93} = 0.167$$

$$\gamma' = \frac{0{,}7}{10{,}93} = 0{,}064; \quad \gamma'' = \frac{0{,}7 \cdot 2{,}61}{10{,}93} = 0{,}167; \quad \gamma''' = \frac{0{,}7 \cdot 6{,}25}{10{,}93} = 0{,}401.$$

Determinarea coeficienților α, β *la grinzile* $A_4 - B_4$ și $A_5 - B_5$ (trei nervuri în panoul L).

$$K_A^i = 1 + 0{,}6 = 1{,}6; \quad K_B^i = 0{,}6; \quad K_{AB}^t = 0{,}9.$$

Formulele (3.3) dau:

$$a = \frac{1{,}6}{0{,}9} = 1{,}78; \quad b = \frac{0{,}6}{0{,}9} = 0{,}67.$$

Formulele (3.4) dau:

$$s_1 = 1 + \frac{1{,}78}{2} = 1{,}89; \quad s_2' = 1 + 0{,}67 = 1{,}67; \quad D = 1{,}6 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}89 = 3{,}87.$$

Formulele (3.7) dau:

$$\alpha' = \frac{1{,}6 \cdot 1{,}67}{3{,}87} = 0{,}690; \quad \alpha'' = \frac{1{,}6}{3{,}87} = 0{,}414;$$

$$\beta' = \frac{0{,}6}{3{,}87} = 0{,}155; \quad \beta'' = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}89}{3{,}87} = 0{,}293.$$

Relațiile de verificare (3.9) sunt satisfăcute.

b) *Momentele de încastrare perfectă* sunt trecute direct pe schema de calcul (fig. 14), sub faza 1.

De exemplu:

pe bara $B_1 - B_2$: $\mathfrak{M}_{B1} = \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 5^2 = 8{,}33$ tm.

c) și d) *Determinarea momentelor M^i și repartizarea lor la barele încovoiate.*
Prima operație de repartizare pe linia $A_1 - B_1 - C_1$.
Din schemă, rezultă:

$$\mathfrak{M}_A = +12{,}50; \quad 2\mathfrak{M}_B = +16{,}66; \quad \mathfrak{M}_C = +8{,}33.$$

Formulele (4.8) dau:

$$M_A = -\alpha' \cdot \mathfrak{M}_A - \alpha'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \alpha''' \cdot \mathfrak{M}_C = -$$
$$-0{,}811 \cdot 12{,}50 - 0{,}248 \cdot 16{,}66 - 0{,}116 \cdot 8{,}33 = -15{,}25$$

$$M_B = -\beta' \cdot \mathfrak{M}_A - \beta'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \beta''' \cdot \mathfrak{M}_C = -$$
$$-0{,}072 \cdot 12{,}50 - 0{,}287 \cdot 16{,}66 - 0{,}133 \cdot 8{,}33 = -6{,}78$$

$$M_C = -\gamma' \cdot \mathfrak{M}_A - \gamma'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \gamma''' \cdot \mathfrak{M}_C = -$$
$$-0{,}045 \cdot 12{,}50 - 0{,}178 \cdot 16{,}66 - 0{,}618 \cdot 8{,}33 = -8{,}68.$$

Relația de verificare (4.10) este satisfăcută.
Momentele M_A, M_B, M_C se repartizează la barele încovoiate din nodurile $A_1 - B_1 - C_1$, proporțional cu coeficienții de repartiție calculați ca în plan.
De exemplu, în capătul A_1 al barei $A_1 - A_2$ momentul va fi:
$M = 0{,}290 \; M_A = -0{,}290 \cdot 15{,}25 = -4{,}42$ și este trecut direct pe figura 14, în faza 2. La fel se calculează și se trec pe schemă toate celelalte momente.
Remarcăm că, în nodurile B_1, B_3, C_3, B_4, B_5, unde există o singură bară încovoiată, coeficientul de repartiție este 1.
Prima operație de repartizare pe linia $A_2 - B_2 - C_2$.

$$\mathfrak{M}_A = -12{,}50 + 16{,}33 = +3{,}83; \quad 2\mathfrak{M}_B = 2(-8{,}33 + 16{,}33) = +16;$$
$$\mathfrak{M}_C = -8{,}3 + 16{,}3 = 8.$$

$$M_A = -\alpha' \mathfrak{M}_A - \alpha'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \alpha''' \cdot \mathfrak{M}_C = -$$
$$-0{,}642 \cdot 3{,}83 - 0{,}211 \cdot 16 - 0{,}117 \cdot 8 = -6{,}77.$$

$$M_B = -\beta' \mathfrak{M}_A - \beta'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \beta''' \cdot \mathfrak{M}_C = -$$
$$-0{,}140 \cdot 3{,}83 - 0{,}309 \cdot 16 - 0{,}171 \cdot 8 = -6{,}85.$$

$$M_C = -\gamma' \mathfrak{M}_A - \gamma'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \gamma''' \cdot \mathfrak{M}_C = -$$
$$-0{,}078 \cdot 3{,}83 - 0{,}171 \cdot 16 - 0{,}541 \cdot 8 = -7{,}36.$$

Aceste momente se repartizează la capetele barelor din nodurile $A_2 - A_2 - C$ și sunt trecute pe figura 14, în faza 2.
Prima operație de repartizare pe linia $A_3 - B_3 - C_3$.

$$\mathfrak{M}_A = -16{,}33; \quad 2\mathfrak{M}_B = -32{,}66; \quad \mathfrak{M}_C = -16{,}33.$$

$$M_A = -\alpha' \mathfrak{M}_A - \alpha'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \alpha''' \mathfrak{M}_C = +$$
$$+0{,}758 \cdot 16{,}33 + 0{,}369 \cdot 32{,}66 + 0{,}265 \cdot 16{,}33 = +28{,}70;$$

$$M_B = -\beta' \mathfrak{M}_A - \beta'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \beta''' \mathfrak{M}_C = +$$
$$+0{,}089 \cdot 16{,}33 + 0{,}232 \cdot 32{,}66 + 0{,}167 \cdot 16{,}33 = +11{,}77;$$

$$M_C = -\gamma' \mathfrak{M}_A - \gamma'' \cdot 2\mathfrak{M}_B - \gamma''' \mathfrak{M}_C = +$$
$$+0{,}064 \cdot 16{,}33 + 0{,}167 \cdot 32{,}66 + 0{,}401 \cdot 16{,}33 = +13{,}08.$$

Prima operație de repartizare pe linia $A_4 - B_4$ *și* $A_5 - B_5$.

$$\mathfrak{M}_A = +24{,}00;\quad 2\mathfrak{M}_B = +2 \cdot 24{,}00 = +48{,}00;$$

$$M_A = -\alpha' \mathfrak{M}_A - \alpha'' \cdot 2\mathfrak{M}_B = -0{,}690 \cdot 24 - 0{,}414 \cdot 48 = -36{,}40$$

$$M_B = -\beta' \mathfrak{M}_A - \beta'' \cdot 2\mathfrak{M}_B = -0{,}155 \cdot 24 - 0{,}293 \cdot 48 = -17{,}80.$$

e) După ce s'a făcut prima repartizare la toate nodurile grinzilor longitudinale, se efectuează *prima operație de transmitere, notată cu faza* 3 *în figura* 14, *exact ca în plan cu coeficientul de transmitere* $\gamma = \frac{1}{2}$.

De exemplu, pe bara $A_1 - A_2$: $M_{A_2 A_1} = \frac{1}{2} \cdot M_{A_1 A_2} = -\frac{1}{2} \cdot 4{,}42 = -2{,}21$.

Aceste operații sunt făcute direct pe figura 14.

Se face apoi a doua repartizare, având ca momente de încastrare momentele transmise, notate pe figura 14 cu faza 3.

A doua operație de repartizare pe linia $A_1 - B_1 - C_1$.

$$\mathfrak{M}_A = -1{,}27 - 11{,}37 = -12{,}64;\quad 2\mathfrak{M}_B = -2 \cdot 1{,}92 = -3{,}84;\quad \mathfrak{M}_C = -2{,}07.$$

$$M_A = +0{,}811 \cdot 12{,}64 + 0{,}248 \cdot 3{,}84 + 0{,}116 \cdot 2{,}07 = +11{,}44;$$

$$M_B = +0{,}072 \cdot 12{,}64 + 0{,}287 \cdot 3{,}84 + 0{,}133 \cdot 2{,}07 = +2{,}29;$$

$$M_C = +0{,}045 \cdot 12{,}64 + 0{,}178 \cdot 3{,}84 + 0{,}618 \cdot 2{,}07 = +2{,}53.$$

A doua operație de repartizare pe linia $A_2 - B_2 - C_2$.

$$\mathfrak{M}_A = -2{,}21 + 3{,}46 = 1{,}25;\quad 2\mathfrak{M}_B = 2(5{,}83 - 3{,}39) = +4{,}88;$$

$$\mathfrak{M}_C = 6{,}54 - 3{,}25 = +3{,}29.$$

$$M_A = -0{,}642 \cdot 1{,}25 - 0{,}211 \cdot 4{,}88 - 0{,}117 \cdot 3.29 = -2{,}22;$$

$$M_B = -0{,}140 \cdot 1{,}25 - 0{,}309 \cdot 4{,}88 - 0{,}171 - 3{,}29 = -2{,}25;$$

$$M_C = -0{,}078 \cdot 1{,}25 - 0{,}171 \cdot 4{,}88 - 0{,}541 - 3{,}29 = -2{,}70.$$

A doua operație de repartizare pe linia $A_3 - B_3 - C_3$

$$\mathfrak{M}_A = -0{,}99 + 11{,}37 = +10{,}38;\quad 2\mathfrak{M}_B = -2.1{,}50 = -3;\quad \mathfrak{M}_C = -1{,}61.$$

$$M_A = -0{,}758 . 10{,}38 + 0{,}369 . 3 + 0{,}265 . 1{,}61 = -6{,}33;$$

$$M_B = -0{,}089 . 10{,}38 + 0{,}232 . 3 + 0{,}167 . 1{,}61 = +0{,}04;$$

$$M_C = -0{,}064 . 10{,}38 + 0{,}167 . 3 + 0{,}401 . 1{,}61 = +0{,}48.$$

A doua operație de repartizare pe linia $A_4 - B_4$

$$\mathfrak{M}_A = -2{,}46 + 6{,}82 = +4{,}36;\quad 2\mathfrak{M}_B = 2.8{,}90 = +17{,}80$$

$$M_A = -0{,}690 . 4{,}36 - 0{,}414 . 17.80 = -10{,}38$$

$$M_B = -0{,}155 . 4{,}36 - 0{,}293 . 17{,}80 = -5{,}89.$$

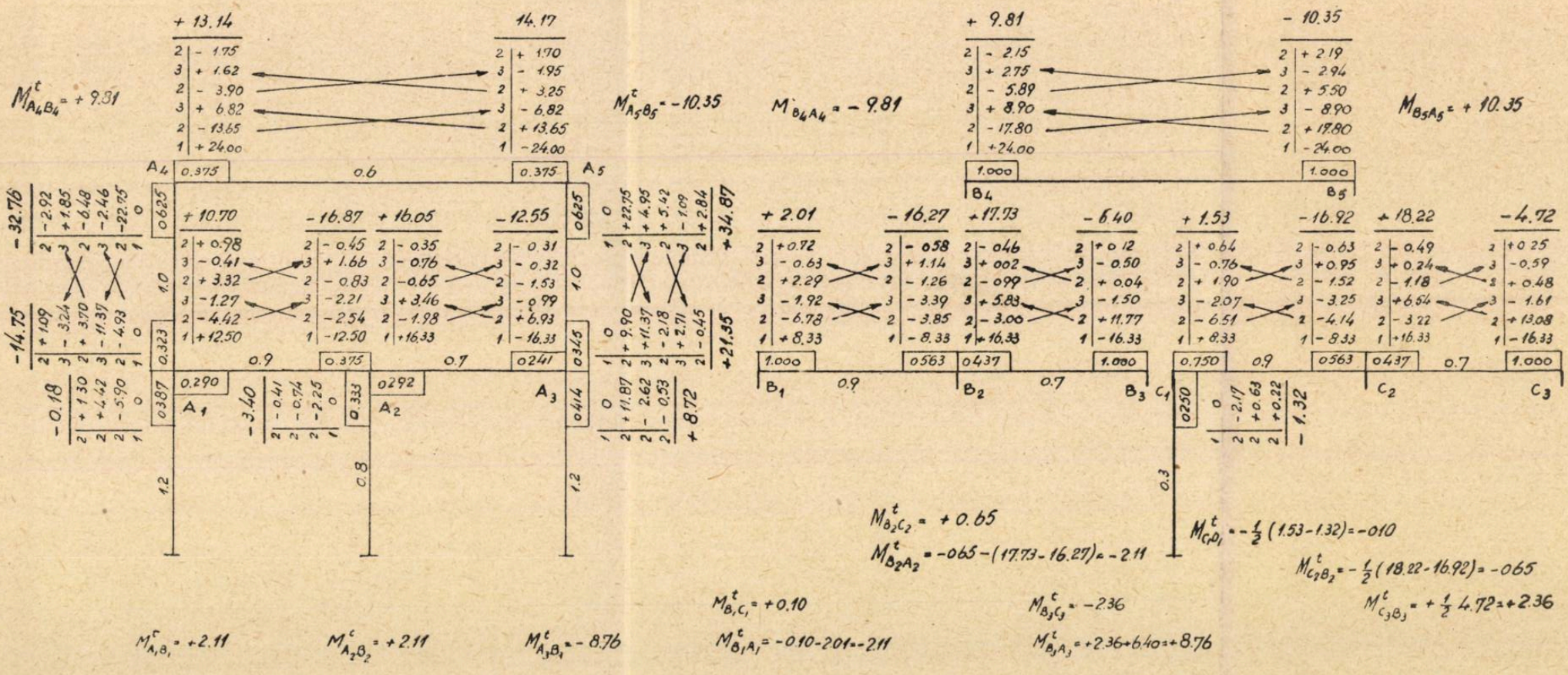


Fig. 14. — Schema de calcul.

A doua operație de repartizare pe linia $A_5 - B_5$

$\mathfrak{M}_A = -6{,}82 + 4{,}95 = -1{,}87\,;\quad 2\,\mathfrak{M}_B = -17{,}80$

$M_A = +0{,}690\,.\,1{,}87 + 0{,}414.17{,}80 = +8{,}67$

$M_B = +0{,}155\,.\,1{,}87 + 0{,}293.17{,}80 = +5{,}50.$

In general, două repartizări sunt suficiente și numai în anumite părți ale construcției poate apărea necesitatea unei a treia repartizări.

APLICAȚIA Nr. 2

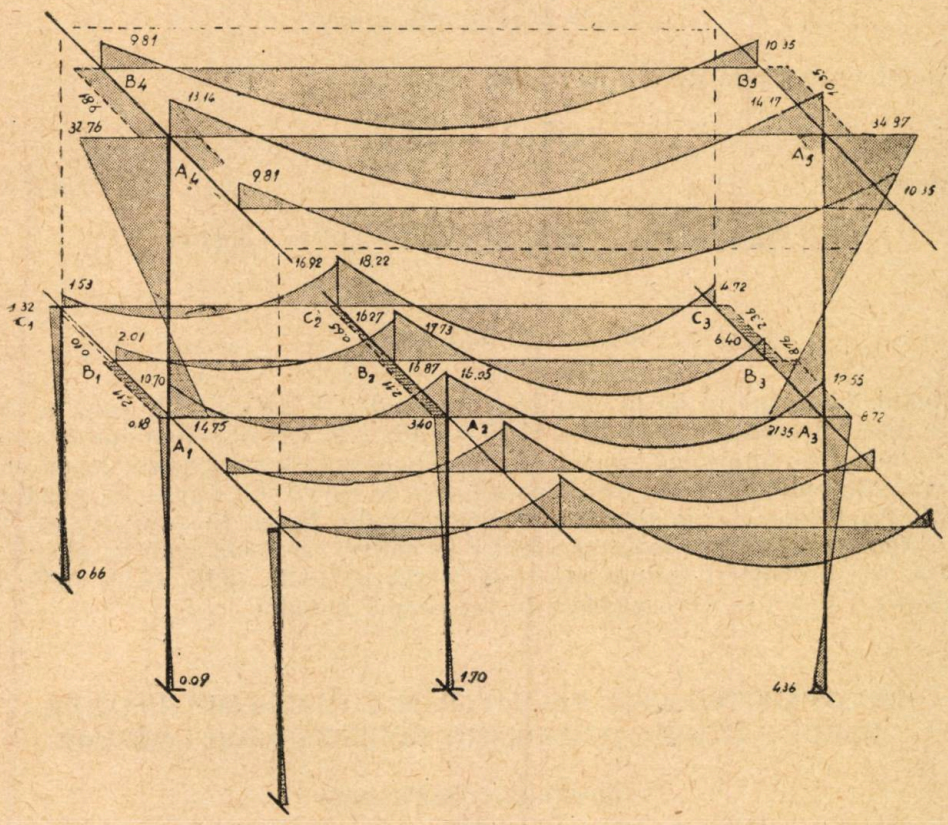


Fig. 15 — Diagrama momentelor.

In cazul de față, s'a făcut și o a treia repartizare, datorită faptului că etajul superior are o singură deschidere față de cele două deschideri ale etajului inferior.

Momentele definitive se află prin însumarea coloanelor de pe schema din figura 14, iar diagramele momentelor sunt trecute în figura 15.

Pe diagrama de calcul se observă că diferențele provenind din a treia repartizare sunt mici și calculul a fost oprit aici.

Evident, suma momentelor încovoietoare din același nod nu este nulă. Diferența până la zero este completată de momentele de torsiune din grinzile longitudinale, acesta fiind chiar mijlocul lor de determinare.

De exemplu, momentele de torsiune de pe grinda $A_1 - B_1 - C_1$:

Se începe dela limita panoului, adică din punctul C_1, unde se știe că din motive de simetrie, momentul de torsiune trece prin zero; deci,

$$2M^t_{C_1B_1} + M^i_{C_1} = 0, \text{ de unde: } M^t_{C_1B_1} = -\frac{M^i_{C_1}}{2} = -\frac{1{,}53 - 1{,}32}{2} = -0{,}10.$$

Se trece apoi la nodul B_1 unde condiția de echilibru se scrie:

$$M^t_{B_1} + M^t_{B_1C_1} + M^t_{B_1A_1} = 0;$$

dar, din convenția de semne rezultă că:

$$M^t_{B_1C_1} = -M^t_{C_1B_1},$$

(deci:

$$M^t_{B_1A_1} = M^t_{C_1B_1} - M^i_{B_1} = -0{,}10 - 2{,}01 = -2{,}11 \text{ tm}$$

$$M^t_{A_1B_1} = -M^t_{B_1A_1} = +2{,}11 \text{ tm}.$$

Nodul A_1 trebue să fie în echilibru; deci: $M^i_{A_1} + 2M^t_{A_1B_1} = 0$, ceea ce se verifică, deoarece $(+10{,}70 - 14{,}75 - 0{,}18) + 2.2{,}11 = -0{,}01$ aprox. $= 0$.

La fel se determină momentele de torsiune pe toate grinzile longitudinale, așa cum observăm direct pe schema de calcul din figura 14, rezultatele fiind desenate pe diagrama momentelor din figura 15.

Observație. Pentru evitarea erorilor de calcul, care sunt greu de identificat, este necesar ca toate relațiile de verificare (2,9), (3,9), (4,9), (5,9) și (2,10)...(5,10) să fie controlate în tot timpul lucrului.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ РАМ С ГЛАВНЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ И ВТОРОСТЕПЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ БАЛКАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей статье исследуется пространственный расчет рам с главными продольными балками и второстепенными поперечными балками, с учетом кручения продольных балок.

Сначала излагается обобщение в пространстве метода последовательных приближений в плоскости, который легко применяем на практике в задачах о местном кручении.

Затем излагается метод разложения пространственной системы на известное число плоских систем, равное числу второстепенных балок, отличающийся от метода последовательных приближений лишь тем, что момент, который должен быть распределен в одном узле, есть легко определяемая линейная функция всех моментов защемления второстепенных балок, лежащих на той же продольной балке.

LE CALCUL SPATIAL DES CADRES À POUTRES-MAÎTRESSES LONGITUDINALES ET POUTRELLES TRANSVERSALES

(RÉSUMÉ)

On traite dans cet article du calcul des cadres à poutres-maîtresses longitudinales et poutrelles transversales, en tenant compte de la torsion des poutres-maîtresses.

On expose d'abord une généralisation dans l'espace de la méthode des approximations successives dans le plan, facile à appliquer dans le cas des problèmes de torsion locale.

On expose ensuite une méthode comportant la décomposition du système spatial en un nombre de systèmes plans, égal au nombre des poutrelles, méthode différant de celle des approximations successives seulement par le fait que le moment à répartir dans un noeud est une fonction linéaire — facile à établir — de tous les moments d'encastrement des poutres transversales partant de la même poutre longitudinale.

BIBLIOGRAFIE

1. I. P. Procofiev, *Statica Construcțiilor*. O.P.E.D., v. II, 1950.
2. N. I. Rabinovici, *Rasceot ram (Calculul cadrelor)*. Moscova, 1934.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

METALURGIE

PRODUSE REFRACTARE FORSTERITICE OBŢINUTE ÎN FAZĂ PILOT DIN SERPENTIN AMELIORAT, FĂRĂ ADAUSURI

DE

V. SINIANSKY, AL. BRANISKI, L. SOLOMON

şi

C. SĂVINEANU

Scopul lucrării de faţă a fost verificarea procesului tehnologic, stabilit şi rezultat din lucrările noastre anterioare efectuate în laborator.

MATERIA PRIMĂ

S'a folosit ca materie primă serpentin ciuruit, spre deosebire de cazurile precedente, când serpentinul era folosit brut, neciuruit.

Serpentinul fiind în parte degradat la suprafaţă spre magnezit, se obţine, prin ciuruire, aproximativ 3—5% serpentin ameliorat, cu un conţinut mai mare de oxid de magneziu, după cum reiese din analizele următoare:

	Serpentin brut %	Serpentin brut, calcinat %	Serpentin ameliorat %	Serpentin ameliorat, calcinat %
P.C.	17,56	—	26,52	—
SiO_2	30,11	36,43	21,80	29,50
Fe_2O_3	9,30	11,23	7,04	9,40
Al_2O_3	3,62	4,34	1,09	1,80
CaO	urme	urme	urme	urme
MgO	39,67	48,00	43,75	59,30

Raportul MgO/SiO_2 al serpentinului ameliorat depăşeşte cu mult valoarea de 1,33, rezultată din formula forsteritei.

Pentru a transforma acest serpentin ameliorat într'un produs refractar forsteritic, nu este deci necesar niciun adaus de oxid de magneziu.

MINERALIZATORUL

Ca mineralizator, s'a utilizat şi de data aceasta fosfatul trisodic, cu următoarea compoziţie chimică:

Insolubil în apă	0,08%
P_2O_5	17,36%
Alcalinitate (NaOH)	0,75%
Sulfaţi (SO_3)	3,15%
Cloruri (Cl)	0,16%

LIANTUL

Ca liant, la fasonare, s'a folosit sulfitul de celuloză, cu următoarea compoziţie chimică:

Apă	86,05%		
Substanţe organice	11,97%		
Cenuşă	1,98%	CaO	0,70%
		SO_3	0,60%
		nedozat	0,68%

Prepararea şamotei forsteritice

Serpentinul ameliorat (necalcinat) a fost măcinat şi trecut prin sita de 0,2 mm, apoi, a fost amestecat cu 15% apă, în care s'a disolvat mineralizatorul (2% fosfat trisodic). Din pasta obţinută prin omogenizare, s'au fasonat, la presa cu berbece, cuburi cu latura de 7 cm. După uscare, cuburile au fost arse la 1420°C, menţinându-se temperatura constantă timp de 3 ore. Ridicarea temperaturii s'a făcut în 45 de ore, iar răcirea, în alte 33 de ore.

Caracteristicile tehnologice ale şamotei forsteritice

Retragerea la ardere	18,48%
Greutatea volumetrică	2,53 g/cm³
Greutatea specifică	3,40 g/cm³
Absorpţia de apă	8,95%
Porozitatea aparentă	22%
Porozitatea reală	25%
Rezistenţa la compresiune	491 kg/cm²

Prepararea pastei şi fasonarea cărămizilor

Şamota forsteritică, obţinută prin ardere, a fost măcinată în granule de 2—5 mm ø şi granule fine sub 0,2 mm ø. Pasta s'a obţinut întrebuinţând o compoziţie granulometrică discontinuă, cu următoarea granulaţie:

50% granule de 2—5 mm Ø
50% granule fine sub 0,2 mm Ø

la care s'a adăugat ca liant, sulfit de celuloză (7,5%).

Liantul a fost diluat cu apă pentru a se obţine densitatea 1,025. Şamota forsteritică, având compoziţia granulometrică de mai sus, a fost omogenizată, atât prin amestecare în stare uscată, cât şi prin amestecare în stare umedă, după adăugarea liantului. Din pasta bine omogenizată, s'au fasonat prin presare la 200 kg/cm², la o presă hidraulică, 60 de cărămizi de dimensiunea 12,5/12,5/7 cm.

Arderea cărămizilor

După uscare, cărămizile au fost arse timp de 5 ore, într'un cuptor cu gaz de aproximativ 0,3 m³ spațiu de ardere, la 1450°C. Ridicarea temperaturii s'a făcut în 48 de ore, iar răcirea în alte 28 de ore.

Caracteristicile tehnologice ale produselor refractare forsteritice

Retragerea la ardere	1,62%
Retragerea ulterioară	0,57%
Absorpția de apă	6,60%
Greutatea volumetrică	2,67 g/cm³
Greutatea specifică	3,42 g/cm³
Porozitatea aparentă	18%
Porozitatea reală	22%
Rezistența la compresiune	678 kg/cm²
Refractaritatea	C.S.39 (1880°C)

Determinând simultan conductibilitatea termică la o parte din cărămizile forsteritice obținute în fază pilot, precum și la un număr egal de cărămizi refractare de șamotă și cărămizi refractare magnezitice, s'au constatat următoarele:

1. Intre 800° și 1500° C, conductibilitatea termică a produselor refractare de șamotă este mai mică decât conductibilitatea termică a produselor refractare forsteritice, care, la rândul ei, este mai mică decât conductibilitatea termică a produselor refractare magnezitice.

2. Conductibilitatea termică a cărămizilor refractare forsteritice este, la 800°C, mai aproape de conductibilitatea termică a cărămizilor refractare de șamotă decât de conductibilitatea termică a cărămizilor refractare magnezitice. La 1500° C, conductibilitatea termică a produselor refractare forsteritice este și mai aproape de conductibilitatea produselor refractare de șamotă, fiind, în același timp, relativ departe de conductibilitatea termică a produselor refractare magnezitice.

3. La 800°C, raportul dintre conductibilitățile termice este, pentru cărămizile de șamotă, cărămizile forsteritice și cărămizile magnezitice, de 100:120:167. La 1500°C, acest raport devine 100:101:113.

4. Dacă diferența dintre conductibilitățile termice ale celor trei produse refractare studiate este mai mare la temperaturi joase, odată cu creșterea temperaturii această diferență se micșorează din ce în ce mai mult.

TABLOU COMPARATIV

Caracteristicile tehnologice ale produselor refractare forsteritice

obținute în:	fază de laborator, din serpentin brut cu adaus de magnezie	fază de laborator, din serpentin brut cu adaus de deșeuri de cărămizi magnezitice	fază pilot, din serpentin ameliorat, fără adausuri
Greutatea volumetrică g/cm³	2,63	2,48	2,67
Greutatea specifică g/cm³	3,42	3,41	3,42
Porozitatea reală %	23	27	22
Rezistența la compresiune kg/cm²	498	429	678
Refractaritatea °C	1850—1880	1880	1880

CONCLUZIUNI

Din studiul de faţă reiese că şi fără adaus de oxid de magneziu, se obţin aceleaşi produse refractare forsteritice de bună calitate, dacă se ameliorează serpentinul prin ciuruire, astfel ca, în serpentinul ameliorat, raportul MgO/SiO_2 să treacă de 1,33. Având în vedere că prin ciuruirea serpentinului brut rezultă un procent foarte redus de serpentin ameliorat (numai 3—5%), este mult mai economică folosirea serpentinului brut cu adaus de oxid de magneziu pentru fabricarea produselor refractare forsteritice.

Produsele refractare forsteritice sunt mai rele conducătoare de căldură decât produsele refractare magnezitice, dar mai bune conducătoare de căldură decât produsele refractare de şamotă. La temperaturi ridicate, conductibilitatea termică a produselor refractare forsteritice se apropie foarte mult de conductibilitatea termică a produselor refractare de şamotă.

Din această lucrare rezultă că procesul tehnologic folosit la obţinerea produselor refractare forsteritice în laborator se aplică, fără modificare, şi în fază pilot.

Institutul de Cercetări şi Proiectări Miniere şi Metalurgice al Ministerului Metalurgiei Bucureşti

Institutul de Metalurgie şi Mecanică Aplicată al Academiei R.P.R., Bucureşti.

ФОРСТЕРИТОВЫЕ ОГНЕУПОРЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ИЗ УЛУЧШЕННОГО СЕРПЕНТИНА, БЕЗ ПРИМЕСЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Были получены форстеритовые огнеупоры посредством применения серпентина, улучшенного отсеиванием, без прибавления магнезии.

Разница качеств между этим продуктом и полученными раньше с прибавлением магнезии к неулучшенному серпентину не была установлена.

Применение улучшенного серпентина для изготовления форстеритовых огнеупоров неэкономно из-за слишком незначительного улучшения выхода.

PRODUITS RÉFRACTAIRES FORSTÉRITIQUES OBTENUS DE LA SERPENTINE AMÉLIORÉE, SANS ADDITION DE MAGNÉSIE, DANS UNE INSTALLATION PILOTE

(RÉSUMÉ)

Des produits réfractaires forstéritiques ont été obtenus dans une installation pilote sans addition de magnésie, en utilisant la serpentine améliorée par tamisage.

Une différence de qualité entre ces produits et ceux obtenus auparavant, avec addition de magnésie à la serpentine non améliorée, n'a pas été constatée.

L'utilisation de la serpentine améliorée à la fabrication des produits réfractaires forstéritiques n'est pas économique à cause d'un trop faible rendement d'amélioration.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

TRATAMENTUL TERMIC AL FONTELOR CU GRAFIT GLOBULAR

DE

D. RAŞEEV

Folosirea fontei cu grafit globular ia amploare din ce în ce mai mare. Se toarnă şi se încearcă în exploatare piese noi pentru cele mai felurite utilizări, iar lărgirea câmpului de aplicare, precum şi folosirea ei raţională trebue să constitue o sarcină a oamenilor de ştiinţă, a inginerilor şi tehnicienilor care lucrează în domeniul metalurgiei prelucrătoare şi a proiectării de maşini.

Problemele legate de tehnologia fabricaţiei, proprietăţii fizice şi mecanice şi aplicarea în practică a fontei globulare au fost tratate într'o serie de articole din revistele de specialitate.

In lucrarea de faţă ne vom ocupa de tratamentul termic al acestei fonte şi de cifrele calitative care se obţin.

In stare turnată, putem obţine două feluri de fonte cu grafit globular:

1. Cu structură perlitică din turnare, eventual cu puţină ferită în jurul globulelor de grafit. Pentru aceasta, trebue să avem un conţinut relativ scăzut de siliciu (pentru secţ. de 25—40 mm înainte de tratare cu Mg şi Fe Si 3,5—3,9%C; 1,5—1,8% Si, iar după tratare 1,8—2,1% Si). Se obţin cifre calitative mecanice $\sigma_b = 55-65$ kg/cm²; $\delta_5 = 1-2\%$, (epruveta STAS 200—49).

2. Cu structură feritică din turnare. Pentru aceasta, trebue să avem un conţinut relativ ridicat de siliciu (pentru secţ. de 25—40 mm înainte de tratare cu Mg şi FeSi 3,5—3,9%C, 1,8—2,1%, Si, iar după tratare 2,1—2,4%Si). Se obţin cifre calitative mecanice $\sigma_b = 45-55$ kg/cm² $\delta_5 = 2-8\%$ (epruveta STAS 200—49).

Turnând într'o uzină din această fontă diferite piese pentru a obţine structură feritică şi alungire cât mai mare, am aplicat, folosind datele literaturii tehnice sovietice, tratamentul de maleabilizare prin recoacere timp de 3—6 ore la 720°—750°C. De asemenea, am aplicat o recoacere dublă (recoacere în trepte), întâi 1—2 ore la 860°—900° C, cu scopul de a descompune eventuala cimentită liberă şi de a obţine o structură fină, urmată de o a doua recoacere de 3—6 ore la 720°—750°C, pentru a obţine o structură feritică. Aceste tratamente duc la o mărire apreciabilă a alungirii, mai ales când tratăm fontele cu grafit globular cu structură de turnare perlitică. In acest caz, conţinutul de siliciu este mai scăzut. Or, se ştie că siliciul se disolvă în ferită şi scade în mod

apreciabil plasticitatea acestuia (vezi influența siliciului asupra calităților fierului pur), ceea ce explică influența negativă asupra alungirii a unui conținut ridicat de siliciu.

In cazul tratării termice a fontei perlitice din turnare, se obține $\sigma_b = 45—55$ kg/mm²; $\delta_5 = 10—23\%$.

Pentru a avea calități plastice maxime, trebue să avem un conținut cât mai scăzut de P și Mn.

In literatura tehnică apărută până în prezent (1), (2), (3) nu este tratată problema altor metode de tratare termică a acestor fonte și a transformărilor structurale ce intervin, pentru lămurirea cărora am întreprins o serie de încercări.

I. Am determinat variația durității și modificarea structurii ce are loc prin călire la diferite temperaturi.

S'a folosit o fontă elaborată la cubilou, tratată cu electron și ferosiliciu. Compoziția chimică a fost:

Analiza chimică	C%	Si%	Mn%	P%	S%	Mg%
Inainte de globulizare	4,12	2,03	0,79	0,13	0,017	—
După globulizare .	3,48	2,62	0,75	0,10	urme	0,11

S'au turnat trefle cu secțiune de 50 mm, din care s'au strunjit bare de 30 mm.

Calități mecanice în stare turnată $\sigma_b = 53$kg/cm²

$$\delta_5 = 5{,}2\% \quad H_B = 179 \text{ kg/cm}^2.$$

Recopt în trepte $\sigma_b = 44$ kg/mm² $\delta_5 = 10{,}4\%$

$$H_B = 149 \text{ kg/cm}^2.$$

Probele de călire în uleiu au dat următoarele rezultate (timpul de menținere la temperatură 1 1/2 ore) (fig. 1):

Temperatură de călire	In stare turnată	720°C	750	820	860	880
H_B kg/cm²	179	149	171 192	395 388	492 485	499 495

S'au făcut câte două probe.

Structură martensitică se obține prin călire dela 860° —880°C. La temperaturi de călire mai mari, duritatea scade, iar în structură apare austenită.

Probele călite în apă au crăpat chiar atunci când am utilizat călirea întreruptă (întâi apă, apoi la 350°—450° trecut în uleiu). Această fontă este predispusă într'o măsură mult mai mare la crăpare în timpul călirii, decât fontele obișnuite sau fontele modificate.

La alte probe, în urma călirii la 860°—880°C s'au obținut durități până la 600 H^B. Variația durității în funcție de temperatura de călire păstrează întotdeauna aceeași alură.

Din cele de mai sus rezultă că:

1. Curba variației durității în funcție de temperatura de călire este similară fontelor obișnuite.

2. Cu creșterea temperaturii de călire până la 750° C se observă o scădere a durității. In structură apare ferită. Stabilitatea termodinamică a cimentitului din eutectoid este mică. A. A. Vasilenco și M. S. Grigorev (4) studiind această problemă au arătat că în cazul fontelor modificate și în special dacă se folosesc încărcături la cubilou cu conținut ridicat de fier vechiu, această stabilitate este maximă și în mod practic nu se constată scăderea durității și apariția feritei. Duritatea scade cu cât suma C+Si este mai mare. Acest lucru se aplică și fontelor cu grafit globular la care suma C+Si este mai ridicată ca la fontele obișnuite. Grafitizarea cimentitului din perlită se face mai ușor atât din acest motiv, cât și din cauza formei globulare a grafitului.

3. La fontele cu grafit globular cu structura perlitică se observă o mărire a alungirii în urma încălzirii la 630° —650° C. Se poate presupune că are loc un început de grafitizare însoțit de o detensionare completă.

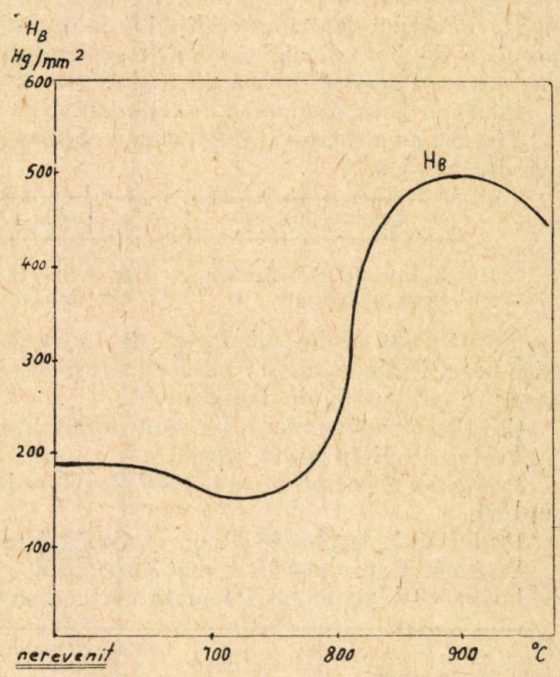


Fig. 1. — Variația unității în funcție de temperatura de călire în uleiu.

4. Călirea (sau normalizarea) se poate face prin încălzire la 850° —860° C (peste A_3) urmată de răcirea corespunzătoare scopului urmărit. Se obțin durități, ca și la fontele obișnuite, până la maximum 600 H_B.

5. Sensibilitatea la crăpături de călire mai mare ca în cazul fontelor obișnuite (în deosebi la răcire în apă) se poate explica prin neuniformitatea concentrației în carbon a austenitei la temperatura de călire. V. F. Sencovici (5) a arătat că în cazul fontelor obișnuite, porțiuni de austenită vecine eutecticului fosforos sunt mai bogate în carbon și mai stabile. In vecinătatea grafitului, austenita este mai puțin bogată în carbon, mai ales în timpul răcirii. Transformarea martensitică are loc la temperaturi mai ridicate în vecinătatea grafitului și la temperaturi mai scăzute în vecinătatea eutecticului fosforos. Acest lucru este valabil și în cazul fontelor cu grafit globular fiind și mai accentuată din cauza formei grafitului, care duce la o scădere mai mare a conținutului de carbon a austenitei ,vecine ca în cazul grafitului lamelar. Transformări martensitice la temperaturi diferite în diferite porțiuni ale materialului, precum și forma grafitului, pot explica sensibilitatea mai mare la crăpături a acestor fonte în timpul călirii.

Pentru a avea sensibilitate mai mică la crăpături de călire trebue deci să avem fosfor cât mai scăzut și globule de grafit mici.

Accentuarea unei concentrații inegale a carbonului în austenită din cauza formei globulare a grafitului poate explica de ce în anumite condiții de răcire și de compoziție chimică se obține din turnare structura micrografică în care ferita înconjură globulele de grafit, restul structurii fiind perlita.

N'am făcut încercări pentru a vedea dacă în cazul structurii inițiale perlitice se poate utiliza temperatura de călire mai joasă (cazul fontelor obișnuite).

II. Pentru a determina schimbările în ambele sensuri ale structurii massei metalice de bază și ale cantității grafitului, am făcut o serie de tratamente succesive cu aceeași probă de fontă.

Fonta a fost elaborată la cubilou.

Tratată cu electron și după aceea cu ferosiliciu. Compoziția chimică a fost cea de mai jos.

Analiza chimică	C%	Si%	Mn%	P%	S%	Mg%
Inainte de globulizare	3,68	1,76	0,52	0,067	0,32	—
După globulizare	3,60	2,75	0,50	0,062	0,03	0,10

S'au turnat probe sub formă de trefle (secțiunea 50 mm) din care s'au tăiat bare. Probele au fost supuse tratamentului termic după îndepărtare prin strunjire a crustei de turnare.

Cifrele calitative mecanice sunt redate în tabloul de mai jos în care avem:

Proba 48 E în stare turnată.

Proba 48 T recopt 2 ore la 850° C și 6 ore la 720° —750° C (răcire înceată cu cuptor).

Proba 48 L, proba 48 T, normalizată 1 oră la 900°C (răcire aer).

Proba 48 R, proba 48 L recopt 3 ore la 720°—750° C (răcire înceată cu cuptor).

Proba 48 I, proba 48 T forjată, reducerea secțiunii la 1/4 răcit la aer.

Proba Nr.	Calități mecanice				Microstructura	
	σ_b kg/cm²	δ_5%	a_k kgm/cm²	a'_k kgm/cm²	HB kg/cm²	
48 E	61	0,6	0,25	0,6	229	fig. 2
48 T	51	12	1,25	4	163	fig. 3
48 L	79	1,6			293	fig. 4
48 R	59	10			174	fig. 5
48 I	83	1,6			293	fig. 6

Analizele chimice ale carbonului liber și legat au fost:

Proba Nr.	C% total	C% liber	C% legat
48 E	3,30	2,92	0,38
	3,27	2,99	0,28
48 T	3,09	2,95	0,14
	3,13	2,95	0,18
48 L	3,30	2,17	1,10
	3,32	2,38	0,94
48 R	3,09	2,64	0,45
	3,13	2,85	0,28

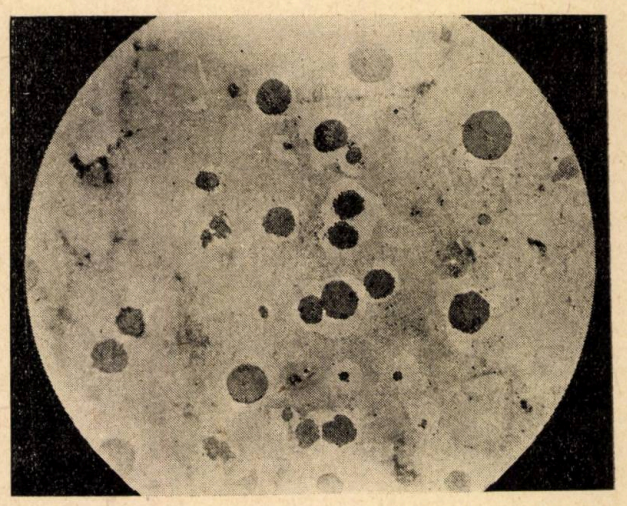


Fig. 2. — Microstructura probei 48 E. Atac 2% nital. ×100.

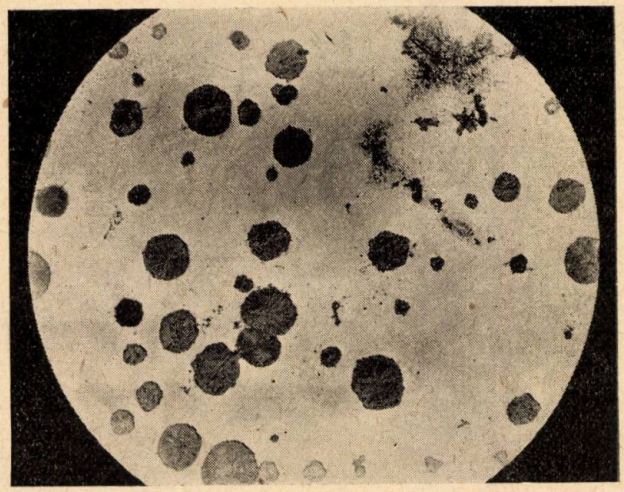


Fig. 3. — Microstructura probei 48 T. Atac 2% nital. ×100.

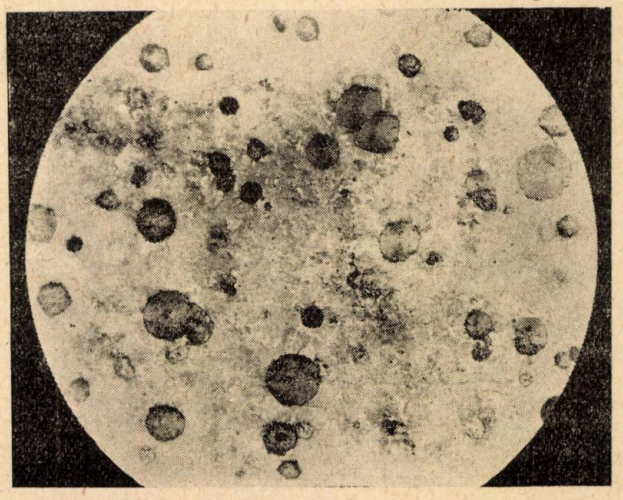


Fig. 4. — Microstructura probei 48 L. Atac 2% nital. ×100.

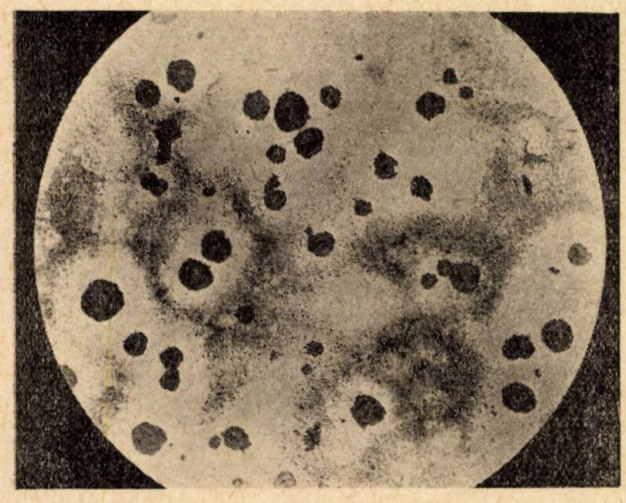


Fig. 5. — Microstructura probei 48 R. Atac 2% nital. × 100.

Fig. 6. — Microstructura probei 48 I. Atac 2 % nital. × 100.

Rezultatele de mai sus, mai ales în ceea ce privește C% legat la probele 48 L și 48 R, le dăm cu oarecare rezerve (mai ales prima, deoarece fonta nu a avut cimentita liberă), însă ele constitue o probă de control pentru compoziția massei metalice de bază, compoziție ce o putem deduce din micrografiile figurilor 2—5.

Din cele de mai sus rezultă că:

1. Recoacerea la 720°—750° C poate duce la o feritizare completă a structurii (descompunerea cimentitei din perlită, creșterea cantității de grafit).

2. Pornind dela structura complet feritică prin încălzire peste AC_3, grafitul se disolvă în austenit. Prin răcire la aer, se poate obține structură complet perlitică.

3. Pornind deci dela orice structură de turnare a massei metalice de bază, se poate obține printr'un simplu tratament de recoacere ales potrivit, o structură cu cantitate dorită de perlită sau ferită.

4. Structuri feritice asigură alungire mare și rezistență scăzută. Duritatea feritei și a perlitei la fontă cu grafit globular este mai mare (respectiv mai mare ca 163 H_B și 293 H_B) ca la fontele obișnuite. P. P. Petrosian și S. E. Son-Sahbudagian (3), au determinat-o prin microdurități, găsind:

Microduritate

Material	Ferită	Perlită
Fontă obișnuită .	96	170
Fontă globulară .	206	316

5. Alungirea grafitului prin forjare duce la o creștere a rezistenței, la rupere comparată cu fonta neforjată cu aceeași structură metalică de bază (perlită).

6. Schimbarea structurii massei metalice de bază și a cantității de grafit prin tratamente repetate nu poate duce la micșorarea dimensiunii grafitului, ci duce dimpotrivă la mărirea dimensiunilor lui.

7. Structura perlitică se poate obține, fie alegând în consecință analiza chimică a fontei, fie scoțând piesele turnate din formă la 850°—900°C și lăsându-le să se răcească la aer. In acest caz, pentru a reduce tensiunile interioare este necesară o recoacere la 500°—550°C (la temperatură mai ridicată putem avea modificare de structură).

III. Am făcut o serie de încercări de normalizare urmată de recoaceri la temperaturi variabile, precum și de călire și revenire la temperaturi variabile.

a) *Șarja 47.* Elaborată la cubilou. Tratată cu electron și ferosiliciu.

Compoziția chimică

Analiza chimică	C %	Si %	Mn %	P %	S %	Mg %
Inainte de globulizare . . .	3,96	1,98	0,80	0,07	0,04	
După globulizare	3,52	2,37	0,81	0,07	0,03	0,096

Probele turnate, de aceeași formă și dimensiuni ca la încercările precedente. Calități mecanice obținute (fig. 7).

Proba Nr.	Calități mecanice în stare turnată			Tratamentul	Calități mecanice după tratament termic		
	σ_b kg/mm²	δ_5 %	H_B kg/cm²		σ_b kg/cm²	δ_5 %	H_B
47	50	5	179	R 2 ore 850 C 6 ore 720 C	47	13,6	149
				N 1 oră 900 C	82	1,5	293
47/1	51	8	170	N 1 oră 900°C R 3 ore 650°C	78	4	269
47/2	50	7,2	170	N 1 oră 900°C R 3 ore 720°C	47	9,4	163
47/3	50	5,6	170	N 1 oră 900°C R 3 ore 750°C	48	11	163

N = normalizat,
R = recopt,
In stare turnată probele au avut cca 40% perlită, rest ferită.

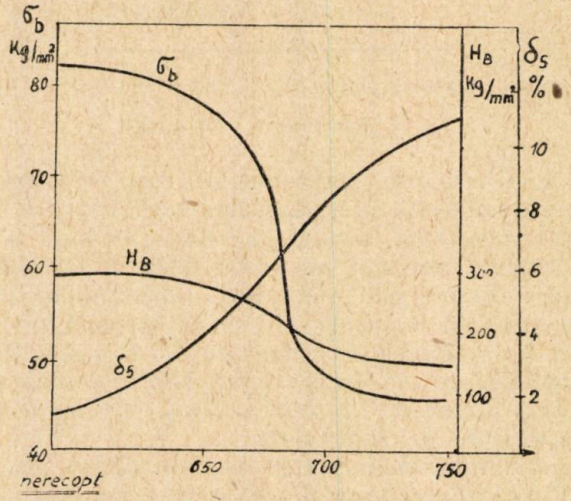


Fig. 7. — Variația cifrelor calitative mecanice în funcție de temperatura de recoacere după normalizare la 900°C.

Observațiune.
S'au făcut și încercări de reziliență pe probe STAS 1400—50.

Probă	47	47 R
normală α_k kg m/cm² . . .	0,75	1,65
necrestată α'_k kg m/cm² . .	2,80	7,00

b) *Șarja 84.* Elaborată la cubilou. Tratată cu electron și ferosiliciu.

Compoziția chimică

Analiza chimică	C %	Si %	Mn %	P %	S %	Mg %
Inainte de **globulizare** . . .	3,80 [1])	2,07	0,79	0,18	0,056	—
După globulizare	3,10 [1])	2,72	0,74	0,15	0,03	0,07

Probele turnate de aceeași formă și dimensiuni ca la încercările precedente.

In stare turnată s'a obținut $\sigma_b = 50$ kg/cm² $\delta_5 = 1\%$ 241 H_B (perlită 15—20%).

Recopt în trepte $\sigma_b = 50$ kg/cm²; $\delta_5 = 13{,}4\%$; $H_B = 163$ kg/cm² (perlită 15—20%)

Rezultatele probelor normalizate și recoapte:

Proba Nr.	Tratament termic: Normalizare t°C	Normalizare timp la temp.	Recoacere t°C	Recoacere timp la temp.	Calități mecanice: σ_b kg/cm²	δ_5 %	H_B kg/cm²	Structura micrografică
4	880	1 oră	—	—	71	1,2	302	90—100% perlită
5	880	1 oră	650	6 ore	65	3,4	241	65—75% perlită (început de transformare)
10	880	1 oră	650	6 ore	52	2,0	230	
6	880	1 oră	720	6 ore	48	8,6	163	10—15% perlită
11	880	1 oră	720	6 ore	49	12,4	163	
7	—	—	650	6 ore	57	2	220	75—85% perlită
8	—	—	720	6 ore	46	10,8	165	10—15% perlită

Rezultatele probelor de călire (în uleiu) și revenire (fig. 8):

Proba Nr.	Tratament termic: Călire t°C	Călire timp la temp.	Revenire t°C	Revenire timp la temp.	Calități mecanice: σ_b kg/cm²	δ_5 %	H_B kg/cm²	Structura micrografică
12	880	1	—	—	44 [2]) [3])	0	601	martensitică
2 C	880	1	400	6	80 [2])	0	477	martensitică, început de transformare
					83 [2])	0	477	
3 C	880	1	500	6	80	0	341	idem
1	880	1	650	6	63	4	220	perlită-sorbită
2	880	1	720	6	50	10	159	15—20% perlită

[1]) Se observă o scădere a conținutului de C după globulizare, lucru verificat la zeci de șarje în cazul când procentul de carbon în fontă înainte de globulizare depășește 3,5%.

[2]) Epruvete tip fontă. Rest, epruvete tip oțel STAS 200—49.

[3]) Ruptă din corp. In toate încercările de tracțiune făcute pe epruvete călite și nerevenite, s'au obținut rezistențe joase, rupere de obiceiu în secțiune, care nu era minimă, material fragil (chiar dacă era revenit la temperaturi sub 200°C).

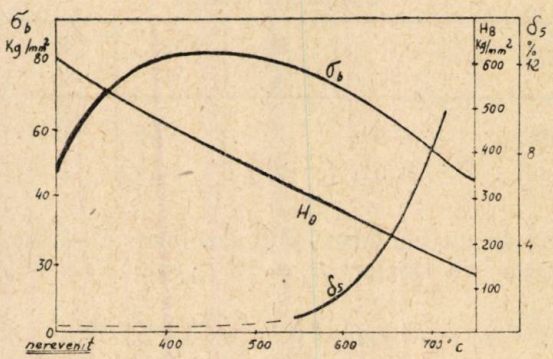


Fig. 8. — Variația cifrelor calitative mecanice în funcție de temperatura de revenire la probele călite 880 °C în uleiu.

In figura 9 este redată micrografia probei Nr. 12.

c) S'au făcut tratamente termice la șarje incomplet globulizate pentru a se vedea ce rezultate se obțin în acest caz. Redăm rezultatele la o șarjă care avea numai 15—20% grafit globular, rest lamelar fin.

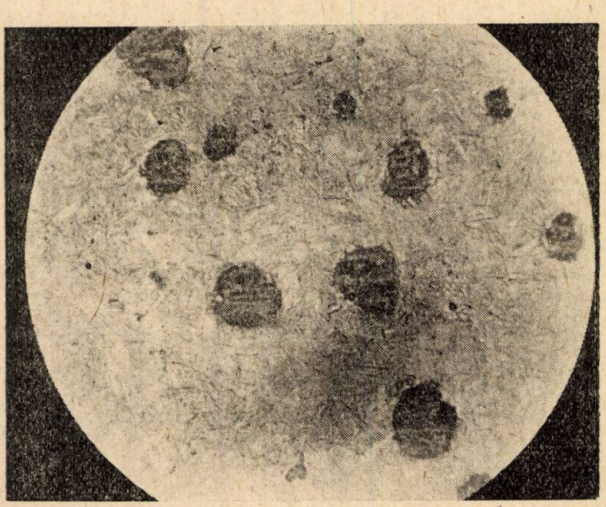


Fig. 9. — Microstructura probei Nr. 12. Atac 2% nital. × 120.

Probele turnate în același fel ca în cazurile precedente. Cifre calitative mecanice în stare turnată.

$$\sigma_b = 46 \text{ kg/cm}^2;\ \delta_5 = 0{,}8\%;\ H_B = 269 \text{ kg/cm}^2.$$

Rezultatele probelor de călire (în uleiu) și revenire (fig. 10).

Proba Nr.	Tratament termic				Calități mecanice			Structura micrografică
	Călire		Revenire		σ_b	δ_5	H_B	
	t°C	timp la temp.	t°C	timp la temp.	kg/cm²	%	kg/cm²	
a	860—880	1 ½ ore	200	6 ore	53 [1])	0	510	martensită fină
b	860—880	1 ½ ore	400	6 ore	80 [1])	0	420	idem început de transf.
c	860—880	1 ½ ore	500	6 ore	71 [1])	0	390	început de sorbitizare
d	860—880	1 ½ ore	650	6 ore	51	1	283	sorbită-perlită
e	860—880	1 ½ ore	720	6 ore	46	2	210	65—75% perlită globul.

Din aceste încercări (punctele a, b, și c) rezultă următoarele:

1. Variația rezistenței la tracțiune în funcție de temperatura de revenire la eprubetele călite este similară fontelor obișnuite. Rezistența la tracțiune crește întâi cu temperatura de revenire, atinge maximum la o revenire de 400°—500°C și pe urmă scade. Nu s'a determinat exact, din lipsă de posibilități, rezistența maximă la tracțiune în funcție de temperatura de revenire.

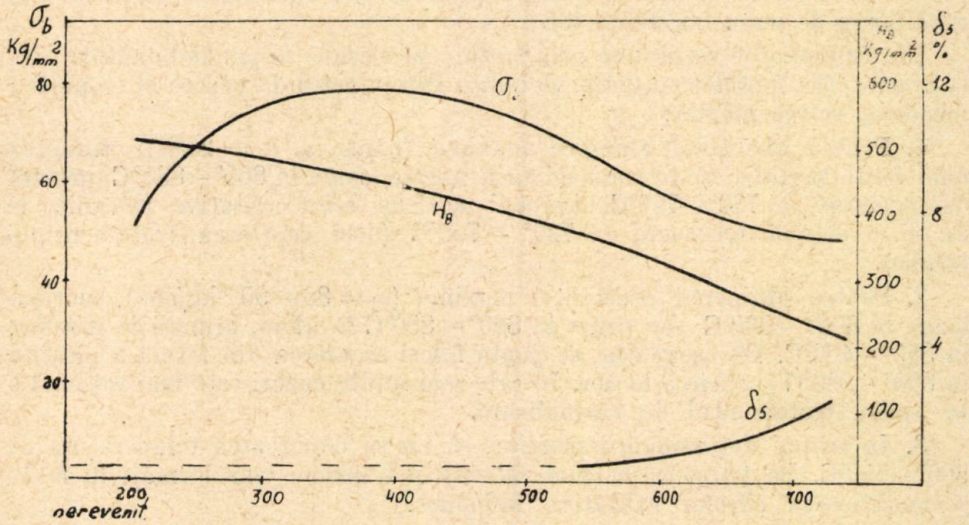


Fig. 10. — Variația cifrelor calitative mecanice în funcție de temperatura de revenire la probele călite 880°C uleiu. Fonta cu grafit incomplet globulizat.

Este posibil ca la o revenire de cca 300°—350°C să obținem o rezistență la tracțiune ceva mai mare (la fontele obișnuite rezistența maximă se obține după revenire la 350°—400°C).

2. Prin călire și revenire nu se obțin rezistențe mai mari ca în cazul normalizării. Probele noastre au avut însă globule de grafit mari, ceea ce împie-

[1]) Epruvete tip fontă, rest eprubete tip oțel STAS 200—49.

decă obținerea rezistențelor ridicate prin călire. Trebue continuate cercetări în această direcție, precum și pentru cazul fontelor cu grafit globular cu conținut scăzut de carbon.

3. Fonte cu grafit incomplet globulizat în urma călirii și revenirii au rezistențe comparabile cu fonte cu grafit complet globulizat, însă nu se obține alungire. Structura nu se feritizează. In prezența grafitului lamelar, feritizarea structurii se face mult mai greu.

4. Ridicarea temperaturii de revenire la probele călite, sau a temperaturii de recoacere la probele normalizate, duce la mărirea alungirii, care crește apreciabil în jurul a 720°C.

5. Alungire maximă se obține în urma normalizării urmate de recoacere la 720°—750°C (probele 84/11, 84/8, 84/2).

6. Prin călire și revenire se poate obține duritatea dorită până la maximum 600 H_B. Acest lucru prezintă importanță, tratamentul de călire și revenire fiind deci recomandat în cazul când se urmărește mărirea rezistenței la uzură.

Incercările făcute vor trebui să fie completate și trebue continuate.

Prezintă interes obținerea așa numitei structuri aciculare a massei metalice de bază (aliere cu Mc, Ni, etc.). De asemenea, este interesant să se toarne fontă albă tratată cu magneziu (eventual în cochilă) și să se trateze termic pentru maleabilizare. Reamintim că prin această metodă se obține fontă modificată de mare rezistență (6).

Din cele expuse rezultă că prin tratament termic se pot îmbunătăți simțitor calitățile fontelor cu grafit globular. Din punctul de vedere al scopurilor urmărite, se recomandă:

1. Pentru obținerea alungirii maxime (până la $\delta_5 = 23\%$), turnarea unei fonte perlitice și tratarea ei prin normalizarea la 860°—880°C, urmată de recoacere la 720°—750°C. Aproape aceleași cifre calitative mecanice le dă și o simplă recoacere la 720° — 750°C (deci scurtarea tratamentului termic).

2. Pentru obținerea rezistenței maxime ($\sigma_b = 80 - 90$ kg/cm²), normalizare la 860° — 880°C, sau călire la 860° — 880°C în uleiu, urmată de revenire la 350°—400°C. De asemenea, se poate folosi scoaterea din formă a pieselor la 860°—880°C și răcirea la aer. In cele mai multe cazuri este mai rațional a se aplica tratamentul de normalizare.

3. In scopul detensionării pieselor, să nu se depășească temperatura de 500°—550°C. La temperaturi mai ridicate pot începe transformări în fontă și modificarea cifrelor calitative mecanice.

4. Pentru a obține duritatea ridicată până la 600 H_B, se utilizează călirea urmată de revenire după necesitate. Duritatea ridicată asigură mărirea rezistenței la uzură.

5. La fonte incomplet globulizate prin tratament termic se poate mări rezistența la valori apropiate celor ce se obțin la fontele complet globulizate însă nu se poate obține alungire. Deci și aceste fonte pot fi utilizate cu succes când nu se cer calități plastice.

Avem deci posibilități de modificare a structurii și a calităților mecanice ale acestei fonte prin aplicarea după necesitate a tratamentelor termice arătate mai sus.

ТЕРМИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЧУГУНОВ С ГЛОБУЛЯРНЫМ ГРАФИТОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматриваются полученные результаты при термической обработке глобулярных чугунов.

Был проведен ряд исследований для определения изменения твердости и структуры в зависимости от закалки и нормализации. Выполнялись также последовательные испытания на одном и том же образце чугуна для определения изменений структуры основной металлической массы и содержания графита. Кроме того проведены исследования по нормализации с последующим отпуском при разных температурах, а также закалка и отпуск при разных температурах.

Полученные результаты показывают, что термическая обработка может значительно улучшить качества чугунов с глобулярным графитом. В этом смысле делаются некоторые предложения.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Изменение твердости в зависимости от температуры закалки в масле.
Рис. 2. — Микроструктура образца 48 *E*. Травление 2% ниталя. × 100.
Рис. 3. — Микроструктура образца 48 *T*. Травление 2% ниталя. × 100.
Рис. 4. — Микроструктура образца 48 *L*. Травление 2% ниталя. × 100.
Рис. 5. — Микроструктура образца 48 *R*. Травление 1% ниталя. × 100.
Рис. 6. — Микроструктура образца 48 *I*. Травление 2% ниталя. × 100.
Рис. 7. — Изменение механических свойств в зависимости от температуры отжига после нормализации при 900°C.
Рис. 8. — Изменение механических свойств в зависимости от температуры отпуска образцов, закаленных в масле при 880°C.
Рис. 9. — Микроструктура образца 12. Травление 2% ниталя. × 120.
Рис. 10. — Изменение механических свойств в зависимости от температуры отпуска образцов закаленных в масле при 880°C. Чугун с неполно глобулизированным графитом.

TRAITEMENT THERMIQUE DES FONTES À GRAPHITE GLOBULAIRE

(RÉSUMÉ)

L'Auteur expose dans cet article les résultats obtenus par le traitement thermique des fontes globulaires.

On a entrepris à cette fin une série de recherches pour pouvoir déterminer: la variation de la dureté et la modification de la structure, consécutives à la trempe.

On a exécuté des recherches successives avec le même échantillon de fonte, afin de déterminer les changements produits dans les deux sens, dans la structure de la masse métallique de base et dans la quantité de graphite.

Dans une dernière série de recherches on a exécuté des traitements de normalisation, suivie de recuit à des températures variables, ainsi que de trempe et revenu, toujours à des températures variables.

Les résultats obtenus démontrent que le traitement thermique peut sensiblement améliorer les qualités des fontes à graphite globulaire et l'Auteur conclut l'article par des recommandations en ce sens.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Variation de l'unité en fonction de la température de trempe à l'huile.
Fig. 2. — La microstructure de l'échantillon 48 E. Attaque 2% nital. × 100.
Fig. 3. — La microstructure de l'échantillon 48 T. Attaque 2% nital. × 100.
Fig. 4. — La microstructure de l'échantillon 48 L. Attaque 2% nital. × 100.
Fig. 5. — La microstructure de l'échantillon 48 R. Attaque 2% nital. × 100.
Fig. 6. — La microstructure de l'échantillon 48 I. Attaque 2% nital. × 100.
Fig. 7. — Variation des chiffres qualitatifs mécaniques en fonction de la température de recuit après la normalisation à 900°C.
Fig. 8. — Variation des chiffres qualitatifs mécaniques en fonction de la température de revenu pour les échantillons trempés à 880°C, à l'huile.
Fig. 9. — La microstructure de l'échantillon n° 12. Attaque 2% nital. × 120.
Fig. 10. — Variation des chiffres qualitatifs mécaniques en fonction de la température de revenu pour les échantillons trempés à 880°C, à l'huile. Fonte à graphite incomplètement globulisé.

BIBLIOGRAFIE

1. B. S. Milman, *Fontă de mare rezistență cu grafit sferolitic în structura de turnare.* Vestnic Mașinostroenia, Masghiz, 1949, Nr. 12.
2. — *Reglarea structurii și calităților fontelor cu grafit sferolitic (TNIITMAS).* Liteinoie Proizvodstvo, Masghiz, Moscova, 1951, Nr. 2.
3. P. P. Petrosian și S. E. Son-Sahbudagian, *Fonta cu grafit sferolitic.* Liteinoie Proizvodstvo, Masghiz, Moscova, 1951, Nr. 2.
4. A. A. Vasilenco și M. S. Grigorev, *Fonta modificată în construcții de mașini.* Gosizdat, Lit. Teh. a Ucrainei, Ghiev, 1950.
5. V. F. Sencovici, *Transformări eutectoide în fontă. Culegerea transformării în aliajele fier carbon.* Masghiz, Moscova, 1950.
6. V. I. Vascenco, *Modifițirovanii ciugun.* Masghiz, Moscova, 1946.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

NOTE

CONSIDERAŢII ASUPRA STABILITĂŢII MACARALELOR RAPIDE CU PLATFORME RULANTE

DE

LUCIU N. SĂVEANU

1. CONSIDERAŢII INTRODUCTIVE

La proiectarea macaralelor rapide cu platforme rulante se va avea în vedere nu numai stabilitatea statică a acestora, ci şi stabilitatea lor dinamică. Sunt cazuri când, deşi stabilitatea statică este asigurată, totuşi, în anumite momente ale fazei dinamice, sub acţiunea forţelor de inerţie, combinată cu acţiunea simultană a vântului, stabilitatea acestor macarale este pe punctul de a fi compromisă.

In ceea ce priveşte categoria de macarale denumite *cu platforme rulante*, atunci când nu se ia în considerare acţiunea vântului, problema stabilităţii lor, în general, se pune doar pentru *macaralele-cantilevere* şi eventual pentru *macaralele-capră* cu porţiuni ale podului propriu zis în consolă.

La majoritatea macaralelor lente cu platforme rulante (podurile rulante, macaralele-capră simple şi podurile de încărcare) stabilitatea lor statică este complet asigurată prin însuşi principiul lor de construcţie şi funcţionare, ceea ce face ca în vechile calcule de construcţie a macaralei propriu zise, să fie neglijată problema stabilităţii în general.

Insă, în cazul macaralelor rapide cu platforme rulante şi suporţi verticali, a căror concepţie modernă se caracterizează prin *acţionare electrică* şi *rapiditate în manevră*, această *stabilitate*, evidentă în faza *statică*, poate uneori conduce la surprize cu totul neplăcute în timpul funcţionării.

Aceasta, pentrucă în faza *dinamică*, care corespunde perioadei de oprire a mecanismelor mişcărilor principale, sub acţiunea suprapusă a forţelor de inerţie combinată cu acţiunea simultană a vântului, aceste macarale sunt susceptibile de a se răsturna fie pe direcţia de deplasare a întregei macarale (fiind compromisă *stabilitatea frontală*), fie pe direcţia normală, corespunzătoare deplasării căruciorului mobil (fiind compromisă *stabilitatea laterală*).

Pentru proiectarea macaralelor din această categorie (cu excepţia podurilor rulante) va fi deci necesar să facem o verificare precisă a stabilităţii lor dinamice.

2. NOTAŢIILE ADOPTATE

Pentru a da problemei o soluţie generală, vom considera cazul unei macarale oarecare cu platforme rulante, având podul propriu zis susţinut pe suporţi verticali rulanţi şi cu porţiuni în consolă, reprezentată schematic în figurile 1 şi 2.

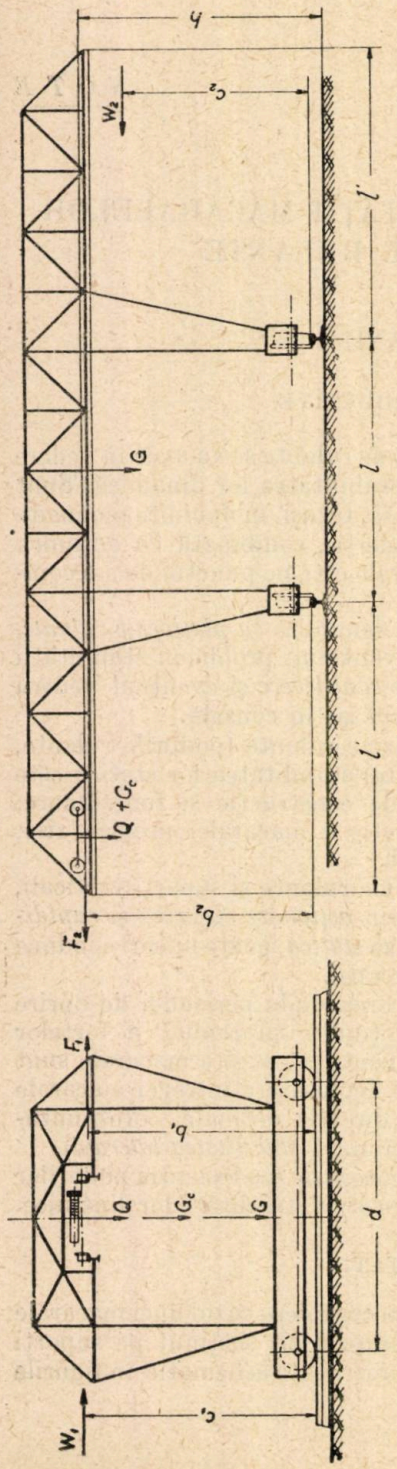


Fig. 1 și 2.

Se adoptă următoarele notații:

G = greutatea întregei macarale fără căruciorul mobil, în kg.

G_c = greutatea căruciorului mobil fără sarcină, în kg.

Q = valoarea maximă a sarcinii utile, în kg.

F_1 = rezultanta forțelor de inerție datorită frânării întregei macarale încărcate, în kg.

F_2 = rezultanta forțelor de inerție datorită frânării căruciorului mobil încărcat, în kg.

F_0 = forța de inerție datorită frânării sarcinii la coborîre, în kg.

W_1 = rezultanta acțiunii vântului pe direcția deplasării întregei macarale, în kg.

W_2 = rezultanta acțiunii vântului pe direcția deplasării căruciorului mobil, în kg.

S_1, S_2 = proiecția suprafeței pline a întregei macarale pe direcția frontală (S_1), respectiv laterală (S_2), în m².

l = deschiderea macaralei, egală cu ecartamentul căii de rulare a întregei macarale, în m.

l' = lungimea părților în consolă ale podului propriu zis, în m.

d = distanța între axele roților extreme de rulare a întregei macarale, în m.

b_1, b_2 = distanța forței F_1, respectiv F_2, dela fața superioară a căii de rulare a întregei macarale, în m.

c_1, c_2 = distanța forței W_1, respectiv W_2, dela fața superioară a căii de rulare, în m.

v = notația generală adoptată pentru valoarea vitesei la un moment dat în timpul perioadei de oprire (t), în m/s.

v_0 = vitesa de regim a ridicării propriu zise, în m/s.

v_1 = vitesa de regim a deplasării întregei macarale, în m/s.

v_2 = vitesa de regim a deplasării căruciorului mobil, în m/s.

w_1, w_2 = vitesa vântului pe direcția și sensul deplasării întregei macarale (w_1), respectiv pe direcția și sensul deplasării căruciorului mobil (w_2), în m/s.

t = notația generală adoptată pentru valoarea curentă a timpului, măsurată dela începutul frânării mecanismului respectiv, în s.

t_0 = timpul de frânare a mecanismului ridicării propriu zise, în s.

t_1 = timpul de frânare a mecanismului deplasării întregei macarale, în s.

t_2 = timpul de frânare a mecanismului deplasării căruciorului mobil, în s.

g = accelerația gravitației pământești, în m/s².

δ = densitatea aerului atmosferic, în kg s²/m⁴.

C_x = coeficientul aerodinamic unitar pentru rezistența aerului.

μ = coeficientul de frecare între șina căii și periferia roților blocate prin frânare.

3. STABILITATEA FRONTALĂ

In repaus, stabilitatea frontală este asigurată prin însăși construcția macaralei, la care greutățile proprii ale macaralei și sarcina de ridicat se proiectează, în general, la mijlocul distanței d.

In timpul funcționării însă, poate interveni un moment critic pentru stabilitatea dinamică a macaralei în timpul perioadei de frânare, când la acțiunea vântului de intensitate maximă (W_1) pe direcția deplasării se adaugă și rezultanta forțelor de inerție F_1.

Condiția de stabilitate în acest caz va fi:

$$(G + G_c + Q)\frac{d}{2} \geqslant W_1 c_1 + F_1 b_1, \tag{1}$$

în care acțiunea vântului va avea valoarea:

$$W_1 = C_x \frac{\delta}{2g} S_1 (w_1 - v_1)^2. \tag{2}$$

Observăm că valoarea maximă pentru W_1 are loc atunci când $v_1 = 0$, adică atunci când macaraua este pe punctul de a se opri, fiind:

$$W_1 = C_x \frac{\delta}{2g} S_1 w_1^2. \tag{2'}$$

Pentru determinarea rezultantei forțelor de inerție F_1 se admite ipoteza că vitesa de deplasare a macaralei (v_1), în perioada de demarare, cât și în perioada de frânare, crește și scade parabolic în funcție de timp. De altfel, aceeași ipoteză poate fi adoptată, cu aproximația respectivă, și în cazul celorlalte mișcări elementare ale macaralei.

Pentru perioada de frânare a deplasării întregei macarale (t_1), considerând că la începutul frânării $t = 0$ și $v = v_1$, ecuația parabolei $v = f(t)$ având vârful în punctul $A\,(0, v_1)$ și trecând prin punctul $B\,(t_1, 0)$, conform figurii 3, va avea expresia analitică:

$$v = \frac{v_1}{t_1^2}(t_1^2 - t^2), \tag{3}$$

iar valoarea accelerației în funcție de timp va fi dată de relația:

$$\frac{dv}{dt} = -2\frac{v_1}{t_1^2} t. \tag{4}$$

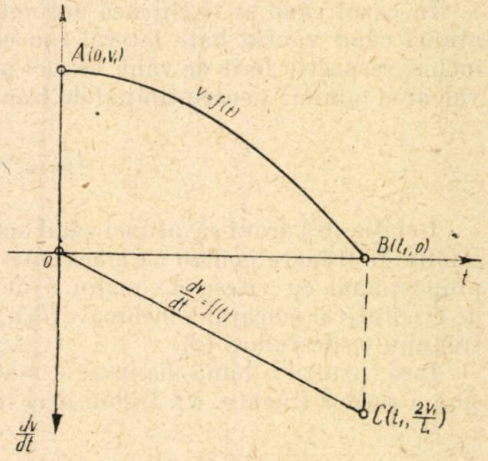


Fig. 3

Rezultanta forțelor de inerție va avea valoarea:

$$F_1 = \frac{G + G_c + Q}{g} \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{5}$$

Valoarea maximă a acestei forțe va avea loc la sfârșitul perioadei de frânare ($t = t_1$), când valoarea absolută maximă pentru accelerație (negativă) va fi:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{max} = 2\frac{v_1}{t_1}. \tag{4'}$$

Inlocuind pe $\frac{dv}{dt}$ din (4') în (5) se obține:

$$F_{1\,max} = \frac{G + G_c + Q}{g} \cdot \frac{2v_1}{t_1}. \tag{5'}$$

Inlocuind acum valorile din (2') și (5') în relația (1), aceasta devine:

$$(G + G_c + Q)\frac{d}{2} \geqslant C_x \frac{\delta}{2g} S_1 w_1^2 c_1 + (G + G_c + Q) \cdot \frac{2v_1 b_1}{g t_1}. \tag{1'}$$

Deci o macara dată, construită pentru o anumită sarcină maximă Q, urmând a se deplasa cu vitesa de regim v_1, într'o regiune în care vântul atinge vitesa maximă w_1, va fi asigurată din punctul de vedere al stabilității sale frontale, dacă timpul de frânare t_1 va îndeplini condiția:

$$t_1 \geqslant \frac{4v_1 b_1}{gd - \frac{C_x \delta S_1 w_1^2 c_1}{G + G_c + Q}}. \tag{6}$$

Relația (6) arată că pentru macaralele grele influența acțiunii unui vânt normal este relativ foarte mică.

In cazul când se neglijează acțiunea frontală a vântului ($w_1 = 0$), adică atunci când vântul bate lateral sau când macaraua lucrează într'un spațiu închis, respectiv ferit de vânt, atunci pentru ca macaraua să nu se răstoarne, valoarea minimă pentru timpul de frânare va fi:

$$t_{1\,min} = \frac{4v_1 b_1}{gd}. \tag{6'}$$

Relația (6') arată că atunci când acțiunea vântului este neglijabilă, timpul minim de frânare pentru ca macaraua să nu se răstoarne ($t_{1\,min}$) este direct proporțional cu vitesa de regim a deplasării (v_1) și cu înălțimea centrului de greutate al macaralei încărcate (b_1), și invers proporțional cu ampatamentul trenului ei de rulare (d).

Insă, pentru o bună manevră a macaralei, trebue evitată și patinarea pe șină a roților frânate. Va trebui deci îndeplinită simultan și condiția:

$$(G + G_c + Q)\,\mu \geqslant C_x \frac{\delta}{2g} S_1 w_1^2 + \frac{2v_1}{g t_1}(G + G_c + Q) \tag{7}$$

sau:

$$t_1 \geqslant \frac{4v_1}{2\mu g - \frac{C_x \delta S_1 w_1}{G + G_c + Q}}. \tag{8}$$

Dacă neglijăm, ca mai sus, acțiunea frontală a vântului, atunci valoarea minimă pentru timpul de frânare, fără ca roțile frânate să patineze, va fi:

$$t'_{1\,\min} = \frac{2v_1}{\mu g}. \tag{8'}$$

Pentru manevrarea în bune condiții a unei macarale electrice rapide, trebue ca timpul minim de frânare, care satisface condiția de stabilitate frontală ($t_{1\,\min}$), să corespundă cu timpul minim de frânare, care satisface condiția ca roțile frânate să nu patineze ($t'_{1\,\min}$):

$$t_{1\,\min} = t'_{1\,\min}.$$

Din conexarea relațiilor (6') și (8') rezultă:

$$d = 2\mu b_1. \tag{9}$$

Se obține astfel o relație foarte importantă pentru construcția metalică a macaralei.

Adoptând $\mu = 0{,}15$, valoare potrivită pentru coeficientul de frecare dintre șină și janta roților de rulare, rezultă:

$$d = 0{,}3\, b_1. \tag{9'}$$

Adică, pentru ca o macara electrică rapidă să poată beneficia de un timp minim de frânare fără să se răstoarne și, totodată, fără să patineze, ea va trebui să fie astfel construită, încât ampatamentul ei să fie aproximativ o treime din înălțimea centrului de greutate al macaralei încărcate.

In acest caz, timpul minim de frânare va fi:

$$t_{1\,\min} = \frac{4}{3} v_1. \tag{8''}$$

In practică se vor întâlni deseori macarale la care

$$d > 0{,}3\, b_1.$$

La acestea însă, nu se va putea folosi timpul minim de frânare $t_{1\,\min}$ calculat cu relația (6'), ci va trebui să se limiteze micșorarea timpului de frânare la valoarea dată de (8''), $t_{1\,\min} = \frac{4}{3} v_1$, sub care valoare frânarea va fi însoțită de patinarea la oprire a roților.

4. STABILITATEA LATERALĂ

In faza statică, când cele trei mișcări elementare ale macaralei sunt în repaus, situația cea mai defavorabilă pentru stabilitatea laterală a macaralei are loc atunci când căruciorul mobil, cu sarcina utilă suspendată, se va afla la capătul unei console, iar vântul va bate cu vitesa maximă din spre cealaltă consolă.

Condiția de echilibru va fi:

$$G\frac{l}{2} \geqslant (Q + G_c)\, l' + W_2 c_2, \tag{10}$$

relație care este cunoscută.

In faza dinamică însă, efectuarea simultană a mișcării de ridicare propriu zisă și a mișcării de deplasare a căruciorului mobil face ca relația (10) să fie necesară, dar insuficientă.

In acest caz, ea trebue completată cu termenii respectivi ai forțelor de inerție ale celor două mișcări elementare cuprinse într'un plan frontal.

Deplasarea întregei macarale nu intervine în studiul stabilității ei laterale. Răsturnarea laterală poate interveni și atunci când macaraua propriu zisă stă pe loc ($v_1 = 0$), dacă nu sunt îndeplinite noile condiții de echilibru cuprinse în relația (10′) de mai jos:

$$G\frac{l}{2} \geqslant (Q + G_c + F_0)\, l' + F_2 b_2 + W_2 c_2. \tag{10'}$$

Situația cea mai defavorabilă intervine atunci când oprirea sarcinii maxime prin frânare la coborîre coincide cu oprirea prin frânare a căruciorului mobil la unul din capetele podului macaralei, în timp ce componenta acțiunii laterale a vântului ajunge și ea la un maximum de intensitate.

Știm însă că:

$$F_0 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{2v_0}{t_0}, \tag{11}$$

$$F_2 = \frac{Q + G_c}{g} \cdot \frac{2v_2}{t_2}, \tag{12}$$

$$W_2 = C_x \frac{\delta}{2g} S_2 w_2^2. \tag{13}$$

Inlocuind în (10′) expresiile pentru F_0, F_2 și W_2 din relațiile (11), (12) și (13), avem:

$$G\frac{l}{2} \geqslant \left(Q + G_c + \frac{Q}{g} \cdot \frac{2v_0}{t_0}\right) l' + \frac{Q + G_c}{g} \frac{2v_2}{t_2} b_2 + C_x \frac{\delta}{2g} S_2 w_2^2 c_2. \tag{10''}$$

Din relația (10″) se poate deduce sarcina maximă pe care o poate manevra o anumită macara (caracterizată prin: $G, G_c, S_2, l\ l', b_2, c_2, C_z$) în anumite condiții de lucru (caracterizate prin: v_0, v_2, w_2, t_0, t_2), fără ca ea să se răstoarne lateral:

$$Q \leqslant \frac{Glgt_0t_2 + G_c(2l'gt_0t_2 + 4b_2v_2t_0) - C_x\delta t_0t_2S_2w_2^2c_2}{2l'gt_0t_2 + 4l'v_0t_2 + 4b_2v_2t_0}. \tag{14}$$

Pentru macaralele care lucrează într'un spațiu închis, sau sunt protejate de acțiunea vântului, relația (14) devine:

$$Q \leqslant \frac{Glgt_0t_2 - G_c(2l'gt_0t_2 + 4b_2\varphi_2t_0)}{2l'gt_0t_2 + 4l'\varphi_0t_2 + 4b_2\varphi_2t_0}. \qquad (14')$$

Pentru o bună funcționare a macaralei va trebui, de asemenea, evitată patinarea roților frânate ale căruciorului mobil pe șină. Deci, dacă se neglijează acțiunea vântului asupra căruciorului mobil, va trebui să fie satisfăcută relația:

$$(Q + G_c)\,\mu \geqslant \frac{Q + G_c}{g} \cdot \frac{2\varphi_2}{t_2}. \qquad (15)$$

Relația aceasta poate fi utilizată pentru determinarea timpului minim de frânare a căruciorului mobil (t_2) în funcție de vitesa de regim (φ_2) a acestuia:

$$t_2 \geqslant \frac{2\varphi_2}{\mu g}. \qquad (16)$$

Relația (16) se va avea în vedere în special la proiectarea macaralelor rapide.

5. CONCLUZIUNI

Din cele expuse se desprind următoarele concluziuni:

a) La proiectarea macaralelor cu platforme rulante rapide, acestea vor trebui să satisfacă condițiile de stabilitate considerate în faza dinamică cea mai defavorabilă pentru echilibrul întregei macarale.

b) Pe când teoria clasică a stabilității statice preconizează răsturnarea laterală numai a macaralelor cu părți în consolă ale podului propriu zis, studiul stabilității în faza dinamică ne arată, în general, posibilitatea răsturnării frontale și laterale, în anumite condiții, a tuturor macaralelor rapide cu platforme rulante și suporți verticali.

c) Condițiile de echilibru frontal și lateral în faza dinamică, necesare și suficiente pentru această categorie de macarale, sunt cele exprimate prin relațiile (1'), (6) respectiv (6'), (8) respectiv (8'), (9) respectiv (9'), (14) respectiv (14') și (16), care stabilesc legăturile ce trebue să existe între principalele caracteristice *constructive* și *funcționale* ale macaralei.

d) Intru cât din relațiile stabilite, rezultă considerabila influență a timpilor de frânare (t_0, t_1 și t_2) asupra stabilității frontale, respectiv laterale, a macaralei, la punerea în exploatare a unei macarale rapide gata construite se va acorda o mare atenție reglajului frânelor mecanismelor corespunzătoare celor trei mișcări elementare.

e) O deosebită importanță pentru proiectarea și construcția macaralelor cu platforme rulante înalte și rapide, prezintă condiția stabilită prin relația (9'): $d = 0{,}3\,b_1$.

f) Pentru toate macaralele cu platforme rulante îndeplinind condiția constructivă $d \geqslant 0{,}3\,b_1$, timpul minim admisibil de frânare va fi $t_{1\,\min} = 1{,}33\,\varphi_1$.

К УСТОЙЧИВОСТИ СКОРОСТНЫХ КРАНОВ С ПОДВИЖНЫМИ МОСТАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

При исследовании динамической устойчивости скоростных кранов с подвижными мостами следует учесть возможность одновременного действия всех факторов, стремящихся опрокинуть кран, а именно: полезную нагрузку, собственный вес составляющих частей, давление ветра и силы инерции. Допускается при этом, что в период торможения движений крана скорости изменяются параболически в зависимости от времени и устанавливается максимум силы инерции, приуроченный к концу периода торможения.

Исследуя лобовую динамическую устойчивость, устанавливают при условии, что торможение имело место в минимальный промежуток времени без опрокидывания крана и без скольжения заторможенных колес, что кран следует сконструировать так, чтобы расстояние между осями колес крана было равно примерно 1/3 высоты центра тяжести установки с нагрузкой.

При исследовании боковой динамической устойчивости определяется аналитическим путем максимальная величина нагрузки, под которой кран может маневрировать в зависимости от его конструктивных и функциональных параметров, а также минимальное время торможения тележки в движении, в зависимости от установившейся скорости.

Показывается влияние элемента времени торможения на динамическую устойчивость рассмотренных кранов, и устанавливаются при этом некоторые практические выводы в связи с их конструкцией и эксплуатацией.

CONSIDÉRATIONS SUR LA STABILITÉ DES GRUES RAPIDES À PLATES-FORMES ROULANTES

(RÉSUMÉ)

Lorsqu'on étudie la stabilité dynamique des grues rapides à plates-formes roulantes, on doit tenir compte de l'éventualité d'une action simultanée de tous les facteurs pouvant renverser la grue et, notamment, de la charge utile, du poids des parties composantes, de la pression du vent et des forces d'inertie. On admet que dans la période de freinage des mouvements de la grue, les vitesses varient paraboliquement en fonction du temps et l'on établit la valeur maximum de la force d'inertie qui apparaît à la fin de la période de freinage.

En étudiant la stabilité dynamique frontale, on constate, à condition que le freinage ait lieu dans un minimum de temps sans que la grue se renverse ou que les roues freinées patinent, que la grue doit être construite de telle façon que l'empattement du train de roulage soit environ le tiers de la hauteur du centre de gravité de l'installation sous charge.

En ce qui concerne la stabilité dynamique latérale, on détermine, par voie analytique: la valeur maximum de la charge que la grue peut manoeuvrer,

en fonction de ses paramètres constructifs et fonctionnels, ainsi que le temps minimum de freinage du chariot mobile, en fonction de sa vitesse de régime.

On montre l'influence des temps de freinage sur la stabilité dynamique des grues étudiées ; en même temps, on tire des conclusions pratiques en ce qui concerne leur construction et leur exploitation.

BIBLIOGRAFIE

1. A. O. Spivacovschi și N. F. Rudenco, *Curs general de mașini de ridicat și de transportat*. Ed. de Stat pentru Științe Tehnice, Literatura pentru construcții de mașini, Moscova, 1949.
2. F. Buelz, *Hebezeuge*. Ed. Hirzel, Lipsca, 1929.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1–2, 1952

REFERATE

APLICAREA METODEI LUI GALERCHIN LA STUDIUL MIŞCĂRII FLUIDELOR COMPRESIBILE

DE

T. OROVEANU

1. *Consideraţii generale.* Datorită mai ales progreselor uimitoare înregistrate în ultimul timp în aviaţie, cercetările teoretice privitoare la mişcarea fluidelor compresibile au căpătat o extindere cu totul deosebită. Privită sub aspectul cel mai general, teoria scurgerii fluidelor compresibile prezintă însă dificultăţi foarte serioase, astfel că este necesar să se recurgă la anumite simplificări, datorită cărora problema devine accesibilă metodelor matematice curente. Astfel, în cele ce urmează, vom prezenta o metodă care permite rezolvarea unor probleme fundamentale ale mişcării fluidelor compresibile, în ipoteza că această mişcare este permanentă, plană şi irotaţională, iar fluidul este perfect, adică lipsit de frecare.

In acest caz, există un potenţial de vitese φ şi putem scrie:

$$\overline{V} = \nabla\varphi \tag{1.1}$$

iar ecuaţia lui Bernoulli are forma:

$$\frac{V^2}{2} + \mathcal{S}(\rho) = C' \tag{1.2}$$

unde:

$$\mathcal{S}(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}. \tag{1.3}$$

Ecuaţia de continuitate se reduce de asemenea la forma[1]):

$$\nabla \cdot (\rho \overline{V}) = \rho \nabla \cdot \overline{V} + \overline{V} \cdot \nabla\rho = 0 \tag{1.4}$$

sau:

$$\nabla \cdot \overline{V} + \frac{1}{\rho} \overline{V} \cdot \nabla\rho = 0 \tag{1.5}$$

[1]) Semnul · este întrebuinţat pentru indicarea produsului scalar.

Putem pune însă:

$$\frac{1}{\rho}\nabla\rho = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\nabla p = \frac{1}{a^2}\nabla\mathfrak{F} \tag{1.6}$$

unde $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ este vitesa sunetului; ținând seama de acest rezultat și de formula lui Bernoulli, relația (1 5) devine

$$\nabla\cdot\bar{V} - \frac{1}{a^2}\bar{V}\cdot\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Desvoltând această ecuație, găsim:

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)u_x + \left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)v_y - \frac{uv}{a^2}(u_y + v_x) = 0 \tag{1.8}$$

u și v fiind componentele vitesei $\bar{V}$ [1]).

Dacă punem

$$u = \varphi_x, \qquad v = \varphi_y \tag{1.9}$$

rezultă ecuația diferențială fundamentală:

$$\left(1-\frac{\varphi_x^2}{a^2}\right)\varphi_{xx} + \left(1-\frac{\varphi_y^2}{a^2}\right)\varphi_{yy} - 2\frac{\varphi_x\varphi_y}{a^2}\varphi_{xy} = 0 \tag{1.10}$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip mixt. Intr'adevăr, dacă $V^2 > a^2$ ecuația este de tip hiperbolic (domeniul supersonic), iar dacă $V^2 < a^2$, de tip eliptic (domeniul subsonic). Acest fapt introduce o nouă dificultate în integrarea ecuației, deoarece schimbarea de tip se produce pentru o valoare critică a vitesei sunetului care nu este cunoscută *a priori*, ci urmează a fi determinată în cursul calculelor.

Pentru domeniul subsonic la care ne referim, problema se leagă de teoria seriilor hipergeometrice și de suprafețele minime, amândouă aceste aspecte fiind remarcate de S. A. Ceaplîghin în lucrarea sa fundamentală [2]. In numeroasele studii care s'au întreprins ulterior, rezolvarea ecuației (1.10) a fost încercată prin metode foarte variate, iar scopul acestor rânduri este să atragă atenția asupra unor soluții aproximative, care au fost date cu ajutorul metodei lui B. G. Galerchin, cunoscută până acum numai pentru aplicațiile ei în rezolvarea problemelor din teoria elasticității [5], [6].

2. *Prima variație și ecuația lui Euler.* Metoda lui Galerchin având un caracter variațional, vom reaminti pe scurt în ce constă prima problemă a calculului variațiunilor. Să considerăm pentru aceasta integrala:

$$I = \iint_D F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\, dx\, dy \tag{2.1}$$

[1]) Am adoptat pentru derivate notația cu indici; astfel, u_x însemnează derivata lui u în raport cu x ș.a.m.d.

în care F este o funcțiune cunoscută de argumentele x, y, φ, φ_x, φ_y și are derivate parțiale de ordinul întâi și al doilea față de aceste argumente.

Se cere să determinăm funcțiunea $\varphi(x, y)$, care dă acestei integrale o valoare extremă. Funcțiunea $\varphi(x, y)$ este presupusă continuă de clasa $C^{(2)}$ și are valori date pe frontiera C a domeniului simplu conex D.

Să presupunem că am găsit funcțiunea $\varphi(x, y)$ care dă un *extremum* al integralei I și fie $I(\varphi)$ valoarea acesteia, pe care s'o comparăm cu valoarea integralei care corespunde altor funcțiuni. Să înlocuim în (2.1) funcțiunea $\varphi(x, y)$ prin $\varphi(x, y) + \varepsilon\eta(x, y)$, ε fiind un parametru arbitrar de mic, iar $\eta(x, y)$ o funcțiune care se anulează pe frontiera C și îndeplinește aceleași condițiuni de continuitate ca și $\varphi(x, y)$. Integrala I devine în acest caz o funcțiune de ε și are o valoare extremă pentru $\varepsilon = 0$.

Putem scrie deci:

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{2.2}$$

Avem însă:

$$I(\varepsilon) = \iint_D F(x, y, \varphi + \varepsilon\eta, \varphi_x + \varepsilon\eta_x, \varphi_y + \varepsilon\eta_y)\, dx\, dy \tag{2.3}$$

și prin urmare, derivând sub semnul integral, găsim:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \iint_D (F_\varphi\eta + F_{\varphi_x}\eta_x + F_{\varphi_y}\eta_y)\, dx\, dy = 0 \tag{2.4}$$

sau:

$$\iint_D \left(F_\varphi - \frac{\partial F_{\varphi_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\varphi_y}}{\partial y}\right)\eta\, dx\, dy + \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{\varphi_x}\eta) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{\varphi_y}\eta)\right] dx\, dy = 0 \tag{2.5}$$

Aplicând teorema lui Green obținem:

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{\varphi_x}\eta) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{\varphi_y}\eta)\right] dx\, dy = \int_C \eta(-F_{\varphi_y}\, dx + F_{\varphi_x}\, dy) = 0 \tag{2.6}$$

deoarece pe conturul C, $\eta = 0$.

Prin urmare:

$$\iint_D \left[F_\varphi - \frac{\partial F_{\varphi_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\varphi_y}}{\partial y}\right]\eta\, dx\, dy = 0; \tag{2.7}$$

deoarece $\eta(x, y)$ este o funcțiune arbitrară, aplicarea primei leme a calculului variațiunilor ne dă:

$$F_\varphi - \frac{\partial F_{\varphi_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\varphi_y}}{\partial y} = 0 \tag{2.8}$$

ecuație diferențială analoagă cu ecuația lui Euler și care trebue satisfăcută de funcțiunea φ.

3. *Metoda lui Galerchin* [4]. Am arătat că problema găsirii unei valori extreme pentru integrala:

$$I = \iint_D F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\, dx\, dy \tag{2.1}$$

ne conduce la relația:

$$\iint_D L(\varphi)\, \eta(x, y)\, dx\, dy = 0 \tag{3.1}$$

unde am notat:

$$L(\varphi) = F_\varphi - \frac{\partial F_{\varphi_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\varphi_y}}{\partial y} = 0 \tag{3.2}$$

ecuația diferențială asociată problemei. Relația (3.2) poate fi interpretată ca arătând că expresia $L(\varphi)$ este ortogonală față de orice variație $\varepsilon\eta(x, y)$, care se anulează pe frontiera C.

Galerchin admite că o soluție aproximativă pentru $\varphi(x, y)$ se poate pune sub forma:

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x, y) \tag{3.3}$$

funcțiunile $f_i(x, y)$ satisfăcând condițiunile la frontieră impuse lui $\varphi(x, y)$. Deoarece $\varphi_n(x, y)$ nu este soluția exactă și nu satisface ecuația (3.2), relația (3.1) nu mai este valabilă pentru orice variație arbitrară $\varepsilon\eta(x, y)$. Prin urmare, variația integralei I nu este nulă pentru orice variație $\varepsilon\eta(x, y)$, dar se pot alege astfel constantele C_i pentru ca variația integralei I să fie nulă pentru n variații $\varepsilon f_i(x, y)$. Dacă n tinde către infinit, iar funcțiunile $f_i(x, y)$ formează un sistem ortogonal complet[1]), șirul de relații:

$$\iint_D L(\varphi_n) f_i\, dx\, dy = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{3.4}$$

este echivalent cu relația (3.1).

Expresia $L(\varphi)$ se anulează când funcțiunea $\varphi(x, y)$ este soluția exactă a problemei. Deci, valoarea expresiei $L(\varphi_n)$ poate fi privită ca măsura erorii asociate cu aproximația φ_n, iar $L(\varphi_n)$ joacă rolul unei funcțiuni de eroare:

$$e_n(x, y) = L(\varphi_n) \tag{3.5}$$

---

[1]) Amintim că un șir de funcțiuni $f_i(x)$ formează un sistem ortogonal complet, dacă o funcțiune continuă $\varphi(x)$ poate fi aproximată printr'o sumă $\sum_1^n C_i f_i(x)$, astfel încât eroarea pătratică medie $\int(\varphi - \sum_1^n C_i f_i)^2\, dx$ să fie arbitrar de mică la o alegere potrivită a lui n.

Din (3.4) rezultă că funcţiunea de eroare este ortogonală cu fiecare din cele n funcţiuni $f_i(x, y)$.

Cele n relaţii (3.4) determină n coeficienţi şi prin urmare soluţia aproximativă $\varphi_n(x, y)$. Metoda lui Galerchin conduce aşa dar la rezolvarea unui sistem de n ecuaţii algebrice cu n necunoscute, care este liniar numai dacă ecuaţia $L(\varphi) = 0$ este liniară.

4. *Aplicarea metodei lui Galerchin la studiul mişcării fluidelor compresibile.* Să revenim la ecuaţia (1.10), în care vom înlocui vitesa sunetului a prin expresia sa:

$$a^2 = a_\infty^2 + \frac{\varkappa - 1}{2} V_\infty^2 + \frac{1 - \varkappa}{2}(u^2 + v^2) \tag{4.1}$$

în care vom nota:

$$\lambda = a_\infty^2 + \frac{\varkappa - 1}{2} V_\infty^2, \qquad \mu = \frac{1 - \varkappa}{2} \tag{4.2}$$

astfel că relaţia (4.1) se scrie:

$$a^2 = \lambda + \mu(u^2 + v^2) \tag{4.3}$$

Cu această expresie a vitesei sunetului, ecuaţia (1.10) devine:

$$[\lambda + \mu(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - \varphi_x^2]\varphi_{xx} + [\lambda + \mu(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - \varphi_y^2]\varphi_{yy} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0 \tag{4.4}$$

Sub această formă este uşor de verificat că (4.4) reprezintă ecuaţia diferenţială asociată integralei:

$$I = \iint_D [\lambda + \mu(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)]^\gamma \, dx\, dy \tag{4.5}$$

unde:

$$\gamma = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 1 - \frac{1}{2\mu} \tag{4.6}$$

In felul acesta, se poate face o legătură între rezolvarea ecuaţiei (4.4) şi prima problemă a calculului variaţiunilor. Se observă astfel că dacă punem $\lambda = \mu = 1$, de unde rezultă $\gamma = \frac{1}{2}$, integrala (4.5) devine:

$$I = \iint_D \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}\, dxdy \tag{4.7}$$

iar ecuaţia cu derivate parţiale corespunzătoare este:

$$(1 + \varphi_y^2)\varphi_{xx} + (1 + \varphi_x^2)\varphi_{yy} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0 \tag{4.8}$$

Această ecuaţie se referă însă la o problemă cunoscută, şi anume la determinarea suprafeţei de arie minimă, care trece printr'un contur dat.

Aceste suprafețe minime, care sunt suprafețele integrale ale ecuației (4.8), au curbura medie nulă.

Pentru λ și μ dați prin condiții fizice, suprafețele integrale ale ecuației (4.4) pot fi interpretate ca suprafețe minime relative generalizate, a căror curbură relativă medie este nulă [1].

Pe de altă parte însă, faptul că ecuația (4.4) este asociată integralei (4.5) permite tratarea problemei printr'o metodă variațională de rezolvare aproximativă și în particular prin metoda lui Galerchin.

Potențialul scurgerii irotaționale a unui fluid compresibil poate fi pus sub forma:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_p \sum_q A_{pq}\, \varphi_{pq} \tag{4.9}$$

unde φ_0 și φ_{pq} satisfac condițiile pe frontieră, iar A_{pq} sunt parametri nedeterminați. Inmulțind $L(\varphi_n)$ cu φ_{pq} și integrând expresia rezultată pe întreg domeniul, după egalarea rezultatului cu zero, obținem n ecuații algebrice cu n necunoscute pentru determinarea coeficienților A_{pq}.

Ca exemplu, vom arăta cum s'a tratat cu ajutorul acestei metode problema scurgerii irotaționale a unui fluid compresibil în jurul unui cilindru circular. Pentru ușurință, vom introduce coordonatele polare și vom scrie ecuația (1.10) sub forma:

$$\begin{aligned} L(\varphi) = &\left[a_\infty^2 + \frac{\varkappa-1}{2}\left(V_\infty^2 - \varphi_r^2 - \frac{\varphi_\theta^2}{r^2}\right) - \varphi_r^2\right]\varphi_{rr} + \\ &+ \left[a_\infty^2 + \frac{\varkappa-1}{2}\left(V_\infty^2 - \varphi_r^2 - \frac{\varphi_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{\varphi_\theta^2}{r^2}\right]\frac{\varphi_{\theta\theta}}{r^2} + \left[a_\infty^2 + \frac{\varkappa-1}{2}\left(V_\infty^2 - \right.\right. \\ &\left.\left. - \varphi_r^2 - \frac{\varphi_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{\varphi_\theta^2}{r^2}\right]\frac{\varphi_r}{r} - 2\varphi_r\varphi_\theta\frac{\varphi_{r\theta}}{r^2} = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

în care indicii r și θ se referă la derivatele parțiale. Condițiunile la frontieră sunt:

$$\left.\begin{aligned} \left[\varphi_r^2 + \frac{\varphi_\theta^2}{r^2}\right]^{1/2} &= V_\infty \quad \text{la} \quad r = \infty \quad \text{și} \\ \varphi_r &= 0 \qquad \text{la} \quad r = 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

raza cercului fiind egală cu unitatea.

Ținând seamă de aceste condiții, potențialul scurgerii poate fi pus sub forma:

$$\varphi = V_\infty\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[\frac{1}{pr^p} - \frac{1}{(p+2)r^{p+2}}\right]\times \tag{4.12}$$
$$\times (A_{pq}\cos q\theta + B_{pq}\sin q\theta)$$

Γ fiind circulația.

De aci rezultă imediat ecuațiile lui Galerchin cu ajutorul cărora se pot determina parametrii A_{pq} și B_{pq}:

$$\left.\begin{aligned}\int_1^\infty\int_0^{2\pi} L(\varphi_n)\left[\frac{1}{pr^p}-\frac{1}{(p+2)\,r^{p+2}}\right]\cos q\theta\, r\,dr\,d\theta=0\\ \int_1^\infty\int_0^{2\pi} L(\varphi_n)\left[\frac{1}{pr^p}-\frac{1}{(p+2)\,r^{p+2}}\right]\sin q\theta\, r\,dr\,d\theta=0\end{aligned}\right\}\tag{4.13}$$

In aceste ecuații, $L(\varphi_n)$ reprezintă ecuația (4.10) în care am înlocuit pe φ cu expresia sa (4.12), limitându-ne însă la primii n parametri. Este evident că în acest caz $L(\varphi_n)$ nu mai este egal cu zero.

Chi-Teh Wang și R. F. Brodsky [3] au considerat cazul mai simplu al scurgerii fără circulație. Mișcarea fiind simetrică, termenii nesimetrici din expresia lui φ dispar, iar dacă se limitează desvoltarea la primii patru parametri, avem:

$$\begin{aligned}\varphi_4 = V_\infty\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta + A_{11}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{3r^3}\right)\cos\theta + A_{13}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{3r^3}\right)\cos 3\theta +\\ + A_{31}\left(\frac{1}{3r^3}-\frac{1}{5r^5}\right)\cos\theta + A_{33}\left(\frac{1}{3r^3}-\frac{1}{5r^5}\right)\cos 3\theta.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Prin urmare, ecuațiile (4.13) devin:

$$\left.\begin{aligned}\iint L(\varphi_4)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{3r^3}\right)\cos\theta\, r\,dr\,d\theta=0\\ \iint L(\varphi_4)\left(\frac{1}{3r^3}-\frac{1}{5r^5}\right)\cos\theta\, r\,dr\,d\theta=0\\ \iint L(\varphi_4)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{3r^3}\right)\cos 3\theta\, r\,dr\,d\theta=0\\ \iint L(\varphi_4)\left(\frac{1}{3r^3}-\frac{1}{5r^5}\right)\cos 3\theta\, r\,dr\,d\theta=0\end{aligned}\right\}\tag{4.15}$$

Integrarea nu prezintă dificultăți, iar dacă punem $\varkappa = 1{,}405$ (pentru aer), obținem următorul sistem de ecuații algebrice:

$$\begin{aligned}&(0{,}51851844\,a_\infty^2 - 0{,}6819993\,V^2)\,A_{11} + 0{,}4205556\,V_\infty^2\,A_{13} +\\ &+(0{,}0814814\,a_\infty^2 - 0{,}0902122\,V_\infty^2)\,A_{31} + 0{,}0271777\,V_\infty^2\,A_{33} = K_1\\ &0{,}7841668\,V_\infty^2\,A_{11} + (3{,}3333328\,a_\infty^2 - 3{,}5691657\,V_\infty^2)\,A_{13} +\\ &+ 0{,}1182662\,V_\infty^2\,A_{31} + (0{,}3999998\,a_\infty^2 - 0{,}4778126\,V_\infty^2)\,A_{33} = K_2\\ &(0{,}0814814\,a_\infty^2 - 0{,}0928529\,V_\infty^2)\,A_{11} + 0{,}0772793\,V_\infty^2\,A_{13} +\\ &+(0{,}0225185\,a_\infty^2 - 0{,}0152367\,V_\infty^2)\,A_{31} + 0{,}0081639\,V_\infty^2\,A_{33} = K_3\\ &0{,}0972529\,V_\infty^2\,A_{11} + (0{,}3999998\,a_\infty^2 - 0{,}4950988\,V_\infty^2)\,A_{13} +\\ &+ 0{,}0174196\,A_{31} + (0{,}0693329\,a_\infty^2 - 0{,}0789673\,V_\infty^2)\,A_{33} = K_4\end{aligned}\tag{4.16}$$

K_1, K_2, K_3 și K_4 fiind sume de termeni neliniari în A_{11}, A_{13}, A_{31}, A_{33}. Rezolvarea sistemului (4.16) se face prin aproximații succesive, presupunând mai întâi K_1, K_2, K_3, K_4 independenți de parametrii A_{pq}. Se obțin astfel, în primă aproximație, parametrii A_{pq} și apoi se calculează valorile coeficienților K și se reface calculul parametrilor A_{pq}.

Executându-se acest calcul pentru numărul lui Mach $M = 0{,}4$, s'a găsit:

$$\frac{A_{11}}{a_\infty} = 0{,}09664 \quad , \quad \frac{A_{13}}{a_\infty} = -0{,}02194$$

$$\frac{A_{31}}{a_\infty} = -0{,}04563 \quad , \quad \frac{A_{33}}{a_\infty} = -0{,}01975.$$

Cunoscându-se expresia potențialului φ, se pot calcula vitesele în diferite puncte ale cilindrului circular. Este interesant să se compare valorile date de metoda lui Galerchin și acelea găsite prin alte metode. In tabloul alăturat se dau valorile viteselor calculate prin metoda lui Galerchin, prin metoda Janzen-Rayleigh, de către I. I m a i și prin metoda variațională Ritz-Rayleigh. Prin metoda lui Galerchin, vitesa a fost calculată cu unul, doi, trei și patru parametri, pentru a se putea examina convergența valorilor găsite.

TABLOUL Nr. 1

Distribuția de vitese pe suprafața cilindrului circular la $M = 0{,}4$.

θ \ $\frac{V}{V_\infty}$	Metoda lui Galerchin ($\varkappa = 1{,}405$)				Metoda Janzen-Rayleigh ($\varkappa = 1{,}405$)	Metoda Ritz-Rayleigh ($\varkappa = 2$)
	1 termen	2 termeni	3 termeni	4 termeni		
0°	0	0	0	0	0	0
10°	0,3714	0,3125	0,3119	0,3078	0,3104	0,3022
30°	1,0696	0,9534	0,9517	0,9435	0,9588	0,9347
45°	1,5127	1,5108	1,5088	1,4956	1,4154	1,4937
60°	1,8526	1,8608	1,8584	1,8583	1,8355	1,8663
80°	2,1068	2,2208	2,2183	2,2254	2,2269	2,2460
90°	2,1393	2,2697	2,2672	2,2753	2,284	2,2979

Remarcăm că pentru calculul prin metoda Ritz-Rayleigh s'a folosit, pentru simplificare, valoarea $\varkappa = 2$, dar cu toate acestea rezultatele nu diferă mult de acelea obținute cu ajutorul celorlalte metode.

Metoda lui Galerchin a mai fost aplicată de aceiași autori, pentru studiul problemelor legate de stratul limită laminar, în scurgerea fluidelor compresibile.

5. *Concluziuni.* Printre metodele variaționale care pot fi luate în considerație în studiul mișcării fluidelor compresibile, aceea a lui Galerchin prezintă avantajul unei formulări matematice mai simple și permite întrebuințarea valorii exacte a raportului căldurilor specifice $\varkappa$. Totuși, pentru scurgerea în jurul unui corp oarecare, metoda necesită calcule destul de laborioase.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Вопросы в связи с потенциальным течением сжимаемых жидкостей представляют значительные математические трудности, требующие приближенных решений.

Давно известно, что удовлетворенное потенциалом скоростей дифференциальное уравнение можно связать с вариационной задачей.

Таким образом, задачи можно решать приближенными методами вариационного характера, особенно методом Галеркина, применявшимися за последнее время с хорошими результатами.

L'EMPLOI DE LA MÉTHODE DE GALERKINE DANS L'ÉTUDE DU MOUVEMENT DES FLUIDES COMPRESSIBLES

(RÉSUMÉ)

Les problèmes reliés à l'écoulement potentiel des fluides compressibles présentent de sérieuses difficultés d'ordre mathématique, qui rendent nécessaire la recherche des solutions approximatives. Ainsi, l'on a remarqué depuis longtemps que l'équation différentielle que doit satisfaire le potentiel des vitesses peut être associée à un problème variationnel. De cette manière les problèmes peuvent être traités par des méthodes d'approximation à caractère variationnel et en particulier par la méthode de Galerkine, ce qui a fait l'objet de quelques études récentes, qui ont donné de bons résultats.

BIBLIOGRAFIE

1. Behrbohm H. u. Pinl M., Z. angew. Math., 1941, v. 21, p. 193 şi 341.
2. Ceaplîghin S. A., *O gazovîh struiah.* Sobranie socinenii, v. 2, Oghiz, Moscova-Leningrad, 1948.
3. Chi-Teh Wang a. Brodsky F. R., Journal of the Aeronautical Sciences, 1950, v. 17, p. 660.
4. Galerchin B. G., Vestnic injenerov, 1915, Nr. 19, p. 897.
5. Mihlin S. G., *Priamie metodî v matematicescoi fiziche.* Gosudarstvennoe izdatelstvo tehnico-teoreticescoi literaturî, Moscova-Leningrad, 1950, p. 276.
6. Sokolnikoff I. S. a. Specht R. D., *Mathematical Theory of Elasticity.* McGraw Hill Book Company, New York, 1946, p. 313.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1–2, 1952

PROGRESE RECENTE ÎN METALURGIA METALELOR ŞI ALIAJELOR UŞOARE

DE

ŞT. MANTEA

Sub numele de metale sau aliaje uşoare sunt cunoscute acele materiale metalice a căror densitate este inferioară lui 3,5 şi care, în cele mai multe cazuri nu depăşeşte 3. Condiţia densităţii o satisfac numeroase elemente din grupa metalelor, metalelor alcaline sau metalelor alcalino-pământoase, dar nu sunt luate în seamă pentru nevoile practice decât cele care prezintă stabilitate suficientă faţă de agenţii corosivi obişnuiţi (apa şi aerul) şi posedă puncte de topire superioare lui 600°, cum sunt *aluminiul*, *magneziul* şi beriliul.

Aluminiul şi magneziul, sub formă pură sau ca aliaje, sunt metalele uşoare cele mai întrebuinţate în industrie şi despre ele ne vom ocupa în prezenta lucrare; beriliul, metal uşor de mare viitor, se găseşte încă în perioada copilăriei în ceea ce priveşte metoda de extragere şi de aceea el este utilizat doar ca element de adaus în aliajele industriale, fiind capabil să influenţeze, în mod simţitor, anumite proprietăţi ale acestora. Celelalte elemente uşoare (Na, Ka, Li, Ce, Rb, Ca, Sr, Ba) sunt utilizate şi ele la fabricarea aliajelor uşoare dar numai în cantităţi mici, ca elemente de adaus.

Acum un sfert de secol, în orişice curs de metalurgie, oricât de voluminos ar fi fost, industria aluminiului era tratată doar în câteva pagini. Acest metal ocupa un loc foarte modest alături de marii săi strămbuni milenari: fierul, cuprul, zincul, plumbul şi cositorul.

Intr'un sfert de secol însă, producţia mondială a acestui metal a suferit schimbări profunde, trecând dela cca 180000 t cât era în 1925, la de opt ori mai mult astăzi, în timp ce producţia de cupru a crescut doar cu 36%, producţia de zinc cu 30%, de plumb cu 30%, etc. Dacă la producţia de aluminiu mai adăugăm şi pe aceea de magneziu, constatăm că totalul producţiei de metale uşoare s'a înzecit în ultimul sfert de veac.

In acelaşi timp, preţul de cost al metalelor uşoare a fost în continuă scădere. Luând ca exemplu preţul aluminiului şi comparându-l cu acel al cuprului, constatăm că de unde în 1920 preţul aluminiului era cu 71% mai ridicat, în 1938 el îl depăşea doar cu 21%, pentru ca în prezent situaţia să se inverseze, adică preţul cuprului să întreacă pe acel al aluminiului.

Aluminiul este singurul dintre metale care astăzi costă cu 25% mai puţin decât în 1939, preţul lui scăzând necontenit, în timp ce acel al cuprului a

crescut cu 92%, al zincului cu 137% şi al plumbului cu 240%. Scăderea aceasta a preţului de cost ilustrează de fapt marile progrese realizate în domeniul mijloacelor de extracţie ale acestui metal.

Metalele şi aliajele uşoare posedă caracteristice a căror diversitate, câteodată paradoxală, le fac de neînlocuit în anumite cazuri, şi le asigură o multiplicitate de întrebuinţări care atinge toate domeniile. Producţia lor a luat o extindere şi mai mare odată cu desvoltarea industriei aeronautice şi recordurile de producţie, marcate în anii grei ai celor două războaie mondiale, sunt o dovadă în ceea ce priveşte importanţa metalelor uşoare din punct de vedere strategic. De altfel, un comentator al cercurilor militare capitaliste, care se pregătesc pentru un nou război, consideră industria metalelor uşoare ca o industrie de primul ordin, care nu cedează din întâietate decât cercetărilor atomice.

PROGRESE TEHNICE ÎN DOMENIUL METODELOR DE EXTRACŢIE

Aluminiul

Despre o utilizare industrială a aluminiului nu se poate vorbi decât odată cu descoperirea procedeului de electroliză a oxidului de aluminiu (Al_2O_3), într'o baie de criolită topită (1000°C). Electrozii sunt formaţi din cărbune, anodul fiind suspendat în baia topită, iar fundul cuvei de electroliză constituind catodul unde se adună metalul şi de unde este scos la intervale regulate.

Procedeul electrolitic de fabricare a aluminiului este folosit astăzi în mod universal. Acest procedeu a rămas însă aproape neschimbat, menţinându-se, în linii mari, aşa cum a fost imaginat de către Heroult în anul 1886.

Totuşi, treptat, i-au fost aduse o serie întreagă de perfecţionări tehnice, dintre care cea mai importantă socotim că este înlocuirea electrozilor ficşi, copţi în prealabil, cu electrodul continuu al lui Soederberg. Prin această perfecţionare consumul de electrozi s'a putut reduce în mare măsură, metalul fabricat a fost mai pur, iar condiţiile de lucru ale muncitorilor au fost îmbunătăţite mult. Datorită electrodului continuu a fost posibilă închiderea etanşă a celulelor de electroliză, eliminând astfel influenţa vătămătoare a gazelor în uzinele de aluminiu şi realizând totodată recuperarea pierderilor în gaze şi alumină.

Schematic, sunt arătate mai jos două asemenea dispozitive de electrozi continui, utilizaţi în prezent. In figura 1, electrodul este turnat într'o cămaşă de aluminiu destinată a da pastei forma dorită înainte de coacere. Cămaşa de aluminiu este susţinută prin cadre de oţel, iar contactul curentului este realizat printr'o serie de legături laterale. In figura 2 este reprezentat un alt sistem, la care introducerea curentului şi suspensia electrodului se face cu ajutorul unor legături verticale. In acest caz, cămaşa de aluminiu a fost suprimată şi înlocuită printr'o teacă permanentă de oţel, în care electrodul este fasonat şi copt şi prin care el lunecă pe măsură ce se consumă. Partea inferioară a tecii este introdusă într'o pâlnie, care împreună cu corpul electrodului serveşte drept colector de gaze, iar legăturile de contact verticale sunt ridicate în mod periodic.

Aplicarea recentă a acestor dispozitive la cuve de electroliză de câte 100 000 A deschide drum nou pentru construirea instalaţiunilor de mare capacitate de producţie.

Criolita fiind un material scump, care se găsește în stare naturală doar în câteva puncte de pe suprafața globului și care trebue fabricat pe cale sintetică, s'au făcut încercări de electroliză și în alte săruri. In ultimul timp, s'au obținut rezultate deosebit de promițătoare în experimentările făcute asupra unei băi de electroliză formată din $AlCl_3$—NaCl în stare topită. Randamentul de curent este de 90%, cu un consum de 19 kWh/kg de aluminiu, de o puritate 100%.

Fabricarea aluminei necesare electrolizei a suferit perfecționări continue, stabilindu-se numeroase procedee de tratare alcalină a bauxitei. Primele

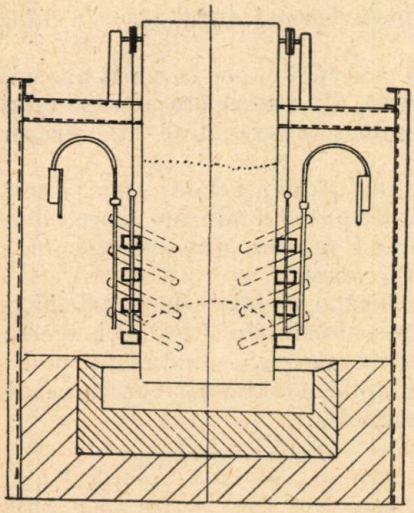


Fig. 1. — Electrod continuu în cămașă de aluminiu.

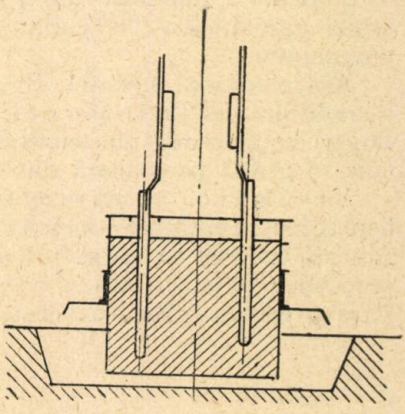


Fig. 2. — Electrod continuu turnat în teacă de oțel.

metode utilizate au fost cele termo-alcaline, cărora le-a urmat procedeul Bayer, întrebuințat astăzi aproape universal. Procedeele prin aluminat monocalcic, electro-termice și prin tratare acidă a minereurilor de aluminiu s'au desvoltat numai în ultimele decenii, căutând fie să reducă sau să suprime consumul de sodă în cazul bauxitelor silicioase, fie să recupereze și celelalte elemente aflate în bauxite, în speță fierul, în cazul bauxitelor feruginoase.

Atragem în mod special atențiunea asupra procedeelor electro-termice. Se pare că ele reprezintă calea cea mai potrivită pentru tratarea bauxitelor feruginoase cu conținut mai ridicat de siliciu, așa cum este cazul bauxitelor indigene. Prin aceste procedee se poate realiza înafară de extragerea aluminei sub formă de aluminat, ce poate fi apoi prelucrat pe una din căile alcaline clasice, și recuperarea fierului sub forma unui aliaj de fier-siliciu.

Astăzi, în multe țări, laboratoare importante lucrează pe căi diferite pentru punerea la punct a unor noi procedee, complet deosebite de procedeele electrolitice. Ele urmăresc să întrebuințeze în locul aluminei pure, fabricată prin procedeele amintite mai sus, minereuri mai puțin pure, chiar în starea în care ele să găsesc în natură, cu un consum de energie electrică mult mai scăzut, lăsând astfel să se întrevadă o ameliorare sensibilă a prețului de cost.

Se cuvine, cu această ocazie, să arătăm aportul savanţilor sovietici la problema fabricării aluminiului.

Electroliza sărurilor topite, care formează astăzi baza metalurgiei aluminiului, a fost aplicată pentru prima dată de către savantul rus Lapşin în 1859; el a construit în acest scop o puternică baterie galvanică şi a publicat chiar în Buletinul ştiinţific din anul 1862 un articol cuprinzând rezultatul cercetărilor sale.

In 1865, Nicolai Behetov, profesor la Universitatea din Harcov, a descoperit reacţia care îi poartă numele şi care constă în descompunerea criolitului cu ajutorul magneziului, punând astfel în libertate aluminiul. Bazat pe această reacţie, a luat fiinţă un procedeu industrial care s'a difuzat apoi şi în alte părţi ale lumii.

Chimistul Bayer, lucrând în Rusia, a conceput şi pus la punct procedeul de fabricare a aluminei, care îi poartă numele. Prin acest procedeu se fabrică astăzi aproximativ 90% din totalul aluminei întrebuinţate la extragerea aluminiului.

Academicianul sovietic Briţche a pus la punct fabricarea sintetică a criolitului, iar Prof. Mazel, în 1935, a propus o combinare a procedeului Bayer cu procedeul de sinterizare, elaborând un nou procedeu tehnologic, care se aplică pe o scară din ce în ce mai mare.

Verighin, un alt savant sovietic, utilizând metalele cu punct de fierbere scăzut, a elaborat o metodă de extragere a aluminiului din aliajele acestuia. Această metodă va permite fondarea unei metalurgii a aluminiului pe baza proceselor termice, fără o preparare prealabilă a aluminei curate, putând servi şi pentru rafinarea secundară a aluminiului.

Magneziul

Producerea comercială a magneziului nu s'a făcut decât pe la începutul secolului al XX-lea, iar utilizarea lui pe o scară mai mare în industrie s'a făcut numai în ultimii 20 de ani, datorită progreselor realizate în metodele de extragere şi care au permis reducerea preţului de cost.

Metodele întrebuinţate azi pentru extragerea magneziului sunt de două feluri:

a) metoda de electroliză a sărurilor de magneziu în stare topită, întocmai ca în cazul aluminiului;

b) metode de reducere pe cale termică, utilizând un agent reductor solid.

In primul caz, din minereurile de magneziu se extrag sărurile $MgCl_2$ sau MgO, în stare cât mai pură; clorura de magneziu în stare anhidră este topită (750°) şi este supusă electrolizei în cuve speciale, iar magneziul ce se separă şi care pluteşte la suprafaţa lichidului, se scoate la intervale regulate. In locul clorurii de magneziu s'a pus la punct întrebuinţarea oxidului MgO, care, întocmai ca în cazul aluminiului, având un punct de topire foarte ridicat, se disolvă într'un electrolit (la 950°), format din părţi egale de floruri de magneziu şi bariu.

Procedeul cel mai întrebuinţat astăzi rămâne totuşi cel cu clorură de magneziu, care necesită însă un aparataj important şi destul de costisitor, atât pentru electroliza propriu zisă, cât mai ales pentru prepararea prin clorurare a clorurii de magneziu anhidre.

Metodele de reducere pe cale termică au luat o desvoltare foarte mare în ultimii zece ani. Materialul supus reducerii este sau oxidul de magneziu pur, sau chiar dolomita brută, iar ca agenți de reducere se folosesc carbonul, siliciul, aluminiul, sau carbura de calciu.

Reducerea cu carbon este cea mai interesantă, acesta fiind agentul de reducere cel mai ieftin. Ea are însă desavantajul că se face la temperaturi foarte înalte (cca 2000°) și necesită luarea unor măsuri speciale, pentru a preîntâmpina oxidarea vaporilor de magneziu de către oxigenul din aer, sau chiar de către produsele de reducere (CO). In acest procedeu, temperatura înaltă este dată de către un arc electric, iar vaporii de magneziu rezultați sunt prinși într'un curent rece de hidrogen care diluează oxidul de carbon rezultat prin reducere și totodată răcește energic și antrenează pulberea de magneziu.

Reducerea cu siliciu, aluminiu carbură de calciu, sau alți agenți reductori care dau ca produse de reacție substanțe solide, se poate face în vid sau într'o atmosferă inertă. Reducerea în vid se poate face în retorte de oțel, la temperatura de cca 1150°C, sub o presiune mai mică decât 1 mm, Hg. Schema unei asemenea instalațiuni este dată în Studii și Cercetări de Metalurgie și Mecanică Aplicată, Anul II, 1951, p. 117. Procedeul este intermitent, capacitatea de producție a unei retorte fiind mică, însă numărul retortelor poate fi multiplicat după nevoie.

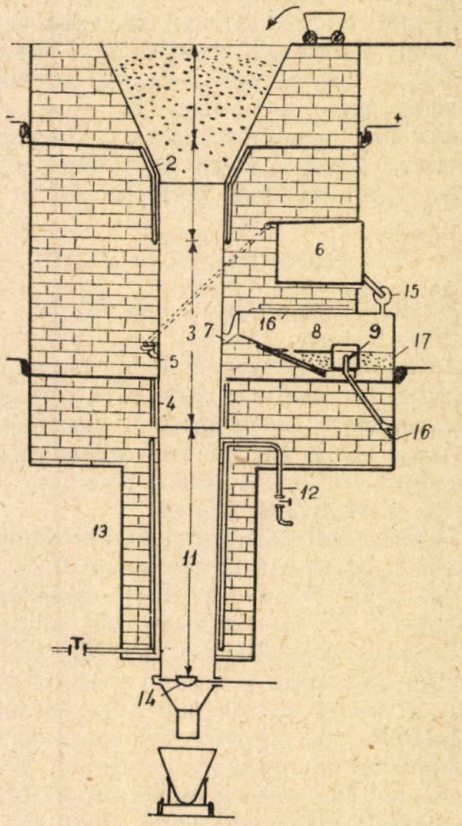


Fig. 3. — Cuptor de reducere pentru Mg în atmosferă de hidrogen.

Cu aceiași agenți de reducere s'a experimentat reducerea în atmosferă inertă, cum ar fi hidrogenul, și s'au realizat, în felul acesta, cuptoare de reducere fără vid și cu mers continuu. In figura 3 este arătat schematic un asemenea cuptor de reducere. Materialul fin sfărâmat și intim amestecat cu agentul de reducere este încărcat în cuptor pe la partea lui superioară. In regiunea (1) a cuptorului, amestecul este încălzit la cca 1000°, când este uscat și toți carbonații transformați în oxid, iar în regiunea (3) a cuptorului, amestecul este încălzit la 1350°—1400°, temperatură la care are loc reacția de reducere. Vaporii de magneziu formați trec în camera de condensare (8) fixată lateral pe cuptor și menținută, printr'un dispozitiv de încălzire special, la tempera-

tura de 750°. In regiunea (11) a cuptorului, reziduul încărcăturii este răcit înainte de a fi evacuat şi căldura este recuperată în dispozitivul (13).

Pentru ca vaporii de Mg să nu se oxideze, reducerea se face într'o atmosferă de hidrogen creată printr'un curent din acest gaz, care circulă în circuit închis dela rezervorul de hidrogen (6), la cuptorul de reducere (5), intră în camera de condensare prin (7), antrenând cu el vaporii de magneziu, şi trece apoi prin ventilatorul (15) din nou în rezervor.

Incălzirea părţilor 1 şi 3 ale cuptorului, precum şi a camerei de condensare este realizată prin circulaţia unei băi metalice încălzite prin efect Joule.

Metodele de reducere pe cale termică arătate mai sus sunt simple, instalaţiile sunt reduse şi investiţiile sunt minime. Preţul de revenire al magneziului, obţinut pe această cale, este mai mic sau cel mult egal cu cel obţinut în instalaţiile prin electroliză. In plus, puritatea metalului fabricat în acest fel este foarte înaintată şi ca o consecinţă, rezistenţa lui la coroziune, mult mai mare (lipseşte clorul care este o impuritate dăunătoare).

Se scontează mari perfecţionări în viitor pentru această metodă.

PROGRESE ÎN DOMENIUL PREPARĂRII ALIAJELOR

In domeniul aliajelor s'au fabricat numeroase tipuri cu proprietăţi din cele mai variate.

Astfel, aliajele ternare Al-Mg-Zn, cu mici adausuri de Mn şi Cr, sau ambele simultan, prezintă o rezistenţă la coroziune apropiată de aceea a aluminiului curat, asociată cu proprietăţi mecanice foarte ridicate.

Aliaje Al-Zn-Ni, cu mici adausuri de Cu, Mn, Mg, Fe, Si, Nb şi Ta, posedă după tratament termic rezistenţe ce merg până la 70 kg/mm^2, lungire 12,5% şi H = 218 Brinell.

In domeniul turnătoriei s'au creat aliaje cu rezistenţe ridicate, bună ductilitate şi rezistenţă la coroziune (0,4% Cu, 0,6% Zn, 0,33% Mg, 0,25% Cr şi 0,15% Ti). Asemenea aliaje îmbătrânesc la temperatura ordinară, fără a fi nevoie de un tratament de solubilizare.

De asemenea, aliaje cu 6% Mg, 1,5% Cu, 0,1% Mn şi mici adausuri de zirconiu, bor, titan şi beriliu, prezintă proprietăţi mecanice excelente la temperatură înaltă şi cele mai bune caracteristice de fluaj la 315°.

Introducerea aliajelor de magneziu şi ceriu reprezintă un pas important în domeniul aliajelor de magneziu. Turnate sau laminate, aliajele acestea posedă la temperatură înaltă proprietăţi mecanice şi caracteristice de fluaj comparabile celor mai bune aliaje de Al.

Aliajele Mg-Zn care au fost studiate mai în amănunt şi cele care conţin şi Zr (0,6% Zr şi 6% Zn) au cea mai mare rezistenţă la compresiune.

Efectul Be asupra arderii magneziului în cursul topirii sau turnării a fost de asemenea analizat.

UTILIZAREA ALIAJELOR UŞOARE ÎN DOMENIUL CONSTRUCŢIILOR

Intrebuinţarea aliajelor uşoare în domeniul construcţiilor a trebuit să ţină seamă, înafară de rezistenţa la tracţiune sau de rezistenţa la acţiunea agenţilor chimici, şi de alte proprietăţi mecanice tot atât de importante.

Astfel, modulul de elasticitate a aliajelor uşoare este cam 1/3 din acel al oţelului moale şi nu poate fi modificat prin schimbarea compoziţiei sau prin

vreun tratament termic, el nefiind funcție de rezistența la rupere. Din această cauză, o grindă de aluminiu, de același profil cu una de oțel, pentru aceeași rezistență mecanică, cântărește 1/3 din greutatea celei de oțel; dar pentru a obține aceeași rigiditate, trebue să mărim momentul de inerție, mărind de 1,4 ori adâncimea grinzii și cu 50% suprafața aripelor. In felul acesta, greutatea grinzii din aliaj ușor ajunge la jumătatea greutății grinzii de oțel. In plus, un asemenea profilat, din cauza modulului de elasticitate scăzut al metalului, posedând o bună rezilienţă, va rezista mult mai bine la șocuri, decât cel fabricat din oțel.

In aceste condițiuni, aliajele ușoare pot fi utilizate cu succes în tot felul de construcții cum ar fi clădiri, acoperișuri, poduri, tot felul de grinzi compuse, arce de mare deschidere, etc. Ca exemplu citâm construirea pentru prima dată în 1945, a unui panou de pod de cale ferată. Deschiderea panoului este de 30 m și cântărește numai 24 t, față de 57 t, cât cântăresc celelalte trei panouri ale aceluiași pod făcute din oțel. Menționăm că primul pod de cale ferată construit din fontă în 1797, având tot 30 m deschidere, cântărea 378 de tone.

ALTE DOMENII DE UTILIZARE A ALIAJELOR UȘOARE

Am putea spune că nu există domeniu industrial în care să nu se fi încercat utilizarea aliajelor ușoare și unde, datorită diversității proprietăților ce posedă, să nu fi dat rezultate satisfăcătoare.

Uzinajul aliajelor ușoare cu ajutorul sculelor tăietoare se face în condițiuni excelente și într'o cadență mult mai rapidă decât pentru oțel și fonte. Turnarea se face cu ușurință, atât normal cât și sub presiune.

Ca aspect, aliajele ușoare au o înfățișare plăcută și perfecționarea continuă a metodelor chimice de lustruire și protecție anodică a făcut ca ele să fie utilizate cu mult succes pentru decorațiuni și lucrări de artă.

In industria minieră, aliajele ușoare se întrebuințează la fabricarea perforatoarelor, la susținerea galeriilor, precum și la construirea mijloacelor de transport (vagonete, jghiaburi oscilante, colivii de ascensoare, etc.).

Industria petroliferă utilizează conducte de transport din aliaje ușoare, vase speciale pentru rafinării, cisterne de cale ferată, rezervoare, etc.

Pentru industria alimentară și industria casnică, folosirea aluminiului reprezintă un mare progres, datorită proprietăților acestui metal de a rezista la coroziune și de a da săruri netoxice. Se fabrică astfel ambalaje, cutii de conserve, vase de transport pentru alimente, butoaie, etc.

In industria electrică, aluminiul tinde să înlocuiască cuprul. Datorită bunei sale conductibilități, se întrebuințează cu succes la fabricarea motoarelor electrice, a conductorilor de înaltă tensiune, în instalațiuni interioare și a conductorilor de tramvai și troleibuz. Se întrebuințează la fabricarea transformatorilor, a redresorilor de curent, la executarea conexiunilor și la construirea aparatelor electrice de tot felul.

Ca urmare a caracteristicelor sale electro-chimice, magneziul este utilizat la fabricarea pilelor electrice în locul zincului, putând da de trei ori mai mult curent, cu o tensiune de 2,5 ori mai mare; de asemenea, la protejarea instalațiunilor feroase contra coroziunii.

Metalele și aliajele ușoare se folosesc în marină, la căile ferate și în agricultură. Ele au cele mai felurite utilizări și astăzi a început să se fabrice din aluminiu o fibră din care se pot confecționa stofe, mănuși, tricouri și alte

articole de îmbrăcăminte, mai uşoare, mai călduroase şi chiar mai ieftine decât ţesăturile de lână.

Inafară de faptul că metalele uşoare prezintă proprietăţi foarte interesante, viguroasa tendinţă de integrare a lor în economia modernă este şi firească. Intr'adevăr, dacă cercetăm răspândirea lor în scoarţa terestră, vedem că aluminiul este situat înaintea fierului şi reprezintă 8% din ea. Aluminiul şi magneziul împreună reprezintă a zecea parte din scoarţa pământului şi prin urmare ele trebue considerate ca metale de bază ale viitorului.

CONCLUZIUNI

Progresele recente cu privire la extragerea, prelucrarea şi utilizarea metalelor uşoare, expuse în prezenta lucrare, arată posibilităţile aproape nelimitate ale acestor materiale. Pentru ţara noastră mai ales, cu resurse reduse de fier şi cupru, utilizarea acestor metale pe o scară cât mai întinsă va reprezenta un pas important pentru rezolvarea problemei metalelor deficitare.

Cunoscând această situaţie, primul nostru Plan Cincinal a prevăzut o importantă producţie de aluminiu, a cărui realizare şi mai ales prelucrare şi transformare în semifabricate sau piese finite necesită tehnicieni pricepuţi, având cunoştinţe temeinice de specialitate.

Posedăm suficiente rezerve de minereuri de aluminiu care să justifice desvoltarea cât mai avansată a cercetărilor în acest domeniu, desvoltare care trebue să se facă atât în laboratoare proprii bine utilate, cât şi prin schimb de experienţă în cadrul ajutorului tehnic.

Marea Uniune Sovietică şi ţările de democraţie populară prietene posedă industrii avansate în domeniul metalelor şi aliajelor uşoare. Tehnicienii noştri trebue să-şi însuşească din timp experienţa căpătată în aceste ţări şi să caute să o ducă apoi mai departe în laboratoarele noastre.

ПОСЛЕДНИЕ УСПЕХИ В МЕТАЛЛУРГИИ ЛЕГКИХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В начале статьи показывается как развились в общих чертах производство и себестоимость легких металлов за последние 25 лет по сравнению с остальными цветными металлами.

Затем намечено несколько усовершенствований классических методов как по электролизу (непрерывный электрод, высокоанодные ванны и т. д.), так и по методам изготовления глинозема, причем оказывалось особое внимание обработке отечественных руд.

В отношении магния внимание обращено на успехи, полученные в области термического восстановления (в вакууме или инертной атмосфере).

Излагаются полученные результаты по изготовлению сплавов и показываются некоторые применения легких сплавов, охватывающие почти все промышленные области (строительная, пищевая, электротехническая, железнодорожная, сельскохозяйственная и прочие промышлености).

Автор, учитывая рудные богатства страны, обращает внимание на значение легких металлов для Румынской Народной Республики. Предлагается

техникам Румынской Народной Республики воспользоваться передовым опытом Советского Союза и стран народной демократии, чтобы затем продолжать исследования в стране.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Постоянный электрод с алюминиевой оболочкой.
Рис. 2. — Постоянный электрод, отлитый в стальной броне.
Рис. 3. — Печь для восстановления магния в водородной атмосфере.

PROGRÈS RÉCENTS DANS LA MÉTALLURGIE DES MÉTAUX ET DES ALLIAGES LÉGERS

(RÉSUMÉ)

L'Auteur expose en grandes lignes l'évolution de la production et du prix de revient des métaux légers par comparaison aux autres métaux non ferreux, au cours de ce dernier quart de siècle.

Il mentionne ensuite certains perfectionnements apportés aux méthodes classiques, tant en ce qui concerne l'électrolyse (l'électrode continue, les cuves de grand ampérage, etc.), qu'en ce qui concerne les méthodes de fabrication de l'alumine, avec une mention spéciale pour le traitement des minéraux indigènes.

En ce qui concerne le magnésium, l'attention est dirigée vers les progrès obtenus par l'emploi de la réduction thermique (dans le vide ou dans une atmosphère inerte).

On cite les résultats obtenus dans le domaine de la préparation des alliages et l'Auteur mentionne l'utilisation des alliages légers dans presque toute branche industrielle (constructions, industrie alimentaire, électro-technique, agriculture, chemins de fer, etc.).

En conclusion, l'Auteur, en tenant compte des grandes réserves de minerai du pays, montre l'importance des métaux légers pour la République Populaire Roumaine. Il propose à nos techniciens de s'approprier, sans retard, l'expérience accumulée dans l'U.R.S.S. et dans les pays de démocratie populaire qui possèdent des connaissances techniques avancées dans ce domaine, pour continuer ensuite les recherches dans notre pays.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Electrode continue en revêtement d'aluminium.
Fig. 2. — Electrode continue coulée dans une gaine d'acier.
Fig. 3. — Fourneau pour la réduction du magnésium en atmosphère d'hydrogène.

BIBLIOGRAFIE

1. Beliaev A. I., *Metalurgia metalelor uşoare*. Metalurgizdat, 1949.
2. Strelet L. H., *Metalurgia magneziului*. Metalurgizdat, 1950.
3. Perret R., *Turnătoria de aliaje uşoare*. Dunod, 1948.
4. Revue de l'aluminium, colecţia 1948, 1949 şi 1950.

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ȘI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

CUPTOARE FOLOSIND FLUIDIZAREA

DE

GR. SOCOLESCU

Producerea bunurilor necesare vieții se bazează, în general, pe aplicarea unui proces tehnologic asupra unor materii prime, care sunt transformate în obiectele dorite pe o cale mai lungă sau mai scurtă. Materiile prime care se folosesc pot fi, din punctul de vedere al stării lor fizice, solide, lichide și gazoase. In decursul transformărilor la care sunt supuse materiile prime, se întâmplă ca starea lor să se schimbe, sub acțiunea unor, forțe ce acționează asupra lor, ca temperatura, presiunea, etc. In timpul prelucrării la care sunt supuse, materiile prime suferă și mult transport.

Din punctul de vedere al posibilităților de acționare cu forțe exterioare asupra materiilor intrate în procesul tehnologic, cât și a ușurinții transporturilor, cel mai ușor se lucrează și se transportă substanțele în stare gazoasă. După acestea urmează lichidele și ultimele sunt solidele.

De exemplu: este necesar să se producă o cantitate de energie electrică pe cale termică, cu căldări de vapori, turbine-generatori electrici. Pentru obținerea căldurii, se pot folosi combustibili solizi (cărbuni sau lemne), lichizi (păcură, petrol) și gazoși (metan sau gaz de gazogen). Alimentarea căldărilor producătoare de vapori, cu cărbune sau lemn, necesită un transport și o manipulație importantă, chiar dacă mecanizarea este foarte avansată. Serviciul la căldările încălzite cu combustibil lichid este mult mai ușor, iar când se poate face încălzirea cu gaze, este cât se poate de ușor. Nu numai manipulația este mai simplă și de mai mici proporții, dar și randamentul căldărilor și al consumului este mai avantajos, când trecem dela solid la lichid și apoi la gazos. Este normal să fie așa, deoarece reacțiunile sunt mai complete, mai ușor reglabile și cu mult mai puține deșeuri.

Datorită acestor observații a luat naștere întreaga tehnică a arderii de cărbune pulverizat, care caută să treacă materia solidă într'un amestec de aer și particulele fine, solide într'un fluid care se pretează mai bine la transport, dar mai ales dă un rezultat mult mai bun în timpul reacției, în timpul arderii. Această fină divizare a materiei și manipularea ei ca atare, a fost introdusă într'o mulțime de industrii, atât pentru a favoriza reacțiuni cu randamente optime, cât și pentru a ușura manipularea.

In perioada 1940—1944, pentru a se asigura un contact intim între catalizatori și vaporii de petrol care trebuiau să reacționeze cu maximum de iuțeală și randament într'o fabrică de produse petrolifere, s'a inventat un aparat în care catalizatorii au fost fin divizați, și prin ei și intim amestecați s'au trecut vaporii de petrol. Massa solidă în suspensie a căpătat proprietăți asemănătoare lichidelor. S'a obținut un amestec perfect omogen, o uniformitate perfectă a temperaturii și un transfer de căldură dela solid la gaz aproape integral.

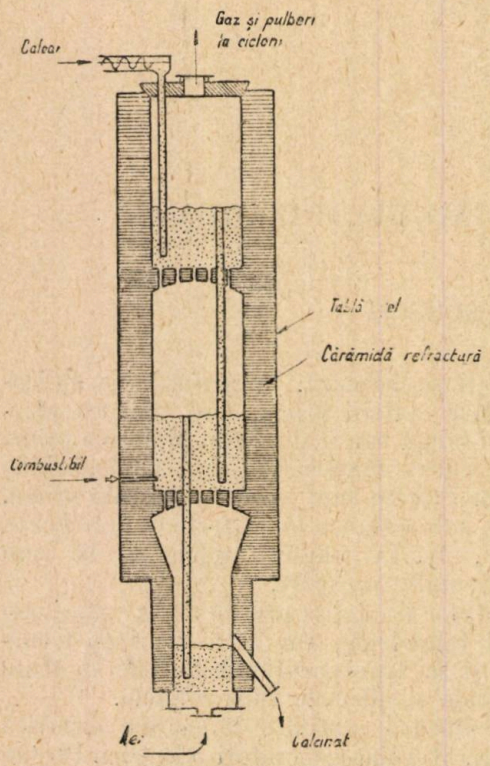


Fig. 1. — Schema reactorului cu trei compartimente.

Această nouă tehnică și-a făcut repede drum și în alte domenii. Aparatul s'a numit reactor fluosolid și s'a aplicat în primul rând la arderea varului (fig. 1). Reactorul se compune dintr'un cilindru de oțel, căptușit cu o îmbrăcăminte refractară și împărțit în trei compartimente.

Piatra de var, măcinată ca să treacă prin sita Nr. 6, este introdusă în cuptor printr'un alimentator cu melc în compartimentul cel mai de sus. Aci este fluidizat și preîncălzit la cca 600°C, prin gazele de combustie ce urcă din compartimentul de calcinare. Printr'un tub vertical care funcționează ca un prea plin, grăunțele fine de calcar coboară în camera de calcinare, unde temperatura este de cca 950°C. In acest compartiment, grăunțele de calcar sunt într'o permanentă fierbere, sunt fluidizate, sub acțiunea aerului cald ce vine din compartimentul cel mai de jos și a combustibilului lichid injectat printr'un număr de 8 injectoare ce acționează radial și centripet. In acest compartiment, oxigenul din aer, în contact cu combustibilul injectat, dă o ardere pe suprafața particulelor de calcar. Carbonatul de calciu se descompune sub acțiunea temperaturii în bioxid de carbon și oxid de calciu. Gazele se urcă în camera superioară, unde cedează căldura calcarului proaspăt pe care îl preîncălzesc și merg prin desprăfuitor în atmosferă, iar oxidul de calciu trece tot printr'o țeavă de prea plin în compartimentul cel mai de jos, unde cedează căldura înmagazinată aerului proaspăt ce intră în aparat și care se încălzește la 260°—300°C. Din acest compartiment este descărcat printr'o vană și condus în silozurile de depozitare.

Funcționarea aparatului a dat o satisfacție completă, atât în ceea ce privește calitatea produsului obținut după prelucrare, cât și în ceea ce privește bilanțul caloric.

Aceste experienţe se făceau în 1946.

De curând a fost pusă în funcţiune, în străinătate, o instalaţie de prăjire a minereurilor bazată tot pe fluidizare.

Este vorba de o pirită arsenioasă care conţine aur, având următoarea compoziţie ca minereu:

Au	=	14 g/t	S = 0,92%
Fe	=	20%	As = 0,32%
Cu	=	0,14%	Sb = 0,40%
insolubil	=	22%	

Minereul acesta, trecut prin flotaţie, dă un concentrat cu următorul conţinut: Au = 217 g/t; S = 14,9%; As = 10,6%.

Prăjirea acestui concentrat se face într'un cuptor de fluidizare simplificat (fig. 2). Fluidizarea materialului se face în cursul arderii deasupra unei tole perforate ce alcătueşte partea de jos a unui compartiment, de data aceasta singurul compartiment al «reactorului». Amestecul de aer şi gaz este suflat sub această tolă perforată, trece prin perforaţii şi menţine în stare de suspensie — de fluidizare — materialul în curs de ardere. Amestecul între gazele fierbinţi şi minereul supus prăjirii este cât se poate de intim, schimbul de căldură optim, iar regularitatea arderii şi constanţa temperaturii, perfecte. Pentru a înlătura eventuale urcări brusce de temperatură, reactorul este prevăzut cu un termocuplu, care acţionează printr'un releu un dispozitiv de pulverizat apă direct în massa fluidizată. Concentratele pot fi introduse în reactor uscate, umede sau ude. Ele pot conţine până la 20% lichid, care în reactor se vaporizează, ies din reactor împreună cu gazele de ardere şi praful produs în aparat, trec prin cicloni unde se desprăfuesc şi ajung în atmosferă. Minereul prăjit, după ce iese din reactor, este stins cu apă şi trimis la cianurare pentru extragerea aurului conţinut. Compoziţia produsului prăjit este Au = 260 g/t; S = 1,6%; As = 2,9%, compoziţie care este foarte potrivită tratamentului prin cianurare şi care permite o extracţie a aurului de 95,7%.

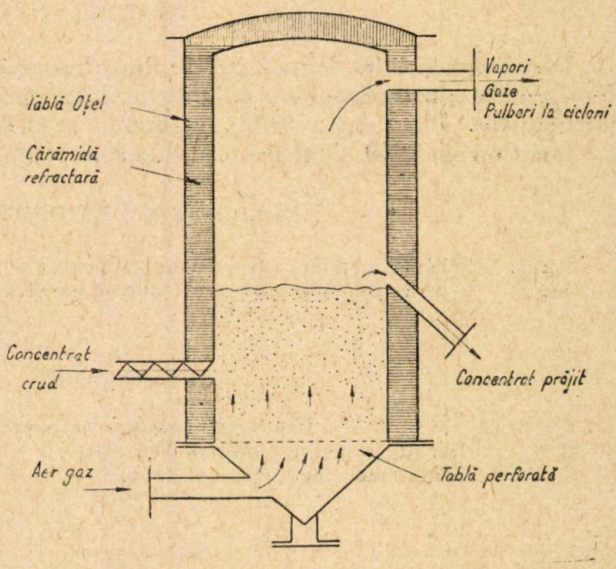


Fig. 2. — Schema reactorului cu un compartiment.

Aparatul are o funcţionare uşoară, are o pornire şi o oprire în scurt timp (30 minute), serviciul îi este asigurat cu două posturi pe schimb, iar preţul de revenire al prăjirii este de ordinul 100 lei/tonă.

ПЛАВИЛЬНЫЕ ПЕЧИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В последнее время обжигательные печи, у которых обжигаемые вещества поддерживаются в плавком состоянии, получили особое значение.

В настоящем сообщении описывается подобная печь, пущенная в работу в 1949 г. и давшая хорошие результаты.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема реакционной башни с тремя отделениями.
Рис. 2. — Схема реакционной башни с одним отделением.

FOURS UTILISANT LA FLUIDISATION

(RÉSUMÉ)

Dernièrement, les fours à griller dans lesquels les substances qui doivent être grillées sont maintenues à l'état de flottaison, ont acquis une importance particulière. Dans cette Note, on donne la description d'un tel four, mis en fonction en 1949, dont les résultats sont remarquables.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma du four à trois compartiments.
Fig. 2. — Schéma du four à un seul compartiment.

BIBLIOGRAFIE

1. N. E. Cijicov, *Metalurgia metalelor neferoase grele*. 1950.
2. — Canadian mining journal, Oct. 1950.
3. — Stahl und Eisen, Nr. 16, 1944.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

RECENZII

ACAD. E. CARAFOLI, *Aerodinamica*. Editura Tehnică, 1951.

Editura tehnică a publicat de curând *Aerodinamica* de Acad. E. Carafoli. Apariţia acestei lucrări constitue un eveniment pentru literatura ştiinţifică românească din domeniul mecanicei fluidelor, atât prin cuprinsul bogat, cât şi prin nivelul ridicat la care se situează.

Deosebit de indicat pentru a trata problemele complicate ale aerodinamicei moderne, Acad. E. Carafoli prezintă în această carte roadele unei erudiţii, dobândite ca cercetător în acest domeniu. Experienţa de om de ştiinţă şi profesor, i-a permis să atace capitolele acestei discipline cu o rară competenţă şi cu un remarcabil spirit de metodă.

Este de subliniat împărţirea justă a materiei, după importanţa şi amploarea subiectelor, deşi autorul ar fi fost poate atras în mod special de către unele probleme.

După o expunere succintă a capitolelor din mecanica fluidelor, care formează punctul de plecare al aerodinamicei, autorul tratează pe larg teoria sistemelor portante în medii incompresibile şi epuizează complet problemele speciale în legătură cu acestea. Ultimele capitole sunt consacrate influenţei frontierelor asupra mişcării sistemelor portante şi corectărilor aduse încercărilor experimentale. Textul este însoţit de figuri clare şi executate cu îngrijire.

Sunt de relevat, mai cu seamă, părţile privitoare la teoria şi tratarea profilelor aerodinamice, unde E. Carafoli a avut o foarte însemnată contribuţie ştiinţifică, creând o clasă de profile care îi poartă numele, apoi teoria aripilor monoplane de anvergură finită, a aripilor deformate şi teoria biplanului, toate probleme importante pentru rezolvarea cărora a adus de asemenea contribuţii numeroase şi esenţiale. In mod special, trebue menţionate capitolele referitoare la preocupările foarte moderne din teoria sistemelor portante, cum sunt profilele laminare şi aripa în săgeată.

In toată expunerea sa, autorul prezintă materialul sub o lumină nouă, dovedind la fiecare pas o îndelungă frământare a subiectelor. Cartea este astfel bine închegată, de o concepţie unitară; deşi uneori succintă, expunerea este întotdeauna clară şi completă. In ansamblu, lucrarea este bine echilibrată cu o desvoltare a subiectelor corespunzătoare importanţei lor; ea cuprinde o bibliografie bogată, la sfârşitul fiecărui capitol. O rezervă ar putea fi făcută asupra teoriei biplanului care a primit, credem, o extindere prea mare faţă de importanţa sa actuală. De asemenea, ar fi fost utilă introducerea unor capitole tratând despre teoria elicei şi a sistemelor portante rotative.

După cum am arătat, caracteristicele principale ale *Aerodinamicei* de Acad. E. Carafoli sunt: originalitate în expunere şi o înaltă ţinută ştiinţifică. Prin aceasta, *Aerodinamica* are, ca şi lucrările anterioare ale autorului, o valoare care depăşeşte graniţele ţării noastre, fiind un frumos exemplu în ceea ce priveşte rezultatele obţinute de către oamenii de ştiinţă din ţara noastră. Editura Tehnică a realizat astfel un salt excepţional, trecând dela literatura aproape inexistentă la noi în domeniul aerodinamicei, la publicarea unei lucrări cu care se poate mândri.

Pentru cercetători, cartea este o lucrare de bază şi credem că va constitui îndemnul şi punctul de plecare a numeroase lucrări originale, după cum îşi exprimă şi autorul dorinţa în prefaţă.

Studenţii găsesc în cuprinsul acestei cărţi, sub o formă accesibilă, tratarea

chestiunilor care fac obiectul cursurilor de specialitate în instituţiunile de învăţământ superior. In sfârşit, inginerii proiectanţi specialişti pot găsi toate elementele necesare pentru a trece la aplicaţiile numerice din acest domeniu.

Aerodinamica de Acad. E. Carafoli răspunde astfel unei reale necesităţi şi constitue o lucrare chemată să îndeplinească un rol primordial în desvoltarea ştiinţifică şi tehnică a ţării noastre.

N. Tipei

A. O. SPIVACOVSCHI, Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi Prof. N. F. RUDENCO. *Curs general de maşini de ridicat şi de transportat.* Ed. de Stat pentru Ştiinţe Tehnice, Literatura pentru Construcţii de maşini, Moscova, 1949.

Lucrarea prezintă un amplu material documentar, extins pe 816 pagini, cu 891 de figuri în text şi 121 de figuri în tabele-atlas dela sfârşitul lucrării, din domeniul calculului construcţiei şi exploatării maşinilor de ridicat şi de transportat. Cursul este întocmit după programa analitică a *Cursului de maşini de ridicat şi de transportat*, ce se predă la institutele de învăţământ superior de construcţii de maşini, fiind aprobat de Ministerul Invăţământului Superior din U.R.S.S.

Prezentarea şi fondul lucrării corespund unui nivel tehnico-ştiinţific superior şi se adresează, în special studenţilor ingineri şi inginerilor având ca specialitate construcţiile de maşini.

Conţinutul lucrării este împărţit în 28 de capitole, grupate în 6 părţi:

Partea întâia, intitulată *Noţiuni generale despre maşinile de ridicat şi de transportat*, cuprinde 4 capitole, în care este tratată chestiunea rolului maşinilor de ridicat şi de transportat în industria de construcţii de maşini, categoriile de transporturi din interiorul fabricelor, grupele principale de maşini de ridicat şi de transportat, alegerea tipului de instalaţie, istoricul maşinilor de ridicat şi de transportat, prezentarea tipurilor actuale şi exemple de întrebuinţare a lor.

Partea a doua, intitulată *Părţile componente şi teoria maşinilor de ridicat*, cuprinde 11 capitole tratând despre: organele flexibile pentru ridicarea sarcinilor, roţile şi tobele pentru cabluri şi lanţuri, dispozitivele pentru prinderea sarcinilor, dispozitivele de oprire şi frânare, acţionarea maşinilor de ridicat, organele de maşini cu destinaţie generală utilizate la maşinile de ridicat şi de transportat, mecanismele pentru ridicarea sarcinilor, mecanismele de deplasare, mecanismele de rotire şi de variaţie a deschiderii braţului la macarale, scheletele macaralelor şi stabilitatea acestora.

Partea a treia, intitulată *Maşinile de ridicat*, cu 3 capitole, cuprinde: mecanismele de ridicat, macaralele şi ascensoarele.

Partea a patra, intitulată *Părţile componente şi teoria instalaţiilor de transport continuu*, cu două capitole, cuprinde: părţile componente şi teoria generală a instalaţiilor de transport continuu.

Partea a cincia, intitulată *Instalaţiile de transport continuu*, în cele 4 capitole ale sale, tratează despre: transportoarele cu organe flexibile de tracţiune, transportoarele fără organe flexibile de tracţiune, instalaţiile de transbordare şi dispozitivele auxiliare.

Partea a şasea, intitulată *Instalaţiile pentru transporturi terestre şi suspendate*, grupată în 4 capitole, tratează despre: cărucioarele fără cale, vagonetele de cale ferată îngustă, instalaţiile de manevră şi căile suspendate cu o singură şină.

In continuare, lucrarea prezintă un atlas tabelar cu reprezentările schematice tip ale dispozitivelor, maşinilor şi instalaţiilor de ridicat şi transportat, tratate în cuprinsul cărţii.

In anexă, autorii prezintă un indicator alfabetic al standardelor unionale şi unul al standardelor departamentale, ambele din domeniul construcţiei de maşini de ridicat şi de transportat.

In general, lucrarea se prezintă sub forma unui studiu analitic al unui important domeniu de specialitate, în care înafară de partea descriptivă de prezentare a diferitelor maşini şi de cea referitoare la exploatarea practică a acestora, autorii prezintă sub o formă bine documentată, metodele de calcul şi construcţie, necesare tipurilor de maşini analizate. In calculele constructive şi de stabilitate ale diferitelor organe componente, sau în cele referitoare la subansambluri şi maşini sau instalaţii complete, autorii au înţeles să aplice metodele cele mai adecvate de calcul, ducând la rezultate cât mai precise şi făcând, după caz, apel la cunoştinţe tehnico-ştiinţifice de nivel superior.

Lucrarea pune la dispoziţia inginerului constructor de maşini, atât metodele, cât şi materialul documentar necesar pentru

proiectarea şi construcţia maşinilor de ridicat şi de transportat; în acelaşi scop, sunt date în text 13 *exemple de calcule de proiectare*, intercalate la capitolele respective şi menţionate într'o listă specială la sfârşitul tablei de materii.

Desenele din text sunt, în general, bine executate şi potrivit alese, atât cele care se referă la partea teoretică, cât şi cele care reprezintă elementele constructive. Este de remarcat faptul că cele mai multe din figuri redau interesante detalii constructive, sub formă de desene de ansamblu sau de execuţie, unele din ele fiind prezentate chiar sub formă de planşe care depăşesc formatul cărţii. In sfârşit, o parte din datele constructive şi funcţionale interesând constructorul de maşini sunt date sub formă tabelară în cele 92 de tabele judicios întocmite în text.

In sectorul producţiei industriale moderne, transportul materialelor şi al produselor este organic legat de însuşi ciclul tehnologic al procesului de producţie; astfel, organizarea raţională a transportului este tot atât de importantă ca şi organizarea raţională a însuşi procesului de producţie. Afară de aceasta, la proiectarea unei maşini de ridicat, sau a unei instalaţii transportoare, intervine de cele mai multe ori un complex de probleme în deajuns de dificile, astfel încât pe drept cuvânt a scris în 1872 Prof. I. A. Vîşnegradschi dela Institutul Tehnologic din Petersburg, în prima carte din acest domeniu, apărută în Rusia *(Cursul de maşini de ridicat)* : «*...cine ştie să construiască macarale, acela va şti să construiască orice altă maşină*».

Ţinând seama de cele de mai sus, precum şi de valoarea tehnico-ştiinţifică a lucrării în sine, credem că traducerea şi editarea ei în limba română va fi cât se poate de folositoare pentru ridicarea nivelului profesional al cadrelor tehnice dela noi, deşi acest lucru comportă o muncă redacţională nu tocmai uşoară.

L. Săveanu

INTREPRINDEREA
POLIGRAFICĂ Nr. 4
— BUCUREȘTI —

C. 2029

LEI 5.—

F 754

KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE METALURGIE ŞI MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ ŞI METALURGIE

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

3—4
ANUL III
IULIE—DECEMBRIE
1952

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE METALURGIE ŞI MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ ŞI METALURGIE

3—4
ANUL III
IULIE—DECEMBRIE
1952

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACŢIE

ACADEMICIAN E. CARAFOLI — Redactor responsabil;
PAUL PETRESCU; M. ARCAN; R. BOGDAN;
ŞT. MANTEA.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE METALURGIE ŞI MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ ŞI METALURGIE

Tomul III, Nr. 3—4 Iulie—Decembrie 1952

SUMAR

STUDII

MECANICĂ APLICATĂ

Pag.

N. TIPEI, Calculul aerodinamic al aeromotorilor 177
L. HAMBURGER, Consideraţiuni generale referitoare la cercetarea vibraţiilor mecanice cu ajutorul analogiilor electrice 191
N. S. PÂRVULESCU, Despre flambajul tijelor sub acţiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie 205
R. PRIŞCU, Eforturi produse de cutremur în barajele de greutate . . . 229
M. MIŞICU, Stabilitatea dinamică a construcţiilor rigide pe stâlpi sau piloţi . . 255
MIRCEA SOARE, Teoria suprafeţelor subţiri de rotaţie 273

METALURGIE

GR. SOCOLESCU, Metoda de extragere a zincului pur pe cale uscată . . 329
GEORGETA DAN, Studiu asupra defectelor pistoanelor din aliaje uşoare şi ameliorarea lor prin tratament termic 337
ADRIAN HUBER, Studiu asupra turnării în tipar metalic a pistoanelor tip auto 357
D. RAŞEEV, Sudarea fontelor nodulare 367
V. SINIANSKY, AL. BRANISKI, AUG. HETEA, L. SOLOMON şi C. SĂVINEANU, Produsele refractare forsteritice în industria cimentului . 375

REFERATE

M. GELLER, Despre unele încercări pentru stabilirea influenţei ecruisajului de tracţiune asupra rezistenţei la oboseală a prăjinilor de foraj . . . 389
AUGUSTIN PETRE, Probleme actuale în legătură cu vibraţiile sistemului turbină-generator 397

RECENZII 415

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉTALLURGIE ET MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES

DE

MÉCANIQUE ET DE MÉTALLURGIE

Tome III, Nos. 3—4 Juillet—Décembre 1952

SOMMAIRE

ÉTUDES

MÉCANIQUE APPLIQUÉE Page

N. TIPEI, Le calcul aérodynamique des aéromoteurs 177
L. HAMBURGER, Considérations générales concernant la recherche sur les vibrations mécaniques à l'aide des analogies électriques 191
N. S. PÂRVULESCU, Sur le flambage des tiges sous l'action d'une compression produite par une fraction du poids propre 205
R. PRIŞCU, Efforts produits par le tremblement de terre dans les barrages-poids 229
M. MIŞICU, La stabilité dynamique des constructions rigides sur piliers ou pilotis 255
MIRCEA SOARE, La théorie des voiles minces de rotation 273

MÉTALLURGIE

GR. SOCOLESCU, Méthode d'extraction du zinc pur par voie sèche . . . 329
GEORGETA DAN, Étude sur les défauts des pistons en alliages légers et leur amélioration par traitement thermique 337
ADRIAN HUBER, Étude au sujet de la coulée des pistons d'automobile dans des moules métalliques 357
D. RAŞEEV, La soudure des fontes nodulaires 367
V. SINIANSKY, AL. BRANISKI, AUG. HETEA, L. SOLOMON et C. SĂVINEANU, Les produits réfractaires forstéritiques dans l'industrie du ciment 375

EXPOSÉS

M. GELLER, L'influence de l'écrouissage par traction sur la résistance à la fatigue des tiges de forage 389
AUGUSTIN PETRE, Problèmes actuels relatifs aux vibrations des systèmes turbines-générateurs 397

COMPTES RENDUS 415

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МЕТАЛЛУРГИИ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МЕХАНИКЕ И МЕТАЛЛУРГИИ

Том III, № 3—4 Июль — декабрь 1952

СОДЕРЖАНИЕ

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА Стр.

Н. ТИПЕЙ, Аэродинамическое вычисление самолетных моторов 177
Л. ГАМБУРГЕР, Общие соображения об исследовании механических колебаний при помощи электрических аналогов 191
Н. ПЫРВУЛЕСКУ, Об изгибе штанг под действием сжатия, вызванного долей собственного веса 205
Р. ПРИШКУ, Усилия, вызванные землетрясением, в гравитационных плотинах 229
М. МИШИКУ, Динамическая устойчивость ригидных сооружений на столбах или на сваях 255
М. СОАРЕ, Теория оболочек вращения 273

МЕТАЛЛУРГИЯ

Г. СОКОЛЕСКУ, Метод извлечения чистого цинка сухим путем 329
Д. ДАН, Изучение пороков поршней из легких сплавов и их улучшение посредством термической обработки 337
А. ГУБЕР, Изучение отливки автомобильных поршней в металлических формах 357
Д. РАШЕЕВ, Сварка сферолитового чугуна 367
В. СИНЯНСКИЙ, А. БРАНИСКИ, А. ГЕТЯ, Л. СОЛОМОН и К. СЭВИНЯНУ, Форстеритовые огнеупорные изделия в цементной промышленности . 375

РЕФЕРАТЫ

М. ГЕЛЛЕР, Влияние хрупкости, вызванной силой тяги, на сопротивление усталости в бурильных штангах . . . 389
А. ПЕТРЕ, Актуальные вопросы в связи с вибрацией генераторных турбинных систем 397

РЕЦЕНЗИИ 415

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

MECANICĂ APLICATĂ

CALCULUL AERODINAMIC AL AEROMOTORILOR

DE

N. TIPEI

Desvoltarea pe care a căpătat-o în ultimul timp utilizarea energiei eoliene a făcut să se perfecţioneze şi metodele de calcul ale aeromotorilor, pentru a se putea capta o cantitate cât mai mare din energia vântului şi pentru a o transforma în lucru mecanic cu un randament cât mai ridicat. Procedeele de calcul sunt bazate, parte pe desvoltarea teoriei aeromotorilor, teorie asemănătoare cu aceea a elicelor pentru aviaţie, şi parte pe date practice experimentale. Trebue observat totuşi că aplicarea acestor metode în proiectare implică de obicei alegerea unora din parametrii problemei. Această alegere este greu de făcut şi poate fi eliminată printr'o urmărire mai riguroasă a calculelor, care, în cele din urmă, conduce la o simplificare a problemei de proiectare şi la obţinerea directă a unor rezultate ce corespund condiţiilor optime de lucru.

In acest scop, dăm mai jos câteva rezultate privind aerodinamica aeromotorilor, aplicând metodele de calcul pentru elicele aeriene.

In figura 1 este reprezentată diagrama viteselor într'o secţiune oarecare a palei la raza r. S'au notat cu Ω vitesa unghiulară a aeromotorului, V vitesa vântului, v vitesa indusă axială în dreptul palei, $r\omega$ vitesa indusă tangenţială în dreptul palei, β unghiul vitesei rezultante W cu planul de rotaţie, β_0 unghiul vitesei W_0, componentă a vitesei tangenţiale de rotaţie $-r\Omega$ cu vitesa vântului V, faţă de planul de rotaţie, i_0 unghiul corzii profilului cu vitesa W_0 şi i unghiul real de incidenţă faţă de vitesa totală W. In cele ce urmează se vor nota v_∞ şi ω_∞ vitesele induse corespunzătoare la infinit aval.

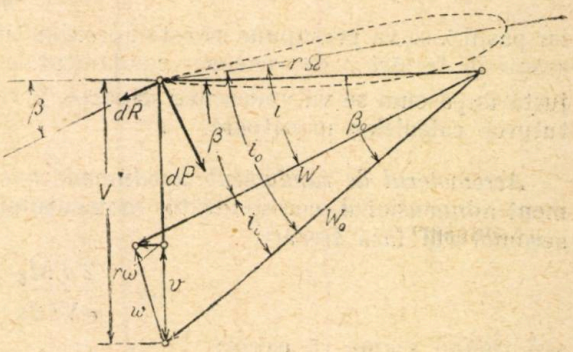


Fig. 1

Se va presupune la început că numărul de pale este infinit, astfel încât discul descris de acestea în rotaţie va fi o suprafaţă permeabilă omogenă

Dacă $d\mathfrak{T}$ și dM sunt tracțiunea și momentul elementar pe o fâșie din pale de grosime dr, la distanța r de axul de rotație se obține imediat, notând cu Π pierderile prin frecare,

$$\left(V-\frac{v_\infty}{2}\right)d\mathfrak{T}=\left(\Omega+\frac{\omega_\infty}{2}\right)dM+d\Pi \tag{1}$$

sau, aplicând teorema impulsului și a momentelor cantităților de mișcare:

$$(V-v)\,v_\infty=(\Omega+\omega)\,r^2\omega_\infty+\frac{1}{4\pi\rho r}\cdot\frac{d\Pi}{dr} \tag{2}$$

Randamentul indus la raza r are expresia următoare:

$$\eta_{ri}=\frac{1-\dfrac{v}{V}}{1+\dfrac{\omega}{\Omega}} \tag{3}$$

de asemenea pasul aerodinamic $\lambda=\operatorname{tg}\beta$ și pasul de deplasare $\lambda_0=\operatorname{tg}\beta_0$ sunt legate de relația (fig. 1):

$$\lambda=\frac{V-v}{r(\Omega+\omega)}=\frac{V}{r\Omega}\cdot\frac{1-\dfrac{v}{V}}{1+\dfrac{\omega}{\Omega}}=\lambda_0\,\eta_{ri} \tag{4}$$

Vitesele v_0 și ω_0, corespunzătoare unui aeromotor fără frecări, sunt date de expresia:

$$\lambda=\lambda_0\,\eta_{ri}=\frac{r\omega_0}{v_0} \tag{5}$$

iar pasul λ se va presupune că este aproximativ același ca în cazul când se ține seama de frecări și de asemenea randamentele induse η_{ri}. Această ipoteză este justă după cum se va vedea mai departe, permițând o simplificare esențială a tuturor calculelor următoare.

Aeromotorul de randament aerodinamic maxim. Fie μ_0 coeficientul de moment adimensional, corespunzător momentului elementar dM_0 la raza r pentru aeromotorul fără frecări:

$$\mu_0=\frac{2\,d\,M_0}{\rho r V^2\,ds} \tag{6}$$

sau ținând seama că avem:

$$dM_0=4\pi\rho r^3\,(V-v_0)\,\omega_0\,dr \quad \text{și} \quad ds=2\pi r\,dr \tag{7}$$

rezultă coeficientul de moment

$$\mu_0=4\lambda\frac{v_0}{V}\left(1-\frac{v_0}{V}\right) \tag{8}$$

cu ajutorul căruia se pot exprima vitesele induse:

$$\frac{v_0}{V}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\mu_0}{\lambda}}\right) \tag{9}$$

și ținând seama de (5),

$$\frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{\lambda^2}{\eta_{ri}} \cdot \frac{v_0}{V} \tag{10}$$

Randamentul indus global, egal cu randamentul total al aparatului fără frecări, are expresia:

$$\eta_i = \frac{\Omega M_0}{\Omega M_0 + \int_0^R v_0 \, d\mathfrak{T}_0 + \int_0^R \omega_0 \, dM_0} \tag{11}$$

în care ΩM_0 reprezintă puterea utilă dată la arborele aeromotorului fără frecări, $\mathfrak{T}_0$ forța axială totală corespunzătoare, iar R este raza discului descris de palele în rotație. Puterea utilă ΩM este o dată impusă în proiectare și ea poate fi considerată constantă. Rezultă prin urmare și $\Omega M_0 = k_1 \Omega M = \text{constant}$, k_1 fiind o constantă supraunitară care ține seama de frecare.

Va trebui astfel, pentru ca η_i să rezulte maxim, să se găsească repartiția vitezelor induse v_0, ω_0 pe disc, astfel încât cele două integrale dela numitor să prezinte un minim, respectându-se totodată condiția

$$\Omega M_0 = 4\pi\rho\,\Omega \int_0^R (V - v_0)\,\omega_0\, r^3 dr = \text{constant} \tag{12}$$

Teorema impulsului dă imediat:

$$\mathfrak{T}_0 = 4\pi\rho \int_0^R (V - v_0)\, v_0\, r\, dr \tag{13}$$

iar condiția de maxim al lui η_i rezultă, admițând că $V - v_0$ nu variază mult în lungul palei, aplicându-se rezultatele cunoscute din calculul variațiilor și notând cu $2k$ constanta lui Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial \omega_0}\left(v_0^2 + r^2\omega_0^2 - 2kr^2\omega_0\right) = \frac{\partial}{\partial \omega_0}\left[\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) r^2\omega_0^2 - 2kr^2\omega_0\right] = 0 \tag{14}$$

De unde urmează apoi:

$$\omega_0 = \frac{k}{1 + \dfrac{1}{\lambda^2}} \; ; \; v_0 = R\Lambda \frac{k}{1+\lambda^2} \tag{15}$$

Mai exact se poate deduce legea de variație a vitezelor induse în lungul palei, dacă se corectează expresia de sub integrala (12) cu termenul $1 - \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$, așa cum rezultă din cele ce urmează. In acest caz se obține:

$$\omega_0 = k \frac{1 - \dfrac{\varepsilon}{\lambda}}{1 + \dfrac{1}{\lambda^2}} \tag{16}$$

totuşi, deoarece repartiţia vitezelor induse este sensibil aceeaşi cu repartiţia dată de (15), se va prefera această relaţie mai simplă.

Din (3) şi (10) se deduce valoarea randamentului indus

$$\eta_{ri} = \frac{1}{1+\frac{k}{\Omega}} = \text{constant} = \eta_i \tag{17}$$

Se regăseşte astfel condiţia cunoscută în teoria elicei şi anume că randamentul indus pentru aeromotorul de randament maxim este constant în lungul palei. Expresia acestor randamente este însă diferită în cele două cazuri. Rezultă de asemenea că λ este o funcţie numai de r, aşa cum s'a presupus în relaţiile (14). Rămâne apoi să se determine constanta k spre a găsi repartiţia vitezelor induse şi valoarea lui η_i total.

Fie Λ_0 şi Λ valorile lui λ_0, λ pentru $r = R$. Se găseşte cu uşurinţă:

$$r = \frac{\Lambda}{\lambda} R \; ; \; dr = -R\Lambda \frac{d\lambda}{\lambda^2} \tag{18}$$

Dacă dU este forţa tangenţială la raza r şi $d\mathfrak{T}$ tracţiunea elementară corespunzătoare, acestea se pot scrie, ţinând seama de frecări (fig. 1) şi notând cu n numărul de pale al aparatului, dP portanta şi dR rezistenţa unui element de pală,

$$\left.\begin{aligned} dU &= n(\sin\beta\, dP - \cos\beta\, dR) = n\sin\beta\, dP\left(1-\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = dU_0\left(1-\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ d\mathfrak{T} &= n(\cos\beta\, dP + \sin\beta\, dR) = n\cos\beta\, dP(1+\varepsilon\lambda) = d\mathfrak{T}_0(1+\varepsilon\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Parantezele din aceste expresii reprezintă corecţiunile care trebue aduse asupra mărimilor dU_0 şi $d\mathfrak{T}_0$ ale aeromotorului fără frecări, în cazul când se ţine seama şi de frecare. Se poate scrie astfel, ţinând sema de (10), (12), (15) şi (18)

$$M = \frac{\rho}{2}\pi R^3 V^2 \mu_m = -4\pi\rho R^4\Lambda^4\int_\infty^\Lambda \left(V - R\Lambda\frac{k}{1+\lambda^2}\right)\frac{k}{1+\lambda^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda^3} \tag{20}$$

sau, dacă se consideră raportul $\varepsilon = \frac{dR}{dP} = \frac{Cx}{Cz}$ constant în lungul palei şi egal cu valoarea sa medie:

$$\mu_m = -8\frac{k}{\Omega}\Lambda^3\eta_i\int_\infty^\Lambda\left(1-\frac{k}{\Omega}\eta_i\frac{1}{1+\lambda^2}\right)\frac{1}{1+\lambda^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda^3} =$$

$$= 4\frac{k}{\Omega}\eta_i\Lambda^3\left\{\frac{1}{\Lambda^2} - L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2} - \frac{k}{\Omega}\eta_i\left(\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{1}{1+\Lambda^2}-2L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}\right) - \right.$$

$$- 2\varepsilon\left\{\frac{1}{3\Lambda^3} - \frac{1}{\Lambda} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\Lambda - \frac{k}{\Omega}\eta_i\left[\frac{1}{3\Lambda^3} - \frac{2}{\Lambda} + \frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\Lambda\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\Lambda^2}\right]\right\}\right\} \tag{21}$$

Rezolvând această ecuație în raport cu $\frac{k}{\Omega}$ se găsește:

$$\frac{k}{\Omega}=\frac{\frac{1}{\Lambda^2}-L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}-2\varepsilon\left(\frac{1}{3\Lambda^3}-\frac{1}{\Lambda}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\Lambda\right)}{2\eta_i\left\{\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{1}{1+\Lambda^2}-2L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}-2\varepsilon\left[\frac{1}{3\Lambda^3}-\frac{2}{\Lambda}+\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\Lambda\right)-\frac{\Lambda}{2(1+\Lambda^2)}\right]\right\}}\times$$

$$\times\left[1-\sqrt{1-\frac{\mu_m\left\{\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{1}{1+\Lambda^2}-2L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}-2\varepsilon\left[\frac{1}{3\Lambda^3}-\frac{2}{\Lambda}+\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\Lambda\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Lambda}{1+\Lambda^2}\right]\right\}}{\Lambda^3\left[\frac{1}{\Lambda^2}-L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}-2\varepsilon\left(\frac{1}{3\Lambda^3}-\frac{1}{\Lambda}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\Lambda\right)\right]^2}}\right] \tag{22}$$

sau:

$$\frac{k}{\Omega}=\frac{1}{2\eta_i}f(\Lambda,\mu_m) \tag{23}$$

de unde apoi rezultă, ținând seama de ecuația (17)

$$\eta_i=1-\frac{1}{2}f(\Lambda,\mu_m) \tag{24}$$

Expresia randamentului indus se poate simplifica dacă se neglijează în (22) termenii care conțin pe ε ca factor, deoarece acesta $\left(\varepsilon=\frac{Cx}{Cz}\right)$ are valori reduse, în general sub 0,05. In acest caz, expresia va fi:

$$\eta_i=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\Lambda^2}-L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}}{\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{1}{1+\Lambda^2}-2L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}}\left[1-\right.$$

$$\left.-\sqrt{1-\frac{\mu_m}{\Lambda^3}\cdot\frac{\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{1}{1+\Lambda^2}-2L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}}{\left(\frac{1}{\Lambda}-\Lambda L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}\right)^2}}\right] \tag{25}$$

Calculul forței axiale. Cu ajutorul ecuațiilor (13), (15) și (19) se poate scrie imediat forța axială, corectată cu efectul datorit frecărilor:

$$\mathfrak{T}=\frac{\rho}{2}\pi R^2V^2\tau=-4\pi\rho R^2V^2\Lambda^2\frac{k}{\Omega}\eta_i\int_{\infty}^{\Lambda}\left(1-\frac{k}{\Omega}\eta_i\frac{1}{1+\lambda^2}\right)\cdot(1+\varepsilon\lambda)\frac{1}{1+\lambda^2}\cdot\frac{d\lambda}{\lambda^3} \tag{26}$$

Efectuând calculele se găsește valoarea coeficientului adimensional

$$\tau = 4\Lambda^2 \frac{k}{\Omega}\eta_i \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} - L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2} - \frac{k}{\Omega}\eta_i \left(\frac{1}{\Lambda^2} + \frac{1}{1+\Lambda^2} - 2L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2} \right) + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon \left\{ \frac{1}{\Lambda} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\Lambda - \frac{k}{\Omega}\eta_i \left[\frac{1}{\Lambda} + \frac{\Lambda}{2(1+\Lambda^2)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\Lambda \right) \right] \right\} \right\} \quad (27)$$

Determinarea coeficienților caracteristici ai aeromotorului de randament maxim. Randamentul total al aeromotorului este definit de raportul dintre puterea utilă obținută la arbore și produsul dintre forța axială $\mathfrak{F}$ și vitesa V a vântului. Se remarcă ușor că acest produs reprezintă puterea consumată pentru deplasarea aeromotorului în cazul când acesta se mișcă într'o atmosferă calmă cu vitesa V și că ea corespunde efectiv puterii cheltuite în cazul când aeromotorul este montat pe un avion sau pe un vehicul oarecare, în vederea antrenării organelor auxiliare ale instalațiilor dela bord. Randamentul total η este produsul dintre randamentul indus η_i și randamentul de frecări η_f

$$\eta = \eta_i \cdot \eta_f \quad (28)$$

și se calculează cu ușurință cu ajutorul rezultatelor precedente exprimate de către formulele (20), (21), (26) și (27):

$$\eta = \frac{\Omega M}{VT} = \frac{\mu_m}{\Lambda\tau}\eta_i \quad \text{și} \quad \eta_f = \frac{\mu_m}{\Lambda\tau} \quad (29)$$

Se poate simplifica expresia randamentului de frecări dată de (29) în care se înlocuesc μ_m și τ ca funcții de Λ după (21) și (27). Se obține astfel:

$$\eta_f = \frac{1 - \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{\Lambda}}{1 + 2\varepsilon\Lambda} \quad (30)$$

care dă aproape aceleași valori ca și relația completă mult mai complicată; în plus, are avantajul că elimină influența foarte redusă a constantei k. Valorile calculate cu formula simplificată (30) nu dau erori mai mari decât 2,5% față de formulele exacte, chiar în cazurile cele mai desavantajoase.

Pe de altă parte, randamentul total, pentru fiecare pas Λ, depinde numai de randamentul indus și deci aeromotorul de randament indus maxim, având legile de repartiție a vitezelor induse determinată anterior, va avea și randamentul total cel mai bun.

Acesta variază astfel numai cu Λ putându-se determina destul de ușor valoarea sa cea mai ridicată posibilă, dacă se dă coeficientul de cuplu μ_m, raza aparatului sau o altă dată caracteristică.

Mai departe, se observă că pentru o putere ΩM prescrisă, forța axială $\mathfrak{F}$ este invers proporțională cu η. De aceea se dă o importanță deosebită acestui randament de câte ori este nevoie de a reduce această forță axială, care reprezintă o rezistență parazită la instalațiile de pe vehicule sau care necesită

o întărire a construcției, turnului și fundațiilor pentru instalațiile fixe importante.

Cuplul este definit cu ajutorul coeficientului μ_m, care, ca și ceilalți coeficienți η_i, η_f, η, τ, este o funcție de Λ și ε.

De o mare însemnătate este coeficientul de utilizare, care este definit de raportul dintre puterea utilă dată de aparat și puterea corespunzătoare curentului de aer de vitesă V care ar trece neperturbat prin suprafața discului descris de palele în rotație. Această putere reprezintă totalul energiei curentului la infinit amonte, în tubul de curent de secțiune πR^2 și este mai mare decât puterea consumată $T \times V$. Fie ξ coeficientul de utilizare; vom avea:

$$\xi = \frac{2M\Omega}{\rho\pi R^2 V^3} = \frac{\mu_m}{\Lambda}\eta_i = \tau\eta \tag{31}$$

Se vede imediat că cu cât ξ este mai mare, cu atât raza aeromotorului care dă o putere dată utilă $\mathcal{S} = \Omega M$ este mai mică. Față de mărimea diametrului care rezultă de câte ori se cer puteri mai mari sau se utilizează un vânt de o vitesă mai redusă, se poate spune că ξ este coeficientul cel mai important pentru un aeromotor și că o mărire a sa, reprezentând chiar numai o scădere de câteva procente a razei, prezintă un interes practic. In sfârșit, pentru $\mathcal{S}$ și V date, cuplul aparatului este

$$M = \frac{\mathcal{S}}{\Omega} = \frac{\mathcal{S}\Lambda R}{V\eta_i} = \sqrt{\frac{2\mathcal{S}^3}{\rho\pi R^5}} \cdot \frac{\Lambda}{\eta_i\sqrt{\xi}} \tag{32}$$

Din analiza precedentă se pot desprinde criteriile de calcul ale aeromotorilor. Plecând dela observația că toți coeficienții caracteristici sunt funcții de două variabile, rămâne să se aleagă aceste variabile cât mai potrivit pentru obținerea concluziilor practice. In cele ce urmează s'a ales Λ ca variabilă și $\eta_i = 1 - \frac{k}{\Omega}\eta_i$ ca parametru, calculându-se datele din tabloul Nr. 1 pentru $\varepsilon = 0{,}02$ care corespunde unei execuții îngrijite, utilizând profile aerodinamice adecuate.

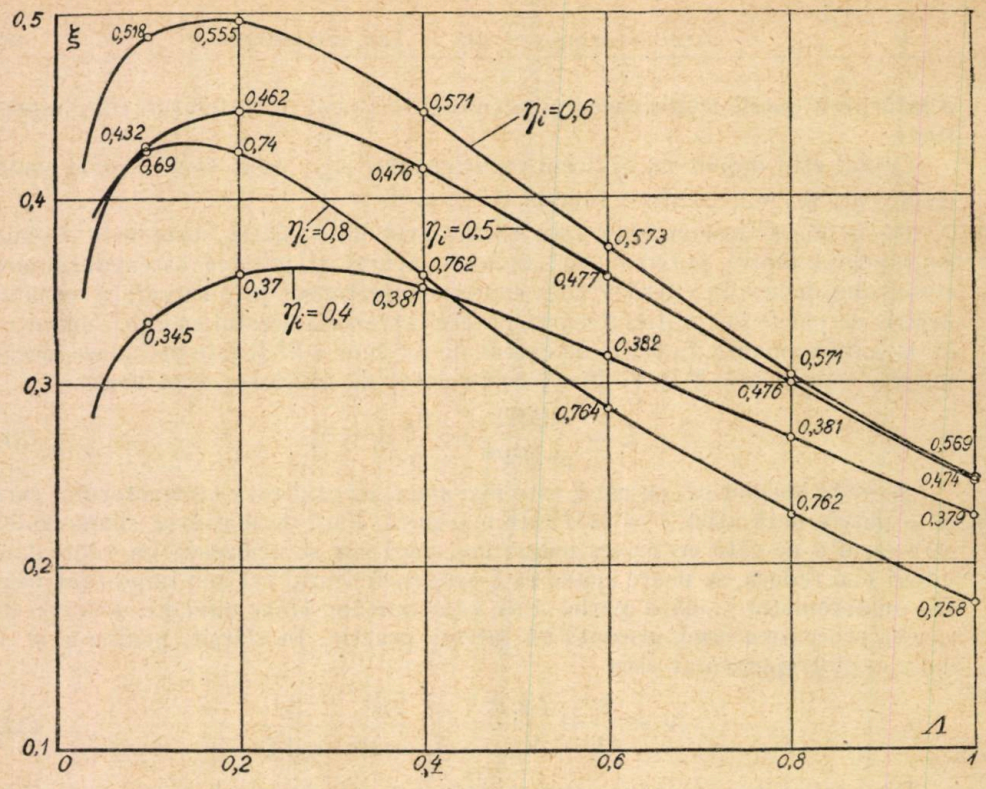
Valorile randamentului de frecări au fost trecute numai pentru $\eta_i = 0{,}8$ și s'au considerat independente de η_i, după cum rezultă din formula simplificată (30).

S'au recalculat apoi aceleași valori luându-se $\varepsilon = 0{,}05$, adică presupunând un aparat construit mai puțin îngrijit, cu suprafețe rugoase și legături de întărire între pale. Rezultatele sunt trecute în tabloul Nr. 2.

După aceste date s'au trasat diagramele $\xi = f(\Lambda)$ (fig. 2 și 3) pentru aeromotorii de randament indus optim în cele două cazuri $\varepsilon = 0{,}02$ și $\varepsilon = 0{,}05$, luându-se ca parametri valorile succesive $\eta_i = 0{,}8$, $\eta_i = 0{,}6$, $\eta_i = 0{,}5$ și $\eta_i = 0{,}4$. Se observă că la fiecare valoare η_i există un pas aerodinamic Λ care corespunde unui maxim pentru ξ. Fie Λ_M și ξ_M aceste valori. Trasându-se curba $\xi_M = f(\Lambda_M)$ (fig. 4), se pot deduce caracteristicile Λ^*, Λ_0^*, ξ^*, η^* și η_i^* ale aeromotorului cu cel mai mare coeficient de utilizare posibil, pentru un ε dat. Se găsește astfel:

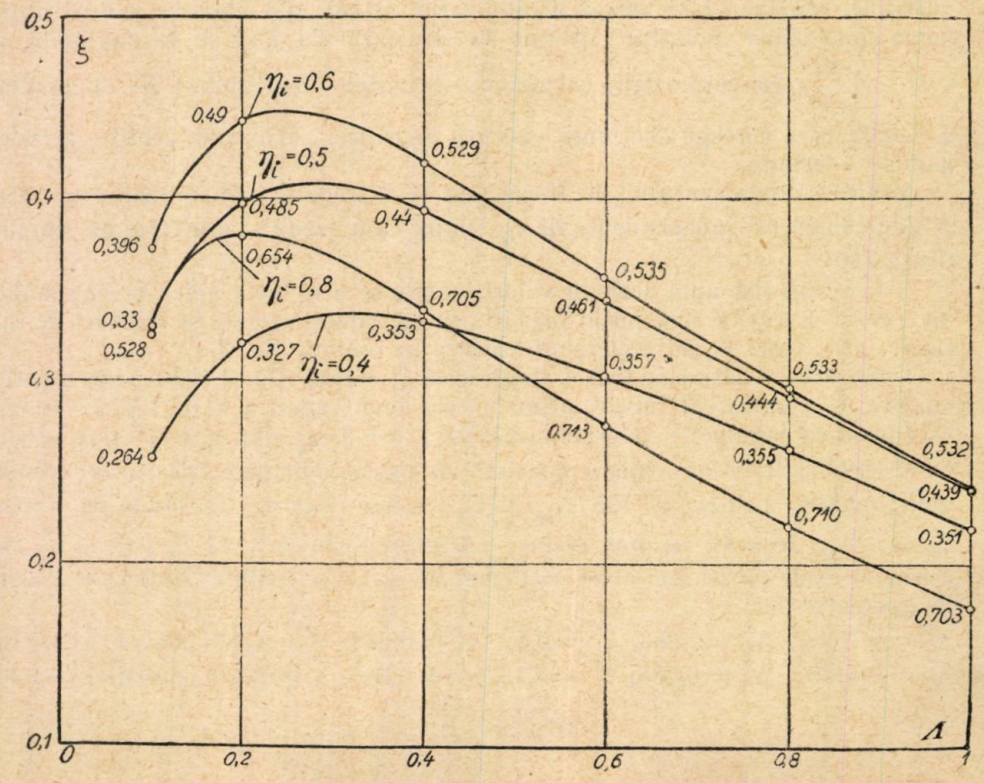
$\Lambda^* = 0{,}1692$, $\Lambda_0^* = 0{,}263$, $\xi^* = 0{,}5$, $\eta_i^* = 0{,}644$, $\eta^* = 0{,}589$ pentru $\varepsilon = 0{,}02$

$\Lambda^* = 0{,}2433$, $\Lambda_0^* = 0{,}388$, $\xi^* = 0{,}45$, $\eta_i^* = 0{,}627$, $\eta^* = 0{,}529$ pentru $\varepsilon = 0{,}05$



ξ
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
Λ
0,518
0,555
0,571
0,462
0,432
0,69
0,74
0,476
0,573
0,762
0,477
0,37
0,381
0,345
0,382
0,571
0,476
0,764
0,381
0,569
0,474
0,762
0,379
0,758
η_i=0,6
η_i=0,8
η_i=0,5
η_i=0,4

Fig. 2



ξ
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
Λ
η_i=0,6
0,49
0,529
η_i=0,5
0,485
0,44
0,396
0,654
0,535
η_i=0,8
0,705
0,461
0,33
0,528
0,353
0,327
η_i=0,4
0,357
0,533
0,444
0,713
0,264
0,355
0,532
0,439
0,710
0,351
0,703

Fig. 3

TABLOUL Nr. 1

$\eta_i = 0{,}8;\ \frac{k}{\Omega}$	Λ	ξ	μm	η_f	η	$\eta_i = 0{,}6;\ \frac{k}{\Omega}$	Λ	ξ	μm	η	$\eta_i = 0{,}4;\ \frac{k}{\Omega}$	Λ	ξ	μm	η	$\eta_i = 0{,}5;\ \frac{k}{\Omega}$	Λ	ξ	μm	η
$\eta_i = 0{,}2$	0,1	0,426	0,05322	0,863	0,69	$\eta_i = 0{,}4$	0,1	0,487	0,0812	0,518	$\eta_i = 0{,}6$	0,1	0,335	0,0839	0,345	$\eta_i = 0{,}5$	0,1	0,4283	0,08566	0,432
	0,2	0,425	0,106	0,925	0,74		0,2	0,498	0,166	0,555		0,2	0,36	0,180	0,37		0,2	0,4475	0,178	0,462
	0,4	0,359	0,179	0,952	0,762		0,4	0,446	0,297	0,571		0,4	0,352	0,353	0,381		0,4	0,416	0,333	0,476
	0,6	0,287	0,215	0,955	0,764		0,6	0,373	0,373	0,573		0,6	0,315	0,472	0,382		0,6	0,358	0,43	0,477
	0,8	0,227	0,227	0,952	0,762		0,8	0,305	0,407	0,571		0,8	0,27	0,54	0,381		0,8	0,30	0,479	0,476
	1	0,179	0,224	0,948	0,758		1	0,247	0,412	0,569		1	0,226	0,564	0,379		1	0,246	0,4924	0,474

TABLOUL Nr. 2

$\eta_i = 0{,}8;\ \frac{k}{\Omega}$	Λ	ξ	μm	η_f	η	$\eta_i = 0{,}6;\ \frac{k}{\Omega}$	Λ	ξ	μm	η	$\eta_i = 0{,}4;\ \frac{k}{\Omega}$	Λ	ξ	μm	η	$\eta_i = 0{,}5;\ \frac{k}{\Omega}$	Λ	ξ	μm	η
$\eta_i = 0{,}2$	0,1	0,326	0,0407	0,66	0,528	$\eta_i = 0{,}4$	0,1	0,373	0,0622	0,396	$\eta_i = 0{,}6$	0,1	0,258	0,0645	0,264	$\eta_i = 0{,}2$	0,1	0,3284	0,0657	0,33
	0,2	0,379	0,0943	0,817	0,654		0,2	0,443	0,1475	0,49		0,2	0,32	0,160	0,327		0,2	0,397	0,159	0,4085
	0,4	0,339	0,1695	0,881	0,705		0,4	0,420	0,240	0,529		0,4	0,333	0,330	0,353		0,4	0,393	0,314	0.4405
	0,6	0,275	0,207	0,892	0,713		0,6	0,358	0,358	0,535		0,6	0,303	0,445	0,357		0,6	0,345	0,413	0,461
	0,8	0,221	0,221	0,888	0,710		0,8	0,296	0,395	0,533		0,8	0,263	0,525	0,355		0,8	0,291	0,465	0,444
	1	0,175	0,219	0,879	0,703		1	0,241	0,402	0,522		1	0,221	0,551	0,351		1	0,2405	0,481	0,4395

Randamentele totale sunt însă destul de scăzute pentru aceste aeromotoare; de aceea, ele sunt potrivite în special pentru instalații fixe. Dacă se urmăresc valori mai mari ale lui η, trebue alese de pe curbele din figurile 1 și 2 valori ale randamentului indus sensibil mai mari. Admițând $\eta_i = 0{,}8$ se găsește

$$\xi_M = 0{,}43, \quad \Lambda_M = 0{,}145, \quad \Lambda_{OM} = 0{,}18 \text{ și } \eta_M = 0{,}723 \text{ pentru } \varepsilon = 0{,}02 \text{ și}$$

$$\xi_M = 0{,}379, \quad \Lambda_M = 0{,}2, \quad \Lambda_{OM} = 0{,}25 \text{ și } \eta_M = 0{,}654 \text{ pentru } \varepsilon = 0{,}05.$$

Diagramele (fig. 2 și 3) permit să se aleagă, dela caz la caz, valorile cele mai potrivite ale coeficienților aeromotorului de proiectat. In dreptul fiecărui punct de pe aceste diagrame s'au trecut și mărimile randamentului total η care indică imediat mărimea forței axiale. Se observă apoi că η nu variază sensibil când $\Lambda \geqslant \Lambda_M$, pentru toate curbele, și că scade când $\Lambda < \Lambda_M$. In consecință, se pot considera ca cele mai interesante, caracteristicile ξ_M, η_M, etc., corespunzătoare valorilor Λ_M, respectiv punctele de pe diagramele din figura 4, dintre care Λ^* este o valoare particulară la care $\xi = \xi^*$ are cea mai mare valoare. Spre a avea o imagine completă a datelor care joacă un rol în proiectare s'au trecut și pe această diagramă (fig. 4) valorile randamentelor totale, în dreptul câtorva puncte.

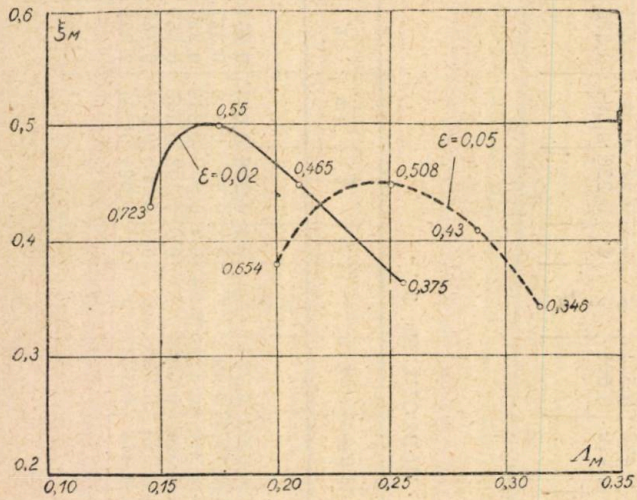


Fig. 4

Calculul vitezelor induse reale. Aplicând formulele (12), (13) și ținând seama de relațiile (19) care dau corecțiile forțelor tangențiale și axiale în cazul frecărilor, se pot scrie relațiile următoare:

$$\left.\begin{aligned}(V - v)\,\omega &= (V - v_0)\,\omega_0\left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\\ (V - v)\,v &= (V - v_0)\,v_0\,(1 + \varepsilon\lambda)\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

de unde se deduce:

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\,(1 + \varepsilon\lambda)\,\frac{v_0}{V}\left(1 - \frac{v_0}{V}\right)}\right) \tag{34}$$

și

$$\omega = \omega_0 \frac{v}{v_0} \cdot \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}}{1 + \varepsilon\lambda} = \omega_0 \frac{v}{v_0} \eta_{fr}; \quad \eta_{ir} = \frac{\lambda}{\lambda_0} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1 - 4(1+\varepsilon\lambda)\frac{v_0}{V}\left(1 - \frac{v_0}{V}\right)}}{2 + \left(1 - \sqrt{1 - 4(1+\varepsilon\lambda)\frac{v_0}{V}1 - \frac{v_0}{V}}\right)\frac{\eta_{fr}}{\eta_i}\lambda^2} \tag{35}$$

Din ultima relație se deduce ușor că η_{ir} nu diferă cu mai mult de 5% față de randamentul indus al aeromotorului fără frecări, chiar în cazurile cele mai desavantajoase, și deci ipoteza introdusă la început, că pasurile aerodinamice λ și randamentele induse sunt aprox mativ aceleași în ambele cazuri, apare pe deplin justificată. In formulele (35) η_{fr} este valoarea randamentului de frecări la raza r. Se observă că în realitate vitesele induse axiale sunt mai mari decât în cazul când nu se consideră frecările.

Vitesa indusă medie axială pe tot discul v_m se poate deduce de asemenea dacă se scrie ecuația de continuitate care dă:

$$\pi R^2 v_m = \int_0^R 2\pi r v \, dr \tag{36}$$

sau

$$\frac{v_m}{V} = \frac{k\eta_i}{\Omega R^2}\int_0^R \left(1 - \sqrt{1 - 4(1+\varepsilon\lambda)\frac{v_0}{V}\left(1 - \frac{v_0}{V}\right)}\right) r \, dr \tag{37}$$

Efectuarea integralei duce la expresii complicate; de aceea, vom admite că deoarece v și v_0 nu diferă mult și dat fiind că ele reprezintă numai o fracțiune din vitesa totală se poate pune în (33) $V - v \cong V - v_0$ și deci

$$v = v_0(1 + \varepsilon\lambda) \tag{38}$$

Punând această expresie în (36) și integrând se găsește:

$$\frac{v_m}{V} = \frac{k\eta_i}{\Omega}\left[1 - \Lambda^2 L\frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2} + 2\varepsilon\Lambda^2\left(\frac{1}{\Lambda} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\Lambda\right)\right]. \tag{39}$$

Inlocuind datele numerice găsite pentru aeromotorii cu cel mai mare coeficient de utilizare (Λ^*, η_i^*) rezultă:

$$\frac{v_m^*}{V} = 0{,}323, \text{ pentru } \varepsilon = 0{,}02 \text{ și } \frac{v_m^*}{V} = 0{,}339, \text{ pentru } \varepsilon = 0{,}05$$

valori foarte apropiate de raportul $\frac{1}{3}$ cunoscut pentru cazul când se neglijează frecarea și vitesele induse de rotație. Se observă totuși că deși vitesa

indusă optimă axială este aproape aceeași, coeficienții ξ^* diferă în mod sensibil de valoarea $\xi^* = 0{,}594$ calculată în cazul când nu se consideră și pierderile.

Calculul datelor geometrice și aerodinamice ale unui aeromotor. Cu elementele găsite se poate trece cu ușurință la o metodă de calcul pentru un aeromotor căruia i se prescrie puterea utilă și vitesa vântului corespunzătoare. Pe baza celor arătate se pot alege coeficienții ξ și η_i la care corespunde un pas aerodinamic Λ. Se pot lua valorile ξ^*, η_i^*, Λ^*, care prezintă un caz optim și care au fost indicate numeric. Totuși, se observă că valorile corespunzătoare arată că acești aeromotori trebue să aibă o vitesă periferică mare, și, deoarece R este minim față de toate celalte cazuri posibile (vezi relația (31)) rezultă că în general aceste aparate au o vitesă rapidă de rotație.

Acest lucru este practic cunoscut, admițându-se totdeauna că aeromotorii cu rotații ridicate au coeficientul de utilizare cel mai bun; totuși, diagramele (fig. 2 și 3) arată clar că nu trebue să se exagereze în acest sens, deoarece sub valorile Λ_M, ξ scade foarte repede. Inconvenientul aparatelor cu vitese mari de rotație constă însă în faptul că ele au un cuplu mic la pornire și de aceea nu pot demara de obicei sub plină sarcină. Dacă se urmărește un cuplu mare la pornire trebue să se admită o valoare $\Lambda > \Lambda^*$ cuprinsă între 0,3—0,8 și în acest caz diagramele din fig. 2, 3 și 4 permit alegerea cea mai potrivită, în cazul când nu se utilizează direct formulele indicate anterior. Odată fixate Λ și ξ, rezultă η_i și raza:

$$R = \sqrt{\frac{2q\mathcal{S}}{\rho\pi V^3 \xi}} \tag{40}$$

unde, dacă R_1 este raza butucului, de unde începe zona inactivă a discului aparatului,

$$q = \frac{1}{1 - \frac{R_1^2}{R^2}} \tag{41}$$

se poate aprecia după considerații constructive; în medie $q \cong = 0{,}9$. Formula (40) se aplică destul de bine dacă numărul n al palelor este mare. In cazul contrar se va corecta rezultatul ținând seama de influența numărului limitat de pale și anume:

$$R \cong \frac{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1{,}39 \frac{\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \frac{1}{n}}{1 - 1{,}39 \frac{\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \frac{1}{n}}}{1 - 1{,}39 \frac{\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \cdot \frac{1}{n}} \cdot \sqrt{\frac{2q\mathcal{S}}{\rho\pi V^3 \xi}} \cong \left(1 + \frac{\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \frac{1}{n}\right) \sqrt{\frac{2q\mathcal{S}}{\rho\pi V^3 \xi}}. \tag{42}$$

Se deduce apoi vitesa de rotație:

$$\Omega = \frac{V}{\Lambda_0 R} = \frac{V\eta_i}{\Lambda R} \tag{43}$$

toate celelalte elemente (coeficientul de cuplu μ, al forţei axiale τ, randamentul total η) fiind definite de relaţiile (28), (29), (30) şi (31), odată ce s'a admis o valoare medie a lui ε. Dacă vitesa de rotaţie Ω este impusă, ecuaţiile (42), (43) şi diagramele din fig. 2 şi 3 sau ecuaţiile (21), (25) şi (31) permit rezolvarea problemei prin aproximaţii succesive. Deşi ecuaţiile sunt complicate, calculele pot fi conduse rapid şi în acest caz, mai ales dacă se utilizează diagramele.

Rămâne să se dimensioneze apoi palele, respectiv să se găsească coarda şi incidenţa la fiecare rază. Din ecuaţia:

$$dU_0 = n \sin\beta \, dP = 4\pi\rho \, (V - v_0) \, \omega_0 r^2 \, dr \tag{44}$$

notând cu $\varkappa$ coeficientul de corecţie pentru a ţine seama de numărul limitat de pale:

$$\varkappa = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{r}{R}\right)\frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda}} \tag{45}$$

şi punând

$$dP = \frac{\rho}{2} c W^2 Cz \tag{46}$$

în care c este coarda palei la raza r, iar Cz coeficientul de portanţă corespunzător, se găseşte:

$$\frac{n c Cz}{2\pi r} = 4\varkappa \frac{\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} \cdot \frac{1-\eta_i}{\eta_i + \lambda^2} \tag{47}$$

Alegând o valoare pentru Cz se deduce apoi coarda c, iar determinarea incidenţei unghiului de calaj, etc., se efectuează mai departe după metodele uzuale.

АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ САМОЛЕТНЫХ МОТОРОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Для самолетных моторов используются методы вычисления, применяемые для авиационных пропеллеров, с учетом влияния трения для того чтобы можно было определить оптимальные характерные коэффициенты для каждого случая.

Формулы изображены диаграммами, которые облегчают выбор данных для проектов; приводится метод для скоростного определения размеров с аэродинамической точки зрения.

LE CALCUL AÉRODYNAMIQUE DES AÉROMOTEURS

(RÉSUMÉ)

On applique au calcul des aéromoteurs les méthodes utilisées pour les hélices d'aviation, en tenant compte des frottements, afin d'établir les coefficients caractéristiques optima dans chaque cas.

Les formules sont converties en diagrammes facilitant le choix des éléments des projets et on donne une méthode qui permet le calcul rapide et exact des aéromoteurs du point de vue aérodynamique.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Aerodinamica*. Ed. Tehnică, 1951.
2. E. M. Fateev, *Motoare eoliene*. Moscova, 1948.
3. E. Pistolesi, *Aerodinamica*. Torino, 1932.
4. W. Durand, *Aerodynamic Theory*. J. Springer, Berlin, 1935, v. IV.
5. F. Weinig, *Aerodynamik der Luftschraube*. J. Springer, Berlin, 1940.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

CONSIDERAŢIUNI GENERALE REFERITOARE LA CERCETAREA VIBRAŢIILOR MECANICE CU AJUTORUL ANALOGIILOR ELECTRICE

DE

L. HAMBURGER

1. Creşterea continuă a puterii maşinilor şi a debitelor diverselor instalaţii industriale şi mai cu seamă progresele remarcabile în ultima vreme în domeniul vitezelor mari şi foarte mari de lucru, au pus pe tehnician în faţa unor probleme pe care altădată, dacă nu le ignora cu totul, în cel mai bun caz le trecea cu vederea — problemele fenomenelor vibratorii.

Atâta timp cât vitesele de lucru erau moderate, grija de căpetenie a constructorului era să dimensioneze astfel organele diferitelor sale maşini, încât să asigure acestora din urmă o funcţionare îndelungată şi în bune condiţiuni.

Creşterea rapidă a vitezelor de lucru a arătat că această grijă, dacă este necesară, nu este întotdeauna şi suficientă şi că o funcţionare sigură a unei maşini nu se obţine întotdeauna prin mărirea dimensiunilor pieselor componente.

Este destul să amintim aici de ruperile de arbori cotiţi la motoarele Diesel sau de ruperile de axe de elice la vapoare, din cauza vibraţiilor torsionale, de salata de palete caracteristică turbinelor de aburi, provocată de vibraţiile paletelor sau ale discurilor, de trepidaţiile maşinilor unelte rapide, care au cauzat atâtea rebuturi, sau de frângerea în plin sbor a aripilor de avion, datorită vibraţiilor combinate transversale şi torsionale, pentru a dovedi că azi tehnicianului nu-i mai este permis să neglijeze fenomenele vibratorii, ale căror legături cu operaţiile fundamentale ale diferitelor tipuri de maşini, se arată din ce în ce mai strânse.

2. Metrologia modernă, folosindu-se în cea mai largă măsură de perfecţionările mecanicii fine şi de progresele cunoaşterii fenomenelor fizice, a reuşit să imagineze o serie întreagă de aparate, deosebit de ingenioase, pentru măsurarea, înregistrarea şi analizarea parametrilor fenomenelor periodice.

Această aparatură s'a dovedit de nepreţuit folos pentru cercetarea maşinilor existente, în stare de funcţiune. Datorită acestei aparaturi, s'au putut adesea stabili izvoarele vibraţiilor dăunătoare şi înlătura răul prin măsuri constructive sau schimbări ale regimului de funcţionare.

3. O problemă de importanţă cel puţin egală, este *stabilirea apriorică a regimului de vibraţii al unei maşini în curs de proiectare, şi găsirea măsurilor de înlăturare sau de atenuare a frecvenţelor periculoase.*

Această problemă poate fi atacată pe două căi diferite: prin calcul şi prin experiment.

Există astăzi *metode de calcul aproximativ foarte evoluate* (metodele variaţionale, metodele reticulare, metoda celor mai mici pătrate, calculul cu diferenţe finite, calculul grafic, etc.); însă pe lângă aparatul matematic, adesea impresionant, pe care îl pun în acţiune, aceste metode mai cer numeroase calcule, migăloase şi îndelungate. Ca exemplu de comparaţie ar putea servi de pildă calculele astronomice, ale căror ecuaţii se aseamănă foarte mult cu cele ale vibraţiilor, şi despre care se ştie ce migăloase sunt.

Nu se poate deci pretinde inginerului să se servească de asemenea metode decât în cazuri deosebite, cu atât mai mult cu cât la scheme mai complicate ale sistemelor vibratorii, calculele opun dificultăţi foarte serioase.

4. S'ar părea deci că pentru rezolvarea problemei enunţate şi anume stabilirea a priori a frecvenţelor, tehnica s'ar afla într'un impas.

Din fericire rămâne însă calea a doua, a experimentării. Prin analogie cu cercetările din teoria elasticităţii, s'au făcut adesea propuneri ca experimentările să se facă pe modele mecanice la scară redusă. Se ştie ce masse mari pun în joc maşinile actuale şi ce schimburi considerabile de energie pot avea loc, aşa că o experimentare la scară reală nu poate intra în consideraţie.

Dar şi modelele reduse opun dificultăţi destul de serioase: vibraţiile iau naştere în cursul funcţionării maşinii, deci modelul trebue pus în funcţiune, ceea ce impune cheltueli şi griji deosebite la confecţionare. De asemenea, o întreagă serie de *fenomene superficiale nu sunt lineare* şi reducerea la scară face câteodată ca influenţa lor să crească disproporţionat şi să altereze astfel sensibil fenomenul cercetat.

Această situaţie nu este deloc favorabilă cercetărilor experimentale pe modele reduse.

Experimentul capătă însă o înfăţişare cu totul deosebită dacă recurgem la legile fizicii matematice şi căutăm *analogii în alte domenii* decât acela al vibraţiilor mecanice. Se cunosc numeroase asemenea analogii, dintre care unele merg până la cele mai mărunte detalii.

Datorită unei asemenea analogii, un fenomen care pune în acţiune în condiţii grele energii sau inerţii mari, poate fi cercetat cu ajutorul unui alt fenomen, diferit, care cere însă o aparatură modestă, uşor de realizat, şi un consum redus de energie ascultând de ecuaţii identice: constantele acestora au însă o altă semnificaţie.

5. *O asemenea analogie există efectiv între fenomenele din domeniul elasto-mecanic al vibraţiilor şi acela al fenomenelor periodice şi transitorii electro-magnetice.*

Folosirea fenomenelor periodice în electricitate s'a dovedit a fi excepţional de rodnică. Inafară de descoperiri şi progrese care au schimbat faţa lumii, au dat naştere unei tehnici de măsurători deosebit de rafinate. Este deci interesant ca în problema vibraţiilor mecanice să se folosească această situaţie favorabilă.

Analogiile electrice ale sistemelor vibratorii mecanice sunt în genere simple, iar aparatura cerută, deşi destul de pretenţioasă, nu este totuşi inaccesibilă.

Evident că o analogie nu este o identitate şi că deci fiecare domeniu al fizicii are fenomenele lui secundare sau conexe ce se asociază celor fundamentale.

Și analogiile electrice vor introduce deci perturbările lor. Este suficient să arătăm aici că sursele de curent folosite nu vor putea produce decât curenți *nesinusoidali* și că elementele circuitelor chiar, ca transformatorii cu miez de fier, condensatorii, etc., vor aduce deformații caracteristice curenților și tensiunilor.

Totuși, analiza armonică și unele măsuri experimentale de precauție pot mărgini în limite admisibile efectele acestor factori.

Un fapt îmbucurător este însă că *analogiile electrice permit reproducerea destul de apropiată de realitate a multor fenomene nelineare*, cum ar fi de exemplu: *frecarea solidă*, etc.

In genere deci, dintre toate analogiile posibile, și numărul lor este destul de mare, tehnica vibrațiilor va da de regulă preferință *analogiilor electrice*, pentru flexibilitatea și pentru ușurința cu care pot fi folosite.

6. Odată stabilit principiul utilizării analogiilor electrice, să arătăm prin câteva exemple cât mai simple, cum se realizează aceste analogii.

Să considerăm în primul rând un *sistem mecanic cu un singur grad de libertate*, alcătuit dintr'un punct material de massă m, legat de un resort perfect elastic de rigiditate dinamică k (respectiv flexibilitate C_M) și mișcându-se într'un mediu vâscos, de rezistență specifică r sub acțiunea unor forțe exterioare periodice $\overline{F} = F_0 \cos p_0 t$.

Ecuația mișcării punctului va fi:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + r.\frac{dx}{dt} + kx = F_0.\cos p_0 t \qquad (6.1)$$

unde prin x am însemnat *elongația* sau deplasarea punctului față de poziția sa inițială.

Schema mecanică a acestui sistem este următoarea:

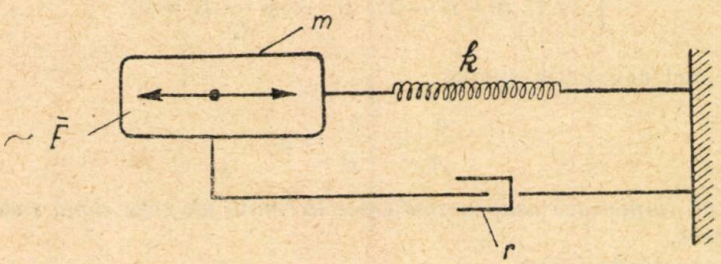


Fig. 1

Această schemă sugerează o schemă electrică tot atât de simplă:

în care $\overline{U} = U \cos pt$ este o tensiune periodică, iar restul elementelor au notații și simbolizări convenționale.

Cu siguranță că se mai pot imagina și alte scheme pentru aceeași analogie, iar schemei alese i se pot da diferite interpretări, după parametrii aleși. Noi vom expune aici cazul cel mai simplu, luând ca

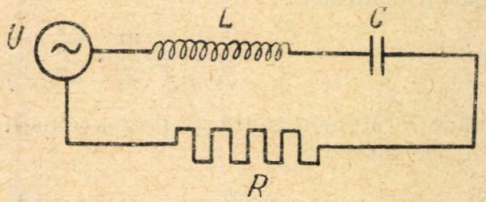


Fig. 2

variabilă dependentă sarcina q a condensatorului. Ecuaţia corespunzătoare se scrie astfel:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = U\cos pt \tag{6.2}$$

Comparând ecuaţiile (6.1) şi (6.2) deducem următoarea corespondenţă între elementele celor două circuite

m (massa)	→	L (inductanţă)
r (rezistenţa vîscoasă)	→	R (rezistenţa ohmică)
k (rigiditatea dinamică)	→	$\frac{1}{C}$ (C = capacitate)
F_0 (forţa maximă)	→	U (tensiune maximă)

şi aşa mai departe.

Pentru a face conversiunea dela unul din sisteme la celălalt, încercăm soluţiile *staţionare*

$$x = a\cos p_0 t + b\sin p_0 t \tag{6.3}$$
$$q = A\cos pt + B\sin pt$$

care introduse în (6.1), respectiv (6.2), dau:

$$\begin{cases} -m p_0^2 \cdot a + p_0 \cdot b + k \cdot a = F_0 \\ -m p_0^2 \cdot b - p_0 \cdot a + k b = 0 \end{cases} \tag{6.4 a}$$

$$\begin{cases} -L.p^2 \cdot A + R \cdot p \cdot B + \frac{1}{C} A = U \\ -L.p^2 \cdot B - R \cdot p \cdot A + \frac{1}{C} B = 0 \end{cases} \tag{6.4 b}$$

Facem aici convenţia simplă

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \mu \tag{6.5}$$

care, evident, impietează asupra condiţiilor la limită ale celor două sisteme, legându-le reciproc.

Cu prescurtările utile:

$$\omega_0^2 = k/m \text{ şi } \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \tag{6.6}$$

găsim soluţiile:

$$\frac{r \cdot p_0}{R \cdot p} = \frac{m}{L} \cdot \frac{\omega_0^2 - p_0^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{F_0}{U} = \frac{1}{\lambda} \tag{6.7}$$

unde λ este constantă de proporţionalitate.

De aici:

$$U = \frac{\lambda}{\mu} F_0 \; ; \; R = \lambda \cdot \frac{p_0}{p} \cdot r \; ; \; L = \lambda \cdot \frac{\omega_0^2 - p_0^2}{\omega^2 - p^2} \cdot m \tag{6.8 a}$$

și evident, din (6.6)

$$C = \frac{1}{L \cdot \omega^2} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1 - p^2/\omega^2}{1 - p_0^2/\omega_0^2} \cdot \frac{1}{k} \tag{6.8 b}$$

care ne permit trecerea dela un sistem la celălalt, dacă dispunem de

$$\lambda, \mu, p \text{ și } \omega.$$

O oarecare îngrădire o reprezintă legătura dintre condițiile la limită: pentru $t = 0$

$$x_0 = a \quad ; \quad q_0 = A.$$

$$v_0 = \dot{x}_0 = p_0 \cdot b \quad ; \quad i_0 = \dot{q}_0 = p \cdot B.$$

astfel că ținând seamă de relațiile (5), obținem:

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\mu} \cdot x_0 \\ i_0 &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot v_0 \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Condițiile inițiale ale sistemului electric pot fi deci influențate prin μ și p; însă cum p este legat de posibilitățile experimentării, varierea acestui parametru este mai limitată, astfel încât raportul

$$(q_0 : i_0) = \frac{p_0}{p} \cdot \left(\frac{x_0}{v_0}\right)$$

arată că nu putem dispune arbitrar concomitent și de q_0 și de i_0 în circuitul electric.

Nu am examinat decât soluția staționară. Soluția transitorie a ecuațiilor (6.1) sau (6.2) se cercetează în mod analog neprezentând dificultăți. De altfel, elementele ei dominante ω_0, r, m sau k au și apărut în soluția staționară.

Dacă formulele (6.8 a) și (6.8 b) dau valori electrice greu de realizat, se poate folosi un circuit electric de același fel, cu alte valori ale constantelor și prin similitudine se poate reveni la circuitul electric inițial.

7. Până acum am examinat un sistem cu un singur grad de libertate. Sistemelor cu mai multe grade de libertate, li se pot găsi scheme electrice echivalente, la fel de simplu. Așa de exemplu, *schema mecanică cu două grade de libertate*

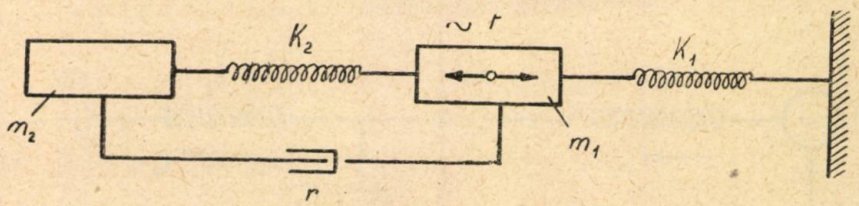


Fig. 3

în care r reprezintă de exemplu un amortizor hidraulic sau ceva similar, are drept analoagă schema electrică:

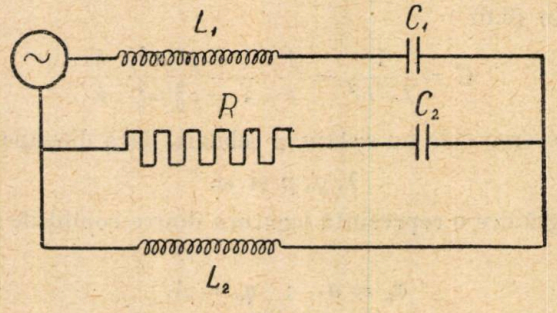


Fig. 4

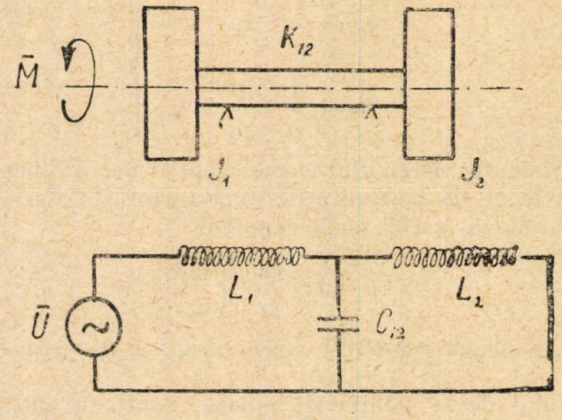


Fig. 5

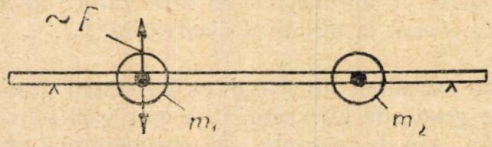


Fig. 6

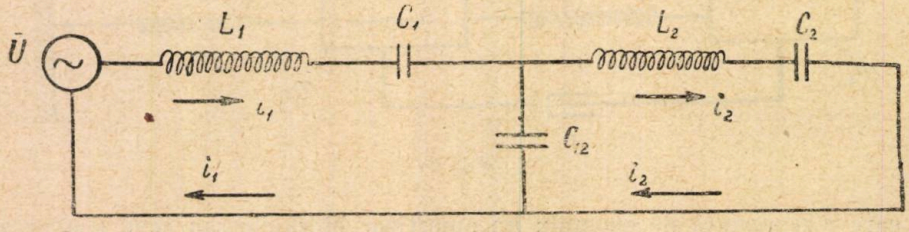


Fig. 7

Cuplării maselor-m_1 și-m_2 prin resortul-k_2 și rezistenței-r îi corespunde cuplarea electrică prin capacitatea-C_2 și rezistența ohmică-R.

De asemenea, sistemul torsional, compus din două volante și o axă fără massă, însă cu rigiditate torsională, fără frecare, poate fi reprezentat prin schema electrică simplă din fig. 5 unde cuplajul prin capacitatea C_{12} corespunde cuplării mecanice prin axa de rigiditate k_{12}; iar momentului periodic de torsiune $\bar{M}$ îi corespunde tensiunea periodică $\bar{U}$.

Ceea ce s'a spus despre vibrațiile longitudinale sau torsionale, este valabil și pentru vibrațiile transversale (flexionale). Schemei din fig. 6 compusă dintr'un ax elastic fără massă și două masse punctuale m_1 și m_2 dintre care prima este acționată de o forță periodică, îi corespunde o schemă electrică asemănătoare celei din exemplul precedent. In cazul când coeficienții de rigiditate sunt k_{11}, k_{12} și k_{22}, ecuațiile masselor m_1 și m_2 se scriu respectiv:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{J}_1 + k_{11} J_1 - k_{12} J_2 = \bar{F} \\ m_2 \ddot{J}_2 + k_{22} J_2 - k_{12} J_1 = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Pentru a găsi analogia electrică cea mai simplă, transformăm ecuațiile după cum urmează:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{J}_1 + (k_{11} - k_{12}) J_1 + k_{12} (J_1 - J_2) = \bar{F} \\ m_2 \ddot{J}_2 + (k_{22} - k_{12}) J_2 + k_{12} (J_2 - J_1) = 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

Schema electrică corespunzătoare acestui sistem este deci aceea din fig. 7, unde L_1, L_2 corespund masselor m_1, m_2

C_1, C_2 rigidităților $(k_{11} - k_{12})$ și $(k_{22} - k_{12})$

C_{12} rigidității k_{12} de cuplaj.

Prin capacitatea C_{12} trece curentul $i_1 - i_2$, sau sarcina $q_1 - q_2$, după cum reiese din schemă.

Observăm în treacăt că *rigiditățile dinamice* kij *sunt complementele algebrice ale coeficienților de influență* α ij cunoscuți din statica construcțiilor.

Așa cum am construit scheme electrice simple pentru diferitele tipuri de sisteme cu două grade de libertate, tot așa putem proceda și *pentru orice număr de grade de libertate*, fără a întâmpina dificultăți serioase. Iar calculul valorilor elementelor circuitelor electrice se face ca în cazul unui singur grad de libertate.

8. *Prin trecere la limită*, tot ceea ce s'a spus despre sistemele cu un număr finit de grade de libertate, *devine valabil și pentru sistemele cu o infinitate de grade de libertate, pentru mediile continue.*

Vibrațiile mediilor continue sunt stăpânite de *ecuații cu derivate parțiale*, sau ceea ce e echivalent, de ecuații integrale, *obținute prin trecerea la limită.*

Operația inversă trecerii acesteia la limită constă în a transforma un *sistem continuu, într'unul discret cu un număr finit de grade de libertate.*

O asemenea operație este întotdeauna licită, pentru că nu reprezintă altceva decât revenirea la sistemul a cărui trecere la limită s'a făcut când s'a stabilit ecuația. Deosebirile, adică *erorile*, față de soluția exactă vor fi cu atât mai mici cu cât numărul subdiviziunilor sistemului este mai mare, și invers.

In genere, convergența este destul de rapidă, astfel încât numărul eșaloanelor nu este prea mare.

9. Pe baza acestor consideraţii simple se poate desvolta o metodă foarte fructuoasă de cercetare a vibraţiilor mediilor continue, prin analogii electrice.

In prealabil, *trebue transformată ecuaţia cu derivate parţiale a mişcării într'una cu diferenţe finite cu privire la coordonatele spaţiale.*

Şi aici ne vom mărgini la un exemplu simplu:

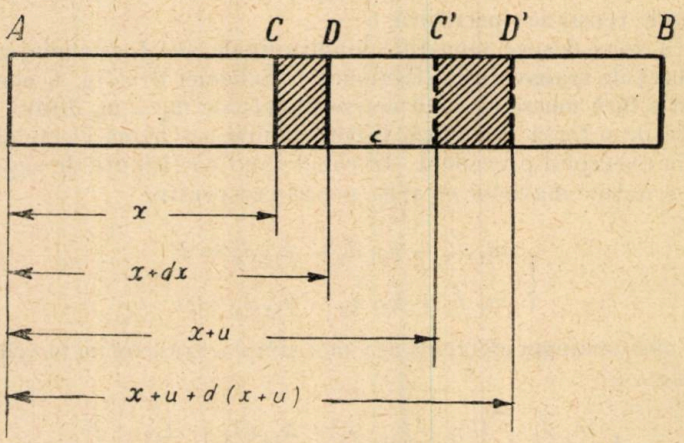


Fig. 8

fie o bară omogenă AB, cu axa rectilinie însă secţiunea transversală $A(x)$ variabilă, care execută vibraţii proprii longitudinale. In cursul acestor vibraţii elementul de bară CD, de lungime iniţială dx, ajunge în poziţia $C'D'$ şi capătă lungimea:

$$d(x+u) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Alungirea specifică a elementului este

$$\varepsilon = \frac{C'D' - CD}{CD} = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} du - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

şi după legea lui Hooke este proporţională cu tensiunea care se naşte în bară

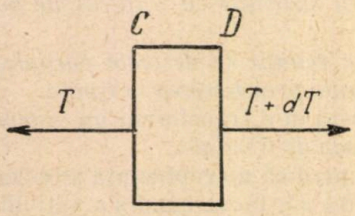


Fig. 9

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma \cdot A(x)}{E \cdot A(x)} = \frac{T}{E \cdot A(x)}$$

unde E = modulul de elasticitate, iar $T = E \cdot A(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ este efortul axial în bară.

Echilibrul elementului CD cere ca rezultanta forţelor axiale care lucrează pe cele două feţe opuse $(T + dT) - T = dT$ să facă echilibru forţei de inerţie a elementului, dF. Insă $dT = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx =$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(E \cdot A(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$, iar massa elementului este:

$$dm = (A(x) \cdot dx) \cdot \frac{\gamma}{g}$$

în timp ce acceleraţia lui medie, care poate fi identificată cu aceea a punctului C, este

$$a = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x + u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

pentrucă x este independent de t.

In consecinţă

$$dT + dF = 0$$

se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E \cdot A(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\gamma}{g} \cdot A(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9.1}$$

care este ecuaţia vibraţiilor proprii longitudinale ale unei bare elastice, cu axa rectilinie şi *secţiunea variabilă*.

Această ecuaţie o transformăm într'o ecuaţie cu diferenţe finite cu privire la x. In acest scop, împărţim bara în n segmente de lungime egală

$$\Delta x = \frac{l}{n}$$

şi numerotăm capetele segmentelor în ordine naturală dela 1 până la $(n + 1)$.

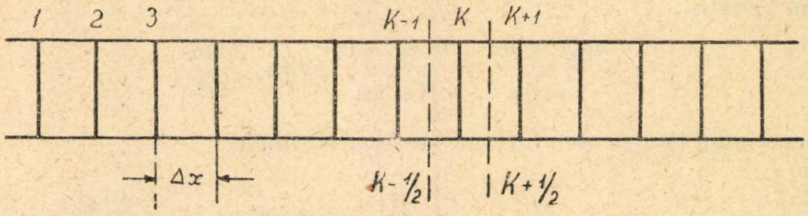


Fig. 10

Vom numi aceste capete *noduri*, pentru a ne înlesni astfel trecerea la schema electrică.

Derivata parţială $\frac{\partial u}{\partial x}$ se transformă:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

iar expresia din membrul I al ecuaţiei (1) în:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E \cdot A(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{E \cdot A_{k+1/2} \cdot (u_{k+1} - u_k)}{\Delta x^2} - \frac{E \cdot A_{k-1/2}(u_k - u_{k-1})}{\Delta u^2}$$

Aici am pus în calcul pentru $A(x)$ valorile dela mijlocul segmentelor corespunzătoare. Cum la calcul participă cele două segmente $(k-1, k)$ și $(k, k+1)$, pentru membrul II vom pune valorile nodului mijlociu k în calcul, așa că ecuația (9.1) devine, cu o neînsemnată transformare:

$$\frac{E \cdot A_{k+1/2}}{\Delta x}(u_{k+1} - u_k) - \frac{E \cdot A_{k-1/2}}{\Delta x}(u_k - u_{k-1}) = \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta x \cdot A_k \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad (9.2)$$

care se aseamănă cu ecuația (9.2) dela § 6.

Dacă în această ecuație, u_i reprezintă tensiunile nodurilor schemei electrice din fig 11, iar coeficienții impedanțele Z_i, ecuația (9.2) devine identică cu regula lui Kirchoff pentru curenții nodului K:

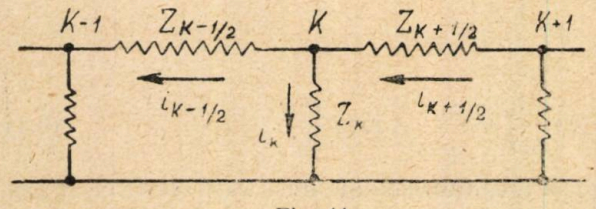


Fig. 11

$$i_{k+1/2} - i_{k-1/2} = i_k \quad (9.3)$$

unde

$$i_{k+1/2} = (1/Z_{k+1/2}) \cdot (u_{k+1} - u_k)$$

$$i_{k-1/2} = (1/Z_{k-1/2}) \cdot (u_k - u_{k-1})$$

$$i_k = (1/Z_k) \quad (u_k - 0)$$

Intr'adevăr, dacă într'o *primă alternativă* punem:

$$\gamma/g \cdot \Delta x \cdot A_k = L_k \quad (9.4\,a)$$

$$\frac{\Delta x}{E \cdot A_{k-1/2}} = C_{k-1/2} \text{ și } \frac{\Delta x}{E \cdot A_{k+1/2}} = C_{k+1/2}$$

obținem ecuația:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{C_{k+1/2}} + \frac{u_{k-1} - u_k}{C_{k-1/2}} = L_k \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad (9.4\,b)$$

cu schema unui lanț pentru filtrarea *frecvențelor înalte*,

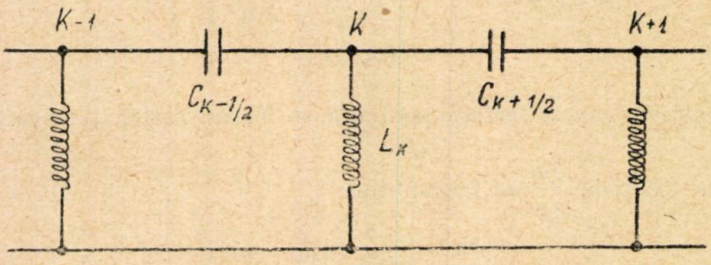


Fig. 12

iar dacă în *a doua alternativă* punem:

$$\gamma/g \cdot \Delta x \cdot A_k = C_k \quad (9.5\,a)$$

$$\frac{\Delta x}{E \cdot A_{k-1/2}} = L_{k-1/2} \text{ și } \frac{\Delta x}{E \cdot A_{k+1/2}} = L_{k+1/2}$$

obținem ecuația:

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{L_{k+1/2}}+\frac{u_{k-1}-u_k}{L_{k-1/2}}=C_k\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \qquad (9.5\ b)$$

căreia îi corespunde schema unui lanț filtrant pentru *frecvențe joase*:

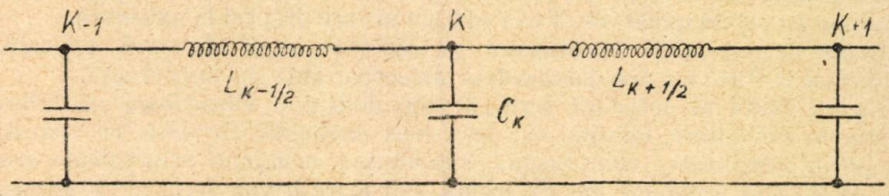


Fig. 13

Am făcut să corespundă segmentelor barei noastre, cuadripolii unor lanțuri filtrante pentru înaltă sau joasă frecvență.

Valorile din expresiile (9.4 a), respectiv (9.5 a), vor decide dacă trebue să utilizăm un tip sau altul de filtru, în funcție de utilajul disponibil.

Evident că și *condițiile la limită trebue făcute* să coincidă, ceea ce nu întâmpină greutăți deosebite.

In sfârșit, dacă impedanțele calculate după formulele (9.4 a) și (9.5 a) nu corespund posibilităților și disponibilităților, nimic nu împiedecă folosirea unor circuite asemănătoare, însă cu elemente disponibile sau accesibile, și revenirea la cele inițiale pe baza legilor similitudinii.

In același fel se pot trata și alte sisteme elastice, pornind dela ecuațiile mișcării.

10. Schemele date nu sunt singurele care corespund sistemelor mecanice, cu care prezintă analogie. O aceeași schemă admite mai multe interpretări, după cum considerăm tensiunea, sarcina , au curentul ca variabilă dependentă. Pe de altă parte, chiar fenomene elastice diferite ca de exemplu torsiunea și vibrațiile longitudinale ale unei bare și vibrațiile transversale ale unei coarde întinse, ascultă de aceeași ecuație cu derivate parțiale. Această situație lărgește posibilitățile metodei analogiilor electrice, permițând folosirea unui același aparataj la cazuri destul de diferite.

11. In ultimii ani s'au pus la punct diferite aparate pentru cercetarea vibrațiilor mecanice prin mijlocirea analogiilor electrice. Toate aceste aparate, dintre care unele deosebit de ingenioase și interesante, au domenii de aplicație destul de mărginite. Un dispozitiv de acest gen, excepțional de reușit, construit pentru cercetarea arborilor cotiți ai motoarelor de aviație, la vibrații torsionale, a fost pus la punct de către binecunoscutul cercetător sovietic T e i t e l b a u m.

Forța exterioară variabilă este imprimată în alb pe un film circular, prins pe un inel de plexiglas, care se rotește după dorință, mai încet sau mai repede, cu ajutorul unui motor electric perfect controlat în ceea ce privește turația. O serie de lămpi prevăzute cu optica necesară, proiectează prin spațiile albe ale filmului rotativ, vine subțiri de lumină pe niște celule fotoelectrice, care transformă impulsul luminos în curent electric. Fiecare curent este amplificat și condus să excite una din celulele unui lanț filtrant care reprezintă schema electrică a sistemului elastic discret studiat. Curenții respectivi sunt citiți sau înregistrați cu ajutorul unui oscilograf catodic, care cercetează pe rând diferitele celule ale lanțului. Decalajul dintre cilindrii motorului se obține prin decalare

unghiulară de-a-lungul inelului rotativ, a lămpilor fotcelectrice și dispozitivelor respective de excitație.

Este evident că proiectarea unui motor de aviație, de performanțe deosebite, este un eveniment tehnic important care poate cere și impune cercetarea prin toate mijloacele posibile a diverselor sale elemente constituente și a fenomenelor parazite sau dăunătoare eventuale. Aceasta explică de ce un aparat atât de rafinat ca cel imaginat de Teitelbaum are dreptul la existență.

Grupa de vibrații a Institutului de Metalurgie și Mecanică Aplicată al Academiei R.P.R. nu are deocamdată obiective atât de importante.

Ea va căuta să satisfacă cerințele din domeniul vibrațiilor, ale tehnicii noastre în desvoltare, folosind cât mai mult analogiile electrice, cu aparaturi mai puțin complicate, compensând simplitatea utilajului prin calcule analitice, până când probleme de anvergură mai mare îi vor permite să pășească la construirea de aparate special adaptate temelor.

ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Нижеизложенные общие соображения преследуют цель выявить интерес, который представляет изучение колеблющихся механических систем путем изучения электрических аналогов, как вычислением, так и опытным путем, для того чтобы установить и предусмотреть их режим колебания.

Для этого сначала показывают, что колебательная электрическая цепь, соответствующая по аналогии механическим колебательным системам, имеющим финитное число степени свободы, зависит от известного числа произвольных параметров, которые можно выбрать таким образом, чтобы опыт помещался в рамках располагаемой аппаратуры.

Затем, при помощи простого примера эластичного колеблющегося по длине стержня, показывают, что даже непрерывные системы (с безконечностью степени свободы) могут изучаться по электрической аналогии, просто переходя от уравнения с частными производными к уравнению с финитными разностями, что дает в качестве электрического эквивалента фильтры в цепи, с тем большим количеством звеньев, чем дальше будет проведено дробление механической системы.

В конце дают общее описание интересного приспособления, изобретенного советским исследователем Тейтельбаумом для изучения экспериментальным путем коленчатого вала двигателя.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES CONCERNANT LA RECHERCHE AU SUJET DES VIBRATIONS MÉCANIQUES À L'AIDE DES ANALOGIES ÉLECTRIQUES

(RÉSUMÉ)

Les considérations générales ci-dessous se proposent de mettre en évidence l'intérêt présenté à l'étude des systèmes mécaniques oscillants par l'étude des analogies électriques, par le calcul aussi bien que par l'expérience, pour établir et prévoir leur régime d'oscillations.

Dans ce but, on montre d'abord que les circuits électriques oscillants, qui correspondent par analogie, aux systèmes oscillants mécaniques ayant un nombre fini de degrés de liberté, dépendent d'un certain nombre de paramètres arbitraires qui peuvent être choisis de manière que l'expérience puisse être placée dans le cadre de l'appareillage disponible.

Puis, à l'aide de l'exemple simple de la barre élastique vibrant en longueur, on montre que même les systèmes continus (à une infinité de degrés de liberté) peuvent être étudiés par analogie électrique, en passant simplement de l'équation aux dérivées partielles à une équation à différences finies, ce qui donne, pour équivalents électriques, des filtres en chaîne, à mailles d'autant plus nombreuses que le fractionnement du système mécanique aura été poussé plus loin.

A la fin, on donne une description sommaire du dispositif ingénieux imaginé par le chercheur soviétique T e i t e l b a u m pour étudier, par voie expérimentale, les arbres coudés.

BIBLIOGRAFIE

1. Maşinostroenia (Ghid enciclopedic), Cap. Vibraţii mecanice, Moscova, 1948, v. I, p. 2.
2. Dinamica i procinosti colenciatîh valov (Dinamica şi rezistenţa arborilor cotiţi), v 1, Moscova-Leningrad, 1948, Ed. Acad. de Ştiinţe U.R.S.S.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

DESPRE FLAMBAJUL TIJELOR SUB ACŢIUNEA UNEI COMPRESIUNI DATE DE O PARTE DIN GREUTATEA PROPRIE

DE

N. S. PÂRVULESCU

A. DETERMINĂRI TEORETICE

Considerăm o tijă verticală, de secţiune circulară şi constantă de-a-lungul său, cu capătul de jos în originea axelor rectangulare de referinţă şi în ipoteza simplificatoare că săgeţile (deplasările laterale) sunt mici în comparaţie cu lungimea tijei (fig. 1).

In lucrări anterioare [1], [2] şi [3] am determinat următoarea ecuaţie a fibrei medie deformate:

$$A\frac{d^3y}{dx^3} = (x-h)\frac{dy}{dx} + C \tag{1}$$

care se poate pune şi sub forma:

$$A\frac{d^4y}{dx^4} = (x-h)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}, \tag{1'}$$

în care

$$A = EI/q \tag{2}$$

EI rigiditatea tijei
q greutatea aparentă a unei unităţi de lungime din tijă
h lungimea comprimată a tijei ($h = -h'$)
x depărtarea unui element de tijă de origine O
y săgeata axei deformate elastic a tijei la depărtarea x de originea O.

Dacă facem schimbările de variabile

$$(h'+x)/A^{1/3} = \zeta \quad \text{şi} \quad y^{(1)} = \eta$$

relaţia (1) capătă următoarea înfăţişare mai simplă

$$\eta^{(2)} = \zeta\eta + C \tag{1''}$$

Am integrat [1], [2], [3] ecuațiile (1), (1′) sau (1″) cu ajutorul seriilor de puteri întregi, obținând expresia:

$$y^{(i)} = \sum_{j=0}^{2} j!\ a_j \varphi_j^{(i)}(x) + \frac{C}{A}\varphi_3^{(i)}(x) \tag{3}$$

valabilă pentru $j \geqslant 1$, și $\varphi_0(x) = 1$, care se poate pune sub forma:

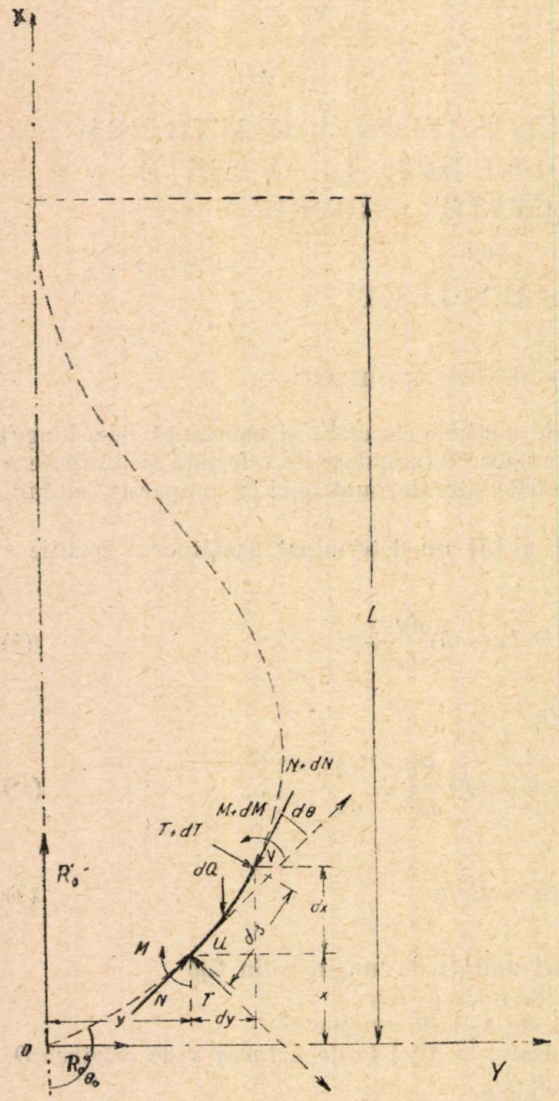


Fig. 1

$$y^{(i)} = \sum_{j=2}^{3} j!\ a_j \varphi_j^{(i)}(x) + \frac{a_1}{A}\varphi_4^{(i)}(x) \tag{3'_i}$$

valabilă pentru $i \geqslant 2$; iar pentru $i < 2$ avem

$$y^{(1)} = \sum_{j=2}^{3} j!\ a_j \varphi_j^{(1)}(x) + a_1\left[1 + \frac{1}{A}\varphi_4^{(1)}(x)\right] \tag{3'_1}$$

$$y = a_0 + \sum_{j=2}^{3} j!\ a_j \varphi_j(x) + a_1\left[x + \frac{1}{A}\varphi_4(x)\right] \tag{3'_0}$$

$$\varphi_j^{(i)}(x) = x^{j-i}\,\Xi_j^{(i)}(x) \tag{4}$$

în care $\Xi_j^{(i)}$ nu mai înseamnă derivată de ordinul i ci este definit de relația

$$\Xi_j^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{t} z^{(k)}(x) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{\,k-u} \frac{N_j^{k,\,k-u}}{(j+2k+u-i)!} \tag{5}$$

pentru $t \to \infty$ în care

$$z(x) = x^3/A = qx^3/EI \tag{6}$$

$$\alpha'(x) = h'/x = -\alpha(x) = -h/x \tag{7}$$

$$N_j^{k,\,k-u} = N_j^{k-1,\,k-u+1} + N_j^{k-1,\,k-u}(j + 2k + u - 3) \tag{8}$$

valabil pentru $u \geqslant 1$ și $k - u \geqslant 1$.

Pentru $u = 0$ avem

$$N_j^{k,\,k-1} = 1$$

iar pentru $k - u = 0$ avem

$$N_j^{k,\,0} = [j + 3\,(k-1)]\;!!!$$

Putem trece dela expresia (3) la (3') servindu-ne de relaţia

$$\Xi_1(x) = 1 + z(x)\,[\Xi_4(x) + \alpha'(x)\,\Xi_3(x)] \tag{9}$$

Să punem [2] condiţiile la capete pentru cazul articulării la capătul de jos (numai comprimat) şi încastrării la celălalt capăt, fără deplasare laterală. Acesta este cazul cel mai apropiat de realitate în problema flambajului prăjinilor de foraj, caz care a fost verificat experimental 1].

Luând originea axelor de referinţă în capătul de jos, $a_0 = 0$.

Se ştie [2] că expresia momentului de încovoiere este

$$M = -\,EI\,y^{(2)} \tag{10}$$

şi deci, în cazul articulării la capătul de jos

$$x = 0,\; M_0 = 0 \quad \text{şi deci} \quad a_2 = 0.$$

In aceste condiţii relaţia (3) devine

$$y^{(i)} = a_1\,\varphi_1^{(i)}(x) + \frac{C}{A}\,\varphi_3^{(i)}(x) \tag{11}$$

Considerând capătul de sus încastrat, pentru $x = L$ avem săgeata şi tangenta nule: $y = 0$ şi $y^{(1)} = 0$ şi deci,

$$\begin{aligned} a_1\,\varphi_1(L) + \frac{C}{A}\,\varphi_3(L) &= 0 \\ a_1\,\varphi_1^{(1)}(L) + \frac{C}{A}\,\varphi_3^{(1)}(L) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Pentru $a_1 \neq 0$ eliminând pe C/A, obţinem

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(L) & \varphi_3^{(1)} \\ \varphi_1^{(1)}(L) & \varphi_3^{(1)}(L) \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

şi ţinând seama de relaţia (4)

$$\boxed{\Xi_1(L)\,\Xi_3^{(1)}(L) - \Xi_1^{(1)}(L)\,\Xi_3(L) = 0} \qquad (14_{1,3}^{0,1})$$

Procedând în mod analog şi în celelalte cazuri de instabilitate [2], ajungem la relaţia

$$\Xi_j^{(i)}(L)\,\Xi_{j'}^{(i')}(L) - \Xi_j^{(i')}(L)\,\Xi_{j'}^{(i)}(L) = 0, \qquad (14_{j,j'}^{i,i'})$$

care reprezintă condiţia de instabilitate a cazului general şi în care

$j = 1$ pentru articulaţie jos
$j = 2$ pentru încastrare jos
$j' = 3$ în toate cazurile

fără deplasare laterală

$i = 1$ pentru încastrare sus
$i = 2$ pentru articulaţie sus
} $i' = 0$

cu deplasare laterală

$i = 1$ pentru încastrare sus
$i = 2$ pentru articulaţie sus
} $i' = 3$

Insemnând simbolic cazul general cu expresia $C_{j,\,j'}^{i,\,i'}$ ne putem folosi de tabloul Nr. 1 (fig. 2 — 9).

TABLOUL Nr. 1

fără depl. lat.		cu depl. lat.		Condiţiile la capete
simbol	fig.	simbol	fig.	
$C_{1,3}^{1,0}$	2	$C_{1,3}^{1,3}$	6	articulat jos — încastrat sus
$C_{1,3}^{2,0}$	3	$C_{1,3}^{2,3}$	7	ambele capete articulate
$C_{2,3}^{0,1}$	4	$C_{2,3}^{1,3}$	8	ambele capete încastrate
$C_{2,3}^{2,0}$	5	$C_{2,3}^{2,3}$	9	încastrat jos — articulat sus

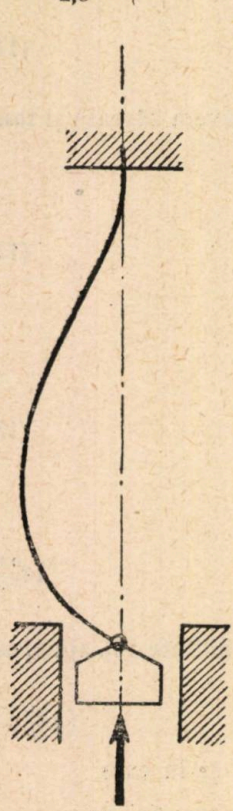


Fig. 2

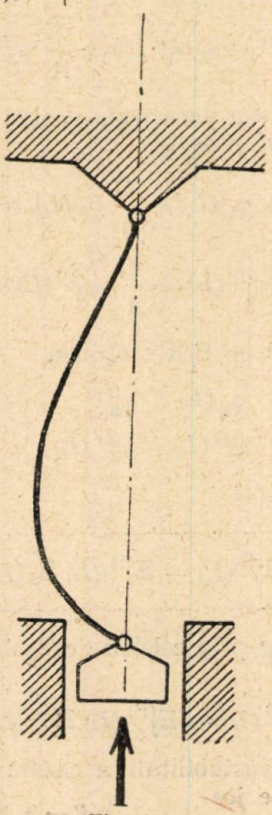


Fig. 3

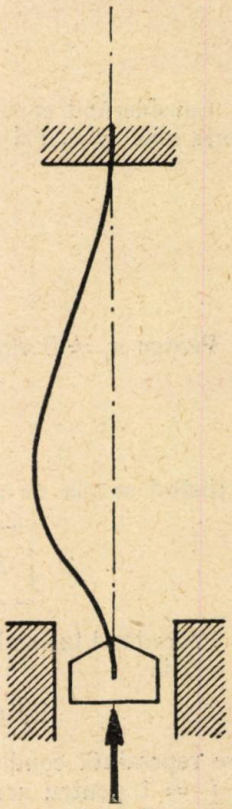


Fig. 4

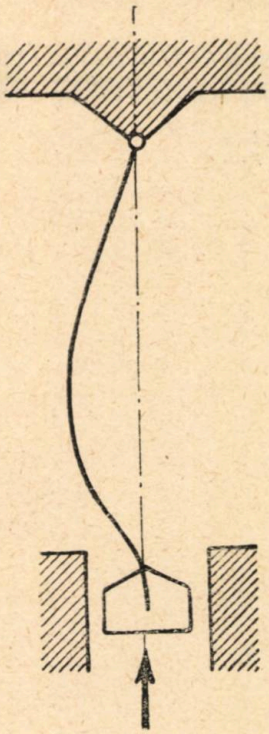


Fig. 5

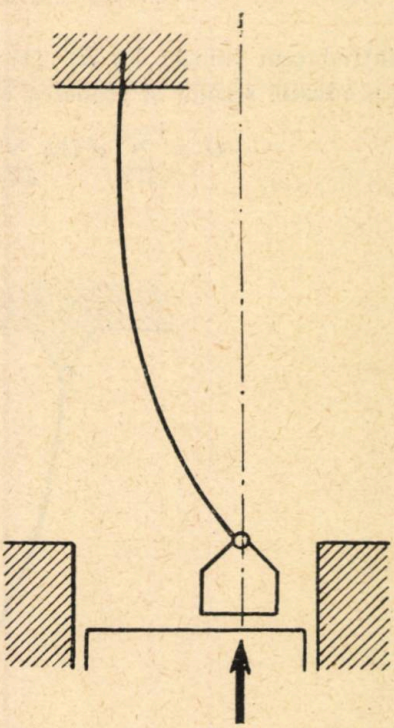


Fig. 6

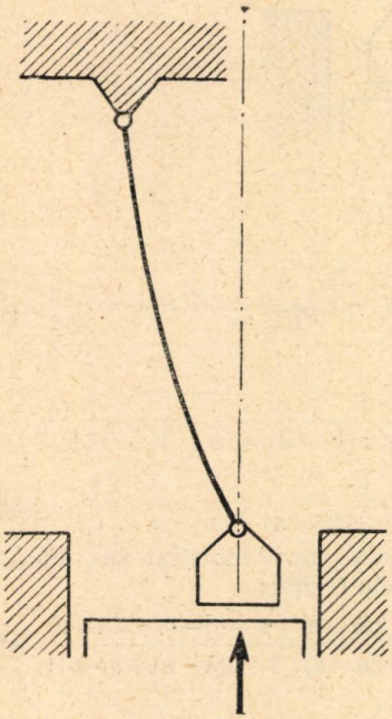


Fig. 7

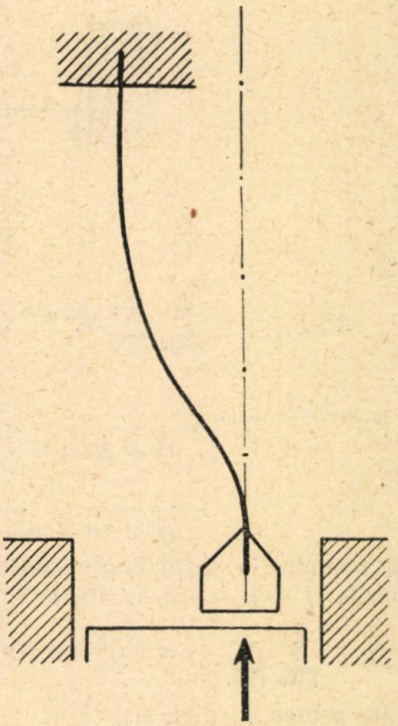


Fig. 8

Să introducem valorile lui $\Xi_j^{(i)}(x)$ din (5) pentru $x = L$ în relația $(14_{j,j'}^{i,i'})$. Făcând produsele seriilor și scăderea corespunzătoare, relația $(14_{j,j'}^{j,i'})$ devine:

$$O = \sum_{k=0}^{t\to\infty} z^k(L) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{k-u}(L)\, M_{j,j',i,i'}^{k,k-u} \tag{15}$$

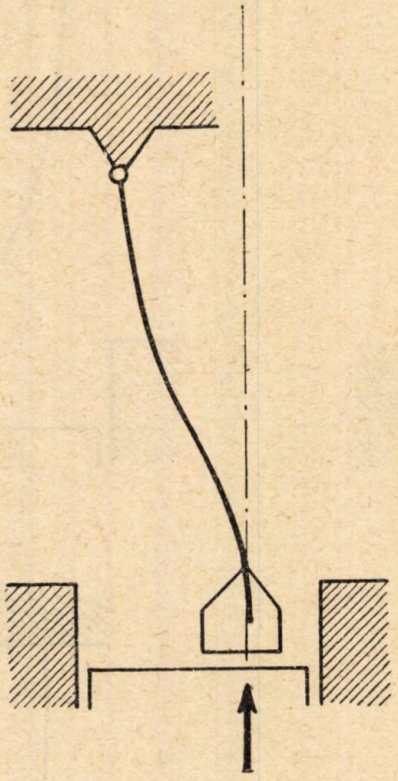


Fig. 9

în care

$$M_{j,j',i,i'}^{k,k-u} = \sum_{n=0}^{k} \sum_{v=0}^{n} N_j^{n,n-v} N_{j'}^{k-n,k-u-n+v} P_{j,j',i,i'}^{n,n-v;k-n,k-u-n+v} \tag{16}$$

și

$$P_{j,j',i,i'}^{n,n-v;k-n,k-u-n+v} = \frac{1}{(j+2n+v-i)!\,[j'+2(k-n)+u-v-i']!} - \frac{1}{(j+2n+v-i')!\,[j'+2(k-n)+u-v-i]!} \tag{17}$$

Să revenim la cazul experimentat, articulat jos — încastrat sus. Făcând înlocuirile: $j = 1$, $j' = 3$, $i = 1$, $i' = 0$, obținem relația:

$$M_{1,3;1,0}^{k,k-u} = \sum_{n=0}^{k} \sum_{v=0}^{n} N_1^{n,n-v} N_3^{k-n,k-u-n+v} \frac{[3+2(k-n)+u-v]-(1+2n+v)}{(1+2n+v)!\,3+2(k-n)+u-v]!} \tag{18}$$

valabilă pentru k, u, n și $v \geqslant 0$.

Desvoltând calculele, obținem:

$$0 = N_1^{0,0} N_3^{0,0} \frac{3-1}{1!3!} + z(L)\left\{\alpha'(L) N_1^{0,0} N_3^{1,1} \frac{5-1}{1!5!} + \left[N_1^{0,0} N_3^{1,0} \frac{6-1}{1!6!} + N_1^{1,0} N_3^{0,0} \frac{3-4}{4!3!}\right]\right\}$$

$$+ z^2(L)\left\{\begin{array}{l} \alpha'^2(L)\left[N_1^{0,0} N_3^{2,2} \frac{7-1}{1!7!} + (N_1^{1,1} N_3^{1,1} - N_1^{2,2} N_3^{0,0}) \frac{5-3}{3!5!}\right] \\ + \alpha'(L)\left[N_1^{0,0} N_3^{2,1} \frac{8-1}{1!8!} + (N_1^{1,1} N_3^{1,0} - N_1^{2,1} N_3^{0,0}) \frac{6-3}{3!6!} + N_1^{1,0} N_3^{1,1} \frac{5-4}{4!5!}\right] \\ + N_1^{0,0} N_3^{2,0} \frac{9-1}{1!9!} - N_1^{2,0} N_3^{0,0} \frac{7-3}{3!7!} + N_1^{1,0} N_3^{1,0} \frac{6-4}{4!6!} \end{array}\right\} \quad (19)$$

$+ \cdots$

Inlocuind valorile N calculate cu ajutorul formulei (8) de recurență (se pot folosi tabelele din [2]), obținem:

$$0 = \frac{2}{1!3!} + z(L)\left\{\alpha'(L) \frac{4}{1!5!} + \frac{3 \cdot 5}{1!6!} - \frac{1}{3!4!}\right\}$$

$$+ z^2(L)\left\{\alpha'^2(L) \frac{6}{1!7!} + \alpha'(L)\left[\frac{8\,7}{1!8!} - \frac{3}{3!6!} + \frac{1}{4!5!}\right] + \frac{18 \cdot 8}{1!9!} - \frac{4.4}{3!7!} + \frac{3.2}{4!6!}\right\} \quad (20)$$

$$+ z^3(L)\left\{\begin{array}{l} \alpha'^3(L) \frac{8}{1!9!} + \alpha'^2(L)\left[\frac{15 \cdot 9}{1!10!} - \frac{5}{3!8!} + \frac{3}{4!7!} - \frac{1}{5!6!}\right] \\ + \alpha'(L)\left[\frac{82 \cdot 10}{1!11!} - \frac{10 \cdot 6}{3!9!} + \frac{8 \cdot 4}{4!8!} - \frac{4 \cdot 2}{5!7!}\right] + \frac{162 \cdot 11}{1!12!} - \frac{28 \cdot 7}{3!10!} + \frac{18 \cdot 5}{4!9!} - \frac{12}{6!7!} \end{array}\right\}$$

$+ \cdots$

Introducând valorile factorialelor și efectuând calculul, se ajunge în cele din urmă la relația:

$$0 = 1 - \frac{z(L)}{100}\left\{\begin{array}{r} \alpha(L)\ 10{,}000\ 0 \\ -\ 4{,}166\ 7 \end{array}\right\} + \left[\frac{z(L)}{100}\right]^2\left\{\begin{array}{r} \alpha^2(L)\ 35{,}714 \\ -\ \alpha(L)\ 31{,}250 \\ +\ 6{,}448 \end{array}\right\} - \left[\frac{z(L)}{100}\right]^3\left\{\begin{array}{r} \alpha^3(L)\ 66{,}138 \\ -\alpha^2(L) 89{,}286 \\ +\alpha(L)\ 38{,}480 \\ -\ 5{,}236 \end{array}\right\}$$

$$+ \left[\frac{z(L)}{100}\right]^4\left\{\begin{array}{r} \alpha^4(L)\ \ 75{,}156 \\ -\ \alpha^3(L)\ 137{,}787 \\ +\ \alpha^2(L)\ \ 91{,}537 \\ -\ \alpha\ (L)\ \ 25{,}947 \\ +\ 2{,}622 \end{array}\right\} - \left[\frac{z\,(L)}{100}\right]^5\left\{\begin{array}{r} \alpha^5(L)\ \ 57{,}813 \\ -\ \alpha^4(L)\ 134{,}208 \\ +\ \alpha^3(L)\ 121{,}131 \\ -\ \alpha^2(L)\ \ 52{,}909 \\ +\ \alpha\ (L)\ \ 11{,}117 \\ -\ 0{,}891 \end{array}\right\} + \cdots \quad (21)$$

în care, din relațiile (6) și (7) pentru $x = L$, avem:

$$Z(L) = qL^3/EI \quad (6')$$

și

$$(L) = h/L \quad (7')$$

Prin urmare, pentru anumite valori $\alpha\ (L)$ ale raportului lungimii comprimate către lungimea tijei se pot obține valorile lui $Z\ (L)$, și prin urmare a lungimii critice de flambaj.

Ceea ce ne interesează practic este lungimea comprimată critică pe care o deducem din relațiile (6') și (7')

$$h = \alpha\ (L) \sqrt[3]{z\ (L)\ EI/q} \tag{22}$$

care se poate pune sub forma

$$h = c \sqrt[3]{EI/q} \tag{23}$$

în care c este un coeficient de flambaj, dat de relația

$$c = \alpha\ (L) \sqrt[3]{Z\ (L)} \tag{24}$$

Inlocuind valoarea lui $Z\ (L)$ din (24) în (21), obținem o relație care exprimă valoarea coeficientului de flambaj c în funcție de raportul h/L al lungimii comprimate către lungimea tijei.

Deoarece membrul al doilea al relației (21) este o serie infinită de puteri întregi, valoarea coeficientului de flambaj c va putea fi calculată în n^a, aproximație mărginind seria la $n + 1$ termeni.

Se observă că evaluarea lui c reclamă rezolvarea unei ecuații al cărei grad este egal cu gradul de aproximație.

In tabloul Nr. 2 sunt date valorile coeficientului c calculate pentru diferite valori ale raportului h/L cu diferite grade de aproximație.

TABLOUL Nr. 2

Valorile calculate ale coeficientului de flambaj c

Aproximația	$\frac{h}{L}$	2	1,5	1	$\frac{1}{1,5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2,4}$	$\frac{1}{2,5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{4}$
1°		3,70	3,15	2,65	2,39	2,47	∞				
3°		4,41		3,04		2,30			2,26		
5°		4,50		3,12	2,55	2,30		2,18	2,09		2,31

In diagrama IV din figura 17 sunt trasate valorile coeficientului de flambaj c, în funcție de raportul h/L, calculate în diferite grade de aproximație. Astfel, curba 1 reprezintă valorile lui c într'o primă aproximație, curba 3 în a 3-a aproximație și curba 5 în a 5-a aproximație.

Din examinarea diagramei se observă că valorile lui c astfel calculate sunt valabile numai pentru ramurile din stânga ale curbelor, pentru ca dela o anumită valoare a raportului h/L să-și piardă valabilitatea. Prin mărirea gradului de aproximație nu numai că se mărește aproximația pe intervalul valabil, dar chiar — ceea ce este mai important — se mărește intervalul valabil al valorilor astfel calculate. Astfel, curba 1 este valabilă într'o primă aproximație până la valoarea lui $h/L = 5/8 = 1/1,6$, curba 2 în aproximația respectivă până la $h/L = 5/13 = 1/2,6$, iar curba 3 până la $h/L = 4/13 = 1/3,25$.

Pe diagramă se observă că pe intervalul valabil aproximația se mărește apreciabil dela prima aproximație (curba 1) la a treia (curba 3) și abia sensibil dela aceasta la a 5-a aproximație (curba 5) astfel încât este de presupus că, dela această aproximație în sus, diferențele încep să devină insensibile.

Punctele încercuite reprezintă valorile lui c obținute [1] experimental prin încercări care vor fi descrise în mod amănunțit în cele ce urmează.

B. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

Date tehnice

Am amintit [1], [2] că această problemă își are domeniul de aplicație în forajul sondelor și, prin urmare, avem de considerat datele tehnice ale prăjinilor de foraj, care sunt trecute în tablourile Nr. 3 și 4.

Neglijând racordurile prăjinilor, am însemnat cu D diametrul exterior al prăjinilor și cu d diametrul interior al prăjinilor.

S'a considerat:

greutatea specifică a oțelului $\gamma = 7{,}85$ kg/dm^3

greutatea specifică a noroiului $\gamma' = 1{,}15$ kg/dm^3

modulul de elasticitate $E = 2{,}15 \times 10^8$kg/dm^2

TABLOUL Nr. 3

Prăjini de sapă

Diam. nomin.	D dm	d dm	q kg/m	EI/q m^2
2'' 7/8	0,730	0,546	12,6	1663
4'' 1/2	1,143	0,972	19,0	4502
6'' 5/8	1,683	1,463	33,6	9945

TABLOUL Nr. 4

Prăjini grele

Diam. nomin.	D dm	d dm	q kg/m	EI/q m^2
2'' 7/8	0,953	0,318	42,5	2022
4'' 1/2	1,397	0,572	85,5	4554
6'' 5/8	1,969	0,889	162,0	9820
8'' 5/8	2,545	1,143	267,0	15550

Similitudinea modelelor

Din relațiile (7') și (23) obținem:

$$L = \frac{C}{\alpha(L)} \sqrt[3]{EI/q} \tag{25}$$

Pentru ca două tije diferite să fie similare, trebue ca pentru același $\alpha(L)$ să avem același c, și prin urmare

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{E_1 I_1/q_1}{E_2 I_2/q_2}} \tag{26}$$

în care indicii 1 și 2 se referă respectiv la cele două tije.

Pentru a reproduce o garnitură de prăjini de foraj lungă de 300 m, printr'un model de sârmă de oțel, fie de 0,5 mm diametru, în același raport de similitudine ne-ar trebui o sârmă dreaptă lungă de cca 6 m, după cum rezultă din relația (26) cu datele din tabloul Nr. 3 și luând pentru model $EI/q = 0{,}0428$ m^3.

Deoarece nu am putut obține sârme drepte cu astfel de subțirimi, am folosit modele confecționate din sârme de oțel de grosime între 0,5 — 1,5 mm, răsucite ca resorturile în elice pe vergele drepte, groase de 4 — 6 mm [1], [4]. Cu acest procedeu am obținut modele a căror rigiditate (EI) este considerabil redusă, ceea ce ne-a permis să reproducem modele la o scară deformată, cu lungimile mult reduse față de diametre. Determinarea rigidității se va arăta în paragraful următor.

In tabloul Nr. 5 sunt trecute caracteristicile modelelor folosite.

Modelul Nr. 1, în lungime de 2,80 m, este similar unei garnituri de prăjini de foraj de 4''1/2 lungă de cca 480 m. O sârmă dreaptă de aceeași grosime ar necesita o lungime de cca 10 m pentru a avea același coeficient de similitudine.

Chiar dacă am fi putut obține asemenea sârme drepte, nu ar fi fost ușor de manipulat cu ele în laborator din cauza lungimii lor excesive; iar sârme mai subțiri de 0,5 mm cer balanțe prea sensibile pentru cântărit reacția din capătul de jos.

Rigiditatea modelelor

Determinarea rigidității la încovoiere a acestor modele am făcut-o și pe cale experimentală, ceea ce poate să constitue o verificare a determinării teoretice.

Fie modelul de bară din resort helicoidal simplu rezemat pe două reazeme A și B la distanța λ și uniform încărcate cu sarcina q_r greutatea modelului pe unitatea de lungime (fig. 10).

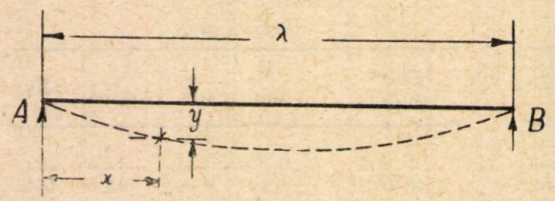


Fig. 10

Săgeata maximă f_m, la mijlocul grinzii produsă de momentul de încovoiere este dată de relația:

$$f_m = \frac{5 q_r \lambda^4}{384 \beta} \qquad (27)$$

în care β este rigiditatea la încovoiere a resortului, echivalentă cu expresia EI a unei bare obișnuite.

Expresia β/q_r care caracterizează modelul și intră în formulele de flambaj este în acest caz:

$$\frac{\beta}{q_r} = \frac{5\lambda^4}{384 f_m} \qquad (27')$$

Prin urmare, este suficient să măsurăm lungimea și săgeata maximă pentru a determina rigiditatea la încovoiere, metodă folosită în problema menționată.

Modelele nefiind perfect drepte au o săgeată permanentă. Pentru a elimina din săgeata aparentă deformarea permanentă, am făcut câte două determinări pentru fiecare model: una în poziție stabilă, iar cealaltă rotită la 180°, în poziție labilă și am considerat drept săgeată sub sarcină, săgeata care intră în calcul, media celor două determinări.

Să comparăm rezultatele experiențelor cu determinările teoretice.

Expresia rigidității la încovoiere β a resortului helicoidal de secțiune circulară cu spire nestrânse este dat de [5] (fig. 11) relația:

$$\beta = \frac{\sin \alpha}{\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2EI} + \frac{\cos^2 \alpha}{2GI_p}} \qquad (28)$$

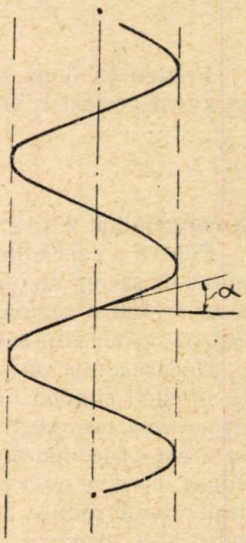


Fig. 11

în care α unghiul spirelor cu planul perpendicular pe axa elicei;

E, G modulele de elasticitate a sârmei la tracţiune-compresiune şi forfecare;

I, I_p momentele de inerţie a sârmei: în raport cu o axă şi polar.

Dacă d este mic, se poate admite cu o preciziune suficientă că:

$$\sin^2\alpha = 0 \quad \text{şi} \quad \cos^2\alpha = 1$$

De asemenea, ţinând seamă că $\sin\alpha = \lambda/s$ relaţia (28) devine:

$$\beta = \frac{2EI}{s} - \frac{1}{1 + \frac{E}{2G}} \tag{29}$$

în care l lungimea resortului;

s lungimea sârmei.

Intre E şi G existând relaţia $G = E/2\ (1 + \mu)$, formula (29) devine:

$$\beta = 2EI\lambda/s\ (2 + \mu), \tag{30}$$

în care μ coeficientul lui Poisson, pentru oţel $\mu = 0{,}3$.

Din consideraţii geometrice avem:

$$\frac{s}{\lambda} = \pi\Delta\gamma \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi\Delta\gamma}\right)^2} \tag{31}$$

în care δ diametrul sârmei;

Δ diametrul mediu al resortului ;

n_1 numărul de spire pe unitatea de lungime.

Pentru $1/\pi\Delta\gamma$ mic faţă de 1 avem $s/\lambda \approx \pi\Delta\gamma$ (31')

Având în vedere că $I = \pi\delta^4/64$, relaţia (30) devine:

$$\beta = \frac{2EI}{(2 + \mu)\,\pi\Delta\gamma} = \frac{E\delta^4}{32\Delta\gamma\,(2 + \mu)} \tag{32}$$

şi deoarece

$$q_r = \frac{\pi\delta^2\gamma s}{4\lambda} = \frac{\pi^2\delta^2}{4}\gamma\Delta\gamma \tag{33}$$

avem:

$$\frac{\beta}{q_r} = \frac{E}{8\pi^2\gamma\,(2 + \mu)}\left(\frac{\delta}{\gamma\Delta}\right)^2 \tag{34}$$

Formula (34) ne dă determinarea teoretică a rigidităţii la încovoiere, cunoscând caracteristicile modelului: datele geometrice δ, Δ, γ şi calităţile materialului E, γ, μ. Formula (27) ne dă determinarea experimentală a rigidităţii la încovoiere cunoscând efectele încovoierii, care se rezumă la două date: λ şi f_m, ceea ce justifică în lucrările anterioare preferinţa acestei căi.

Să examinăm şi influenţa forţei tăietoare.

Curbura datorită forfecării este dată [5'] (fig. 12) de relaţia:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi R^2 n q_r}{EI\lambda} = C, \tag{35}$$

în care R = raza elicei, $R = D/2$;

n = numărul de spire al resortului.

Integrând ecuaţia (35) şi punând condiţiile la limită: pentru $x = \lambda/2$; $dy/dx = 0$ şi pentru $x = 0$; $y = 0$ se obţine soluţia

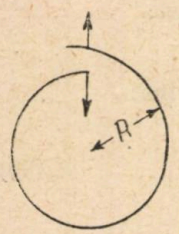


Fig. 12

$$y = C(\lambda - x)\, x/2 \tag{36}$$

Săgeata maximă f_1 se obţine pentru $x = \lambda/2$

$$f_1 = C\lambda^2/8 = \pi R^2 n q_r \lambda/8EI \tag{37}$$

Suprapunând efectele forţei tăietoare şi momentului de încovoiere, ţinând seama de (27) şi (28), săgeata totală f_t este

$$f_t = f_m + f_1 = f_m\left(1 + \frac{12\Delta^2}{5 \times 2{,}3\,\lambda}\right) \tag{38}$$

Pentru modelele experimentale termenul al 2-lea din paranteză reprezintă $\frac{1}{4} \div 3$ sutimi faţă de 1 şi, prin urmare, influenţa forţei tăietoare poate fi neglijată.

Ceea ce interesează în problema flambajului, la care am folosit aceste modele este expresia $(\beta/q_r)^{1/3}$. In tabloul Nr. 5, sunt trecute datele caracteristice ale modelelor şi rigiditatea la încovoiere determinate teoretic şi experimental:

TABLOUL Nr. 5

Nr.	δ mm	Δ mm	γ spire/dm	λ cm	f_m mm	$\sqrt{\beta/q_r}$ în cm	
						teoretic	experimentat
1	0,37	4,29	41	18	25	8,55	8,15
2	0,50	7,61	26	18	15½	9,65	9,60
3	0,76	4,38	35	24	13	15,10	14,95
4	0,76	7,86	24	27	27	13,20	13,65
5	1,17	7,87	17	42	37½	22,30	22,15
6	1,50	8,14	17	41	22	25,50	25,55
7	1,72	8,14	16	42	19	29,00	27,70

S'a considerat $E = 2 \times 10^6$ kg/cm² şi $\gamma = 7{,}85$ g/cm³.

Incercările de flambaj

Incercările le-am făcut încastrând modelul la capătul de sus în cleştele unui stativ, iar capătul de jos rezemat pe talerul unei balanţe sensibile, îl putem considera ca articulat şi deci fără deplasare laterală, pentrucă este împiedecat să alunece pe talerul balanţei (fig. 13). Aceste condiţii la capete sunt cele mai uşor realizabile. La capătul de sus, care suportă cea mai mare parte a greutăţii, numai încastrarea nu dă frecări; iar la capătul de jos numai articulaţia, dând frecări insensibile, permite deplasarea capătului pe verticală.

Printr'un fir cu plumb legat la capătul de sus s'a verificat ca cele două capete ale fiecărui model în încercare să se găsească pe aceeaşi verticală. Totodată firul cu plumb serveşte ca reper pentru măsurarea săgeţilor maxime.

Făcând să varieze săgeata maximă dela 0 până la o mărime considerabilă, am cântărit reacţiunea dela capătul de jos, obţinând o serie de valori. Făcând să varieze lungimea modelului, am obţinut o serie de astfel de serii de valori.

In tablourile Nr. 6 — 8 (cu variantele respective) am trecut valorile obținute prin încercările cu 3 modele diferite ca grosimea firului, ca diametrul vergelei pe care s'a înfășurat firul și ca număr de spire pe unitatea de lungime.

TABLOUL Nr. 6

MODEL Nr. 2 ($\delta = 0{,}5$ mm $\Delta = 7{,}61$ mm)

Varianta 1 $L = 26{,}55$ dm			Varianta 1_1 $L = 14{,}02$ dm			Varianta 1_2 $L = 9{,}5$ dm		
s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g
26,55	0	0	14,02	0	0	9,5	0	0
26,6	1,5	1,1	14,06	0,5	0,3	9,52	1	1
26,65	2	1,5	14,1	1	1,6	9,56	2	1,75
26,7	4	1,77	14,14	3	1,75	9,6	4	1,9
26,85	6	1,62	14,2	4,5	1,85	9,64	5	1,9
26,8	5,5	1,66	14,24	5,5	1,8	9,72	6	1,9
26,95	7	1,63	14,28	6,5	1,7	9,76	6,5	1,9
27,	8	1,86	14,3	7	1,7	9,82	8	1,9
27,1	9,5	1,6	14,34	8	1,7	9,9	9	1,8
27,3	11,5	1,59	14,48	9	1,7	10	10,5	1,8

Varianta 1_4 $L = 7{,}5$ dm			Varianta 1_5 $L = 6{,}1$ dm			Varianta 1_6 $L = 5{,}04$ dm		
s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g
7,5	0	0	6,10	0	0	5,04	0	0
7,55	1,5	1,4	6,18	2	2,25	5,08	1,5	1,6
7,6	2,5	1,8	6,22	3	2,33	5,12	2,5	2
7,65	3,5	1,7	6,26	4	2,7	5,16	3,5	2,3
7,65	4,5	1,95	6,28	5	2,11	5,20	4,5	2,2
7,70	5,5	2,1	6,38	6	2,09	5,24	5	2,2
7,75	6	2,12	6,44	7	2,04	5,28	5,5	2,2
7,8	7	2,05	6,52	8	2,03	5,36	7	2,1
7,9	8	2,05	6,56	9	2,02	5,52	8,5	2,05
8	9	2,02	6,75	10	1,96	5,76	10,5	2

Varianta 1_7 $L = 4{,}3$ dm			Varianta 1_8 $L = 3{,}26$ dm			Varianta 1_9 $L = 2{,}6$ dm		
s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g
4,30	0	0	3,26	0	0	2,6	0	0
4,34	1	1,6	3,30	1	2,4	2,64	1,5	0,5
4,38	1,5	1,87	3,34	2,5	2,6	2,68	1	2,35
4,42	2,5	2,15	3,38	3,5	2,6	2,72	2	3,20
4,46	3,5	2,30	3,46	4,5	2,6	2,76	3	3,42
4,50	4,5	2,40	3,50	5,5	2,54	2,80	3,5	3,56
4,54	5	2,43	3,58	6	2,44	2,84	4,5	3,40
4,58	6	2,42	3,74	7	2,38	2,88	5	3,31
4,66	7	2,27	3,86	8	2,30	3,04	6	3,11
4,82	8,5	2,18				3,28	7,5	2,90

TABLOUL Nr. 7

MODEL Nr. 3 ($\delta = 0{,}76$ mm $\Delta = 4{,}38$ mm)

Varianta 2_0 $L = 17{,}43$ dm			Varianta 2_1 $L = 14{,}36$ dm			Varianta 2_2 $L = 12{,}03$ dm		
s dm	f cm	R'_0 g	s dm	f cm	R'_0 g	s dm	f cm	R'_0 g
17,43	0	0	14,36	0	0	12,03	0	0
17,46	1	2	14,39	1,5	2,9	12,06	2,8	4,1
17,52	3	4,55	14,42	3,5	4,55	12,09	4	4,5
17,58	5	5,15	14,45	4	4,85	12,15	6	5,2
17,61	6	5,20	14,48	5	5,34	12,21	7	
17,63	7	5,12	14,51	6	5,39	12,24		5,29
17,68	8	5,04	14,54	6,5	5,31	12,40	10	5,39
17,83	10	5,05				12,70	13	5,22
17,95	12,5	5,12				12,95	15,5	5,04
18,10	15	5,02						

Varianta 2_3 $L = 10{,}9$ dm			Varianta 2_4 $L = 8{,}8$ dm			Varianta 2_6 $L = 7{,}07$ dm		
s dm	f cm	R'_0 g	s dm	f cm	R'_0 g	s dm	f cm	R'_0 g
10,90	0	0	8,8	0	0	7,07	0	0
10,93	1,5	3	8,86	1,5	4	7,10	1,5	4,5
10,99	4	4,6	8,92	3,5	4,45	7,16	3,5	5,5
11,05	5	4,95	8,98	6	5,72	7,21	5	6,22
11,11	7	5,45	9,10	8	5,73	7,24	6	6,23
11,17	9	5,48	9,13	8,5	5,76	7,27	6,5	6,24
11,21	9	5,45	9,16	9	5,70	7,30	7	6,24
11,24	9,5	5,45	9,22	10	5,69	7,39	8	6,21
			9,40	12	5,66	7,50	10,5	6,08
			9,7	14	5,61	7,65	12	6,04

Varianta 2_7 $L = 5{,}03$ dm			Varianta 2_8 $L = 4{,}27$ dm			Varianta 2_9 $L = 3{,}43$ dm		
s dm	f cm	R'_0 g	s dm	f cm	R'_0 g	s dm	f cm	R'_0 g
5,03	0	0	4,27	0	0	3,43	0	0
5,06	1,5	5,9	4,30	1,5	6,8	3,49	2,2	11
5,09	2,5	6,8	4,33	2,5	7,6	3,52	3	11,6
5,15	4	7,6	4,36	3,2	8,0	3,55	3,5	11,75
5,18	4,5	7,72	4,39	4	8,9	3,51	4	11,80
5,21	5,2	7,7	4,42	4,5	9,32	3,61	4,5	11,61
5,24	6	7,68	4,45	5	9,25	3,70	6	11,45
5,45	8	7,52	4,51	6	9,09	3,85	7	11,01
5,60	9,5	7,40	4,60	7	9,02	4	8	10,57
			4,90	10	8,53			

TABLOUL Nr. 8

MODEL Nr. 6 ($\delta = 1{,}5$ dm $\Delta = 8{,}14$ dm)

Varianta 3_0 $L = 20{,}1$ dm			Varianta 3_1 $L = 14{,}9$ dm			Varianta 3_2 $L = 10{,}7$ dm		
s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g
20,1	0	0	14,9	0	0	10,7	0	0
20,15	5	25	14,95	2	16	10,75	3	25
20,25	9	27,4	15,05	5	26	10,8	4,5	30
20,35	11,5	28,5	15,2	8	27,3	10,85	6	31,5
20,45	12,5	29,2	15,3	11	29,5	10,95	8	32,6
20,5	13,5	29,1	15,45	13,5	30,35	11,0	10	33
20,6	16,5	28,85	15,5	14,5	30,1	11,1	11,5	33,5
20,7	18	28,65	15,6	16,5	30,2	11,15	12,5	32,7
20,95	20,5	28,75	15,75	18,5	30,3	11,2	13	33
21,25	23	28,85	16,2	21	30,1	11,3	14	33,2
21,5	25,5	28,35	16,4	24	30,0	11,4	15	33,25

Varianta 3_3 $L = 10{,}1$ dm			Varianta 3_4 $L = 9$ dm			Varianta 3_5 $L = 7{,}9$ dm		
s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g
10,1	0	0	9	0	0	7,9	0	0
10,15	2	20	9,05	3	15	8	3,5	33,5
10,2	5	30	9,1	4,5	34	8,1	6	39,0
10,3	8	33,35	9,2	8	37,8	8,25	8	41,3
10,35	9	34,6	9,25	9	38	8,5	8,5	43,2
10,4	9,5	34,0	9,35	9,5	37,8	8,4	9,5	44,4
10,55	12	33,85	9,55	11,5	37,05	8,45	10	43,3
10,65	13	33,6	9,75	13	36,85	8,65	12	41,2
10,75	14	33,3	9,9	16	36,6	8,9	14	40,85
10,85	15	33,55	10	17,5	36,25	9,1	16	39,3
10,95	16	33,25	10,4	20	35,8	9,2	18	38,7
11,05	17	32,95	10,6	22	35,6	9,4	20,5	37,9
11,2	18	32,65	10,8	24	34,8	9,6	22	36,8

Varianta 3_6 $L = 7{,}35$ dm			Varianta 3_8 $L = 67{,}5$ dm			Varianta 3_9 $L = 57$ dm		
s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g	s dm	f cm	R_0' g
7,35	0	0	6,75	0	0	5,7	0	0
7,4	1	25	6,8	1,5	37	5,75	3	53
7,45	4,5	41	6,85	3	44	5,8	5	69,5
7,5	5,5	41,5	6,9	4,5	47	5,85	6	68,9
7,55	6,5	45,7	6,95	6	49	5,95	8	66,1
7,6	7	45,5	7	7,5	61,2	6,15	11	66,1
7,65	8	47	7,05	8,5	61,6	6,25	12	63,7
7,75	8,5	45,7	7,15	9	60,5	6,35	12,5	61,6

Am însemnat (fig. 13):
L înălţimea suportului dela talerul balanţei;
s lungimea considerată a modelului;
f săgeata maximă;
R_0' componenta verticală a reacţiei capătului de jos pe talerul balanţei.

In diagramele I, II şi III, din figurile 14, 15, 16, sunt trecute valorile corespunzătoare tablourilor menţionate figurând în abscisă săgeţile maxime, iar în ordonată greutăţile cântărite la balanţă.

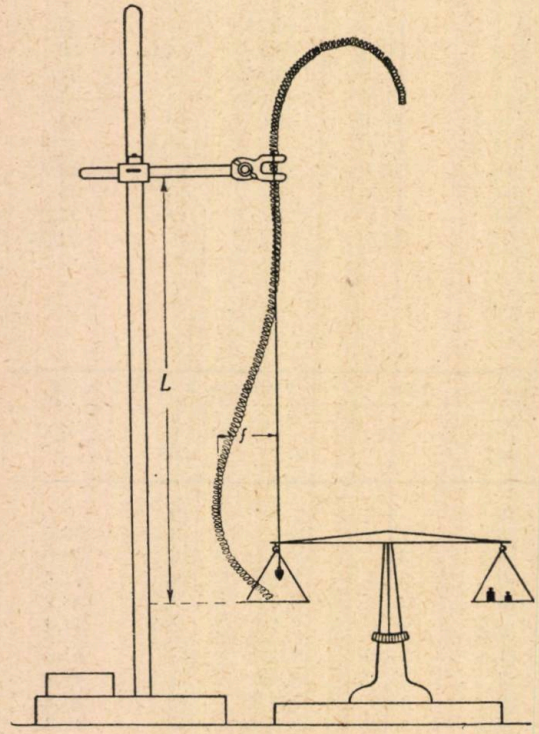


Fig. 13

Sublinierile corespund încercărilor de reacţie maximă (sarcina de flambaj).

Observăm că, odată cu creşterea săgeţii maxime, creşte şi greutatea comprimată până la un maxim, la care porneşte flambajul, pentru ca după aceea să descrească. Variaţia greutăţii comprimate este cu mult mai accentuată, cu cât modelul este mai scurt (h/L mai mare).

In tablourile Nr. 9, 10 şi 11 de încercări sunt trecute valorile maxime la care am considerat pornirea flambajului şi coeficientul de flambaj c corespunzător raportului h/L, respectiv reacţiilor maxime.

In diagrama IV, din figura 17, figurează valorile coeficientului c în ordonată în funcţie de raportul h/L trecut în abscisă.

TABLOUL Nr. 9

MODEL Nr. 2 $q_r = 1{,}075$ g/dm $\sqrt[3]{\beta/q_r} = 0{,}960$ dm

Varianta	L dm	R_0' g	h dm	L/h	c
1_0	26,55	1,77	1,645	16,15	1,706
1_1	14,02	1 85	1,725	8,14	1,786
1_2	9,5	1,9	1,765	5,38	1,83
1_3	8,15	1,95	1,815	4,49	1,878
1_4	7,5	2,12	1,975	3,79	2,045
1_5	6,1	2,33	2,17	2,81	2,25
1_6	5,04	2,3	2,14	2,35	2,215
1_7	4,3	2,43	2,26	1,9	2,34
1_8	3,26	2,6	2,42	1,345	2,51
1_9	2,6	3,56	3,81	0,795	3,43

TABLOUL Nr. 10

MODEL Nr. $3\ q_r = 1{,}865$ g/dm $\sqrt[3]{\beta/q_r} = 1{,}495$ dm

Varianta	L dm	R_0' g	h dm	L/h	c
2_0	17,43	5,2	2,787	6,25	1,863
2_1	14,36	5,39	2,89	4,95	1,936
2_2	12,03	5,45	2,98	4,12	1,958
2_3	10,9	5,48	2,94	3,71	1,94
2_4	8,8	5,76	3,09	2,955	2,07
2_5	7,95	5,91	3,17	2,51	2,125
2_6	7,07	6,24	3,35	2,17	2,24
2_7	5,03	7,72	4,13	1,24	2,77
2_8	4,27	9,32	5,00	0,854	3,35
2_9	3,43	11,8	6,39	0,537	4,28

TABLOUL Nr. 11

MODEL Nr. $6\ q_r = 6{,}25$ g/dm $\sqrt[3]{\beta/q_r} = 2{,}555$ dm

Varianta	L dm	R_0' g	h dm	L/h	c
3_0	20,1	29,2	4,67	4,38	1,87
3_1	14,9	30,35	4,85	3,035	1,94
3_2	10,7	33,5	5,35	2,00	2,14
3_3	10,1	34,6	5,54	1,825	2,215
3_4	9,0	38,0	6,07	1,48	2,43
3_5	7,9	44,4	7,10	1,11	2,86
3_6	7,35	47,0	7,53	0,975	3,02
3_7	6,45	54,9	8,80	0,738	3,52
3_8	6,75	61,6	9,86	0,685	3,90
3_9	5,7	69,5	11,13	0,512	4,46

CONCLUZIUNI

In diagrama IV din figura 17 sunt trecute atât rezultatele teoretice cât și cele experimentale. Determinările teoretice sunt figurate prin curbele 1, 3, 5, corespunzătoare gradului de aproximație 1, 3, 5, iar determinările teoretice sunt figurate prin puncte încercuite cu 1, 2, 3 cercuri corespunzătoare încercuirilor cu modelele de tipul 1, 2 și 3.

Pentru abscise am ales o scară inversă, adică lungimile pe scară sunt proporționale cu raportul L/h, deoarece diagrama astfel obținută este mai expresivă și mărește scara cu cât raportul h/L scade punând în evidență intervalul cel mai interesant, care caracterizează această problemă.

După cum se observă pe diagramă, determinările teoretice și cele experimentale se verifică reciproc pe intervalul pentru h/L dela 2 la 1/3 inclusiv, punând în evidență exactitatea teoriei și precizia încercărilor.

Incercările experimentale au fost împinse pe diagramă până la $h/L = 1/8{,}14$ căruia îi corespunde $c = 1{,}786$ și chiar un punct îndepărtat $h/L = 1/16{,}15$ căruia îi corespunde $c = 1{,}706$.

Prin urmare, se poate deduce că pentru $h/L \to 0$, c tinde asimptotic către o limită care nu este departe de valoarea 1,7.

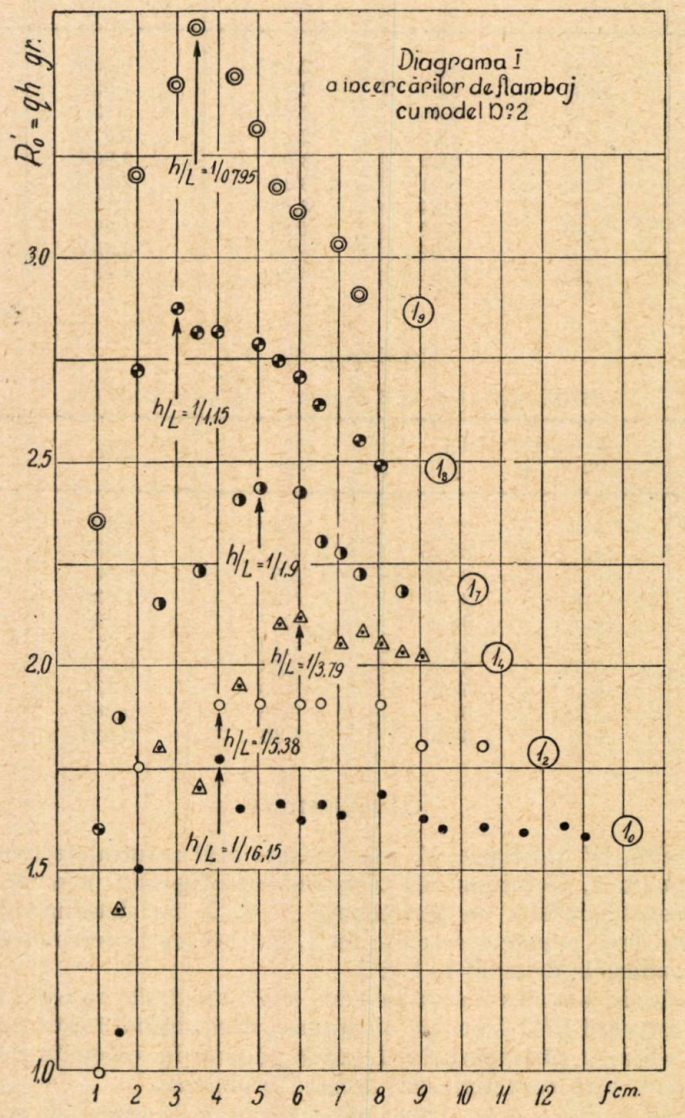


Diagrama I
a incercărilor de flambaj
cu model N°2
$R_0' = qh$ gr.
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
h/L = 1/0.795
h/L = 1/1.15
h/L = 1/1.9
h/L = 1/3.79
h/L = 1/5.38
h/L = 1/16.15
1_9
1_8
1_7
1_4
1_2
1_0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 f cm.

Fig. 14

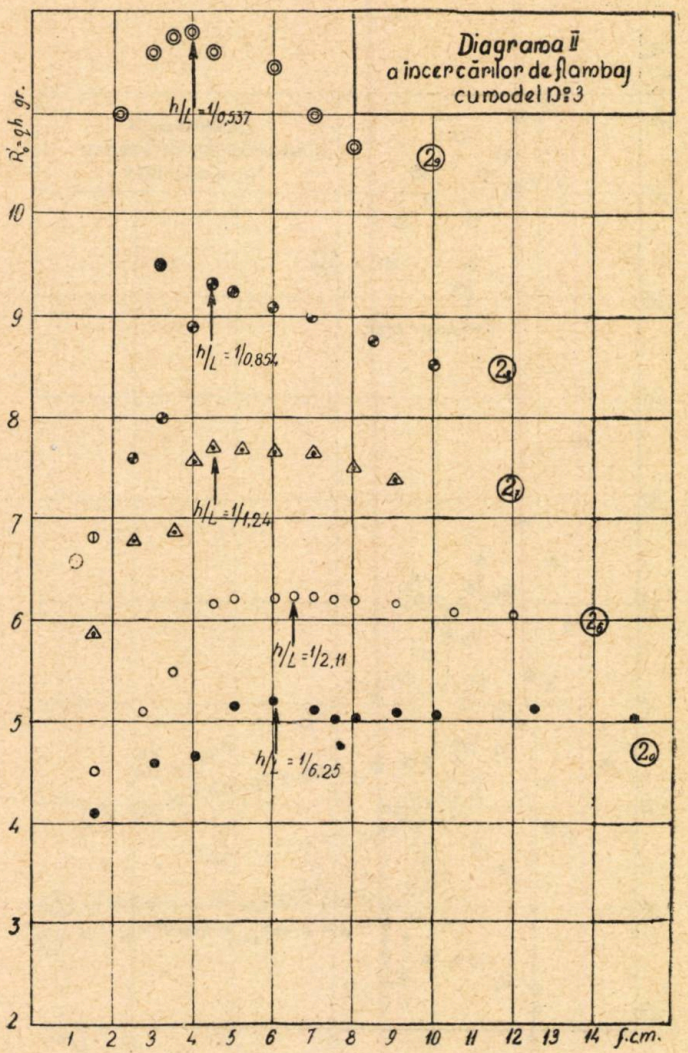


Diagrama II
a încercărilor de flambaj
cu model N°3
$R_0' = qh$ gr.
$h/L = 1/0{,}537$
$h/L = 1/0{,}854$
$h/L = 1/1{,}24$
$h/L = 1/2{,}11$
$h/L = 1/6{,}25$
2
3
4
5
6
7
8
9
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 f.cm.

Fig. 15

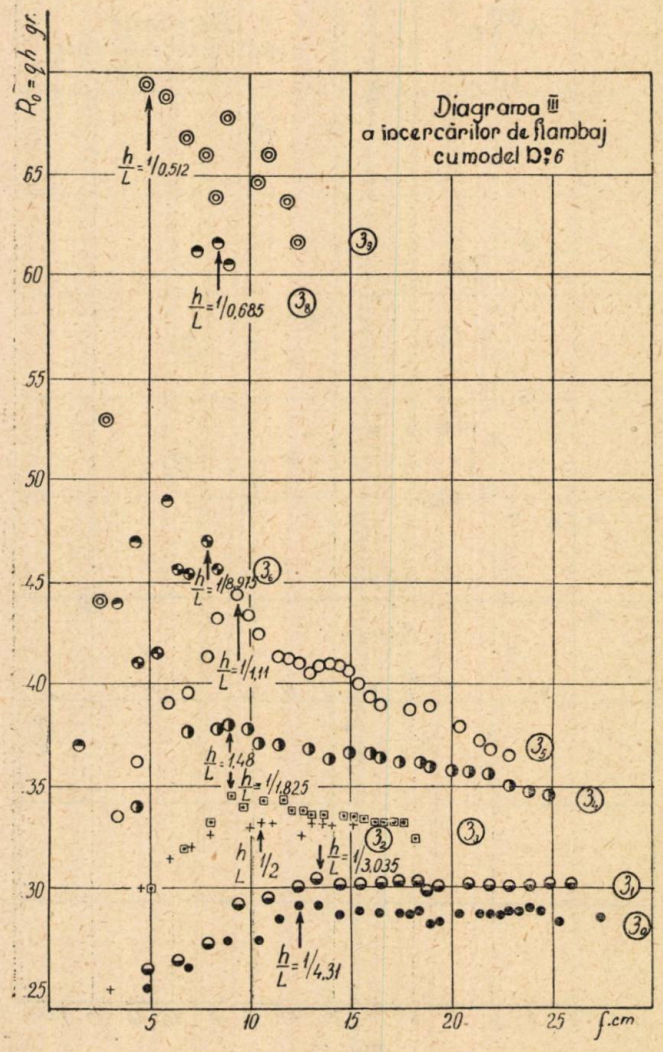


Diagrama III
a incercărilor de flambaj
cu model Nr. 6
$P_0 = q\,h$ gr.
f cm
h/L = 1/0,512
h/L = 1/0,685
h/L = 1/1,11
h/L = 1/1,48
h/L = 1/1,825
h/L = 1/2
h/L = 1/3,035
h/L = 1/4,31

Fig. 16

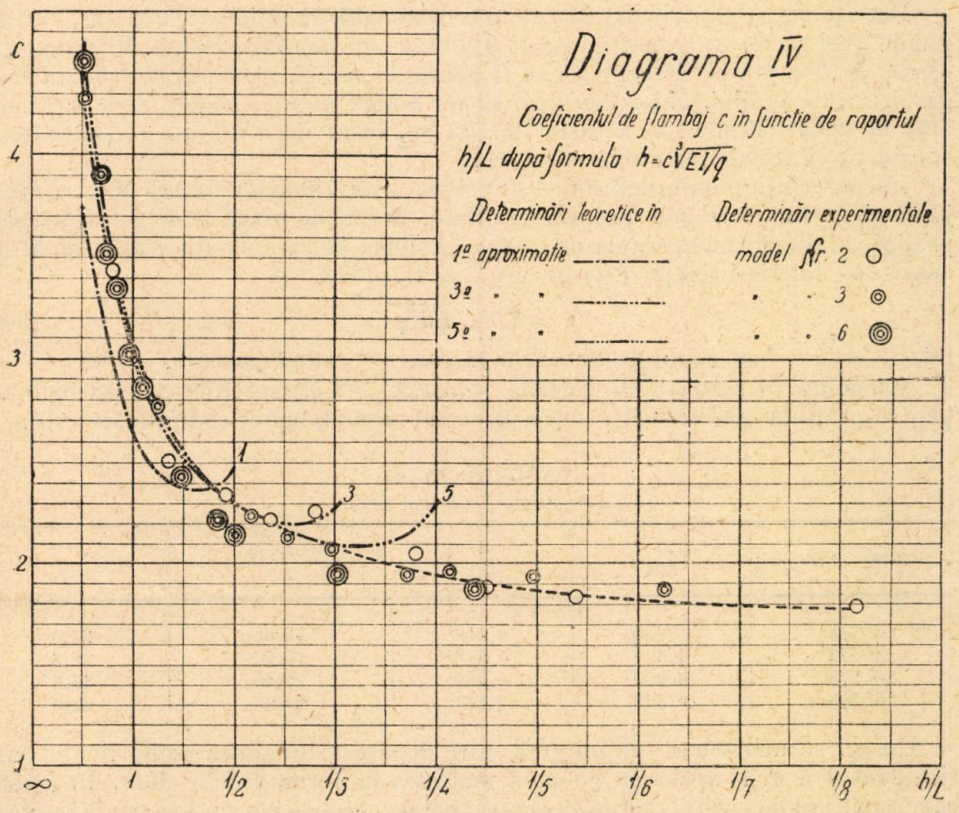


Diagrama IV
Coeficientul de flambaj c in functie de raportul h/L după formula $h = c\sqrt[3]{EI/q}$
Determinări teoretice în
1a aproximație
3a
5a
Determinări experimentale
model Nr. 2
3
6
c
4
3
2
1
∞
1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/7
1/8
h/L
1
3
5

Fig. 17

Determinările teoretice au fost laborioase pentru curba 3 și mai ales pentru curba 5 la care m'am oprit deocamdată. Prin mărirea gradului de aproximație, care conduce la extinderea intervalului determinat teoretic, se mărește considerabil calculul, fără ca interesul ce îl prezintă intervalul corespunzător să fie același, întru cât curba reală însemnată pe diagramă cu ∞ , care ar corespunde la determinarea teoretică cu un număr infinit de termeni, tinde asimptotic către o limită și, prin urmare, diferențele sunt din ce în ce mai mici, deci neglijabile.

Determinarea experimentală cea mai depărtată, menționată mai sus, corespunde unei garnituri de prăjini de 4" 1/2 lungă de aproape 500 m. In practică, oricât de dreaptă și neînclinată ar fi gaura de sondă, este puțin probabil ca garnitura de prăjini, chiar nerotită, să nu atingă pereții găurii pe o înălțime atât de considerabilă ca aceasta de 500 m, încât dacă luăm $c = 1{,}7$ putem considera că flambajul nu va avea loc.

In consecință putem determina lungimea comprimată maximă la care prăjinile să nu flambeze sub propria greutate, oricât de lungă ar fi garnitura de prăjini și fără să ținem seama de forța centrifugă de care ne-am ocupat cu altă ocazie [1], folosind relația (23) în care $c = 1{,}7$ adică

$$h = 1{,}7 \sqrt[3]{EI/q} , \tag{39}$$

relație care a fost comunicată într'o lucrare [1] premergătoare.

Inlocuind în relația (39) valorile expresiei EI/q, specificată mai înainte pentru prăjinile grele uzuale, obținem următoarele lungimi comprimate critice.

TABLOUL Nr. 12

Lungimile prăjinilor grele

Diam. nom.	D dm	d dm	$\sqrt[3]{EI/q}$ m	h m
2"7/8	0,953	0,318	12,65	21,6
4"1/2	1,397	0,572	16,60	28,3
6"5/8	1,969	0,889	21,40	36,6
8"5/8	2,545	1,143	24,95	42,6

Uneori se utilizează prăjini grele care depășesc lungimea comprimată critică pentru a mări apăsarea pe sapă mai ales în formațiunile dure. In acest caz, garnitura de prăjini flambată se reazămă de peretele găurii și se poate reduce efectul dăunător al flambajului prin reducerea diferenței de diametru între prăjini și gaură, cu scopul de a reduce săgeata.

ОБ ИЗГИБЕ ШТАНГ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖАТИЯ, ВЫЗВАННОГО ДОЛЕЙ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Дается теоретическое (A) и экспериментальное (B) изучение изгиба тяжелых и вертикальных штанг (рис. 1).

A. Интеграл дифференциального уравнения (1) эластичной линии, установленного и решенного раньше (1), (2) и (3) при помощи бес-

конечных рядов целых степеней, выражен соотношением (3), дополненным соотношениями (4) — (8).

Приняв условия у пределов для всех случаев, указанных на приложенном рисунке, получаем общее решение ($14\ \frac{i, i'}{j, j'}$) и путем подстановок получаем уравнение (15), дополненное посредством (16) и (17).

В экспериментированных случаях, в которых нижний конец на шарнирах, а верхний вставлен в пазы, без бокового перемещения, отношение (16) становится (18) и уравнение (15)—последовательно(19)—(21). На практике сжатая критическая длина h представляет интерес; ее значение дано формулой (23). Значение коэффициента c изгиба на приложенном рисунке вычислено формулой (24) в зависимости от отношения h/L.

Б. Опыты изгиба производили на моделях путем взвешивания противодействия низа штанги, заставляя меняться стрелку максимума.

Модели из проволоки, скрученной согласно винту, негибкость которой значительно снижена, дают возможность сравнить длину в 2—3 м, пригодную для манипуляции в лаборатории, с длинами систем бурильных штанг. Негибкость моделей была определена теоретическим и экспериментальным путем.

Результаты опытов табл. 6—8 представлены на диаграммах I—III рис. 14—16.

В. Значения коэффициента c изгиба нанеснеы на IV диаграмме рисунка 17 : теоретические определения кривыми 1—5, соответствующими степени приближения 1 — 5 и экспериментальные определения кругами, соответствующими трем примененным моделям.

Выводят, что при $h/L \to 0$ c стремится к асимптоте, величина которой близка 1,7.

При этих условиях и применяя раньше приведенную формулу (39) (1), вычислили критическую длину сжатия штанг с последней таблицы, представляющей длины тяжелых штанг без тенденции изгиба, какова бы ни была длина систем бурильных штанг.

SUR LE FLAMBAGE DES TIGES SOUS L'ACTION D'UNE COMPRESSION PRODUITE PAR UNE FRACTION DU POIDS PROPRE

(RÉSUMÉ)

L'Auteur procède à l'étude théorique (*A*) et expérimentale (*B*) du flambage des tiges lourdes et verticales (fig. 1).

A) L'intégrale de l'équation différentielle (1) de la ligne élastique établie et résolue antérieurement [1], [2] et [3] à l'aide des séries infinies des puissances entières, est exprimée par la relation (3) complétée par les relations (4)—(8).

En imposant les conditions des limites pour tous les cas précisés dans le tableau ci-joint, on obtient la solution générale ($14\ \frac{i, i'}{j, j'}$) et, par substitution, on arrive à l'équation (15) complétée par (16) et (17).

Pour le cas expérimenté, dont l'extrémité inférieure est articulée et la supérieure encastrée, sans déplacement latéral, la relation (16) devient (18) et l'équation (15), successivement (19)—(21). Dans la pratique, c'est la longueur com-

primée critique h de la tige, qui présente de l'intérêt ; la valeur en est donnée par la formule (23). Les valeurs du coefficient c de flambage, du tableau ci-joint, sont calculées par la formule (24), en fonction du rapport h/L.

B) Les essais de flambage ont été effectués sur des modèles, en pesant la réaction du bas de la tige et en faisant varier la flèche maximum.

Les modèles, en fil de fer, torsionnés suivant l'hélice, dont la rigidité est considérablement réduite, permettent de comparer une longueur de 2—3 m, maniable dans le laboratoire, aux longueurs des trains de tiges de forage. La rigidité des modèles a été déterminée par les voies : théorique et expérimentale.

Les résultats des essais, des tableaux Nos 6—8, sont représentés par les diagrammes I—III des figures 14—16.

C) En conclusion, les valeurs du coefficient c du flambage sont inscrites sur le diagramme IV de la figure 17 : les déterminations théoriques, par les courbes 1—5 correspondant aux degrés d'approximation 1—5, et les déterminations expérimentales, par des cercles correspondant aux trois modèles utilisés.

On déduit que pour $h/L \to 0$, c tend vers une asymptote dont la valeur n'est pas loin de 1,7.

Dans ces conditions, et en utilisant la formule (39) — présentée antérieurement [1] — on a calculé les longueurs critiques de compression des tiges, du tableau final qui représente les longueurs des tiges lourdes sans tendance de flambage, quelle que soit la longueur des trains de tiges de forage.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pârvulescu, *Sur les contributions aux flambage et vibrations rotatives des tiges verticales, lourdes et sveltes.* Bull. sect. scient. Acad. R. P. R., t. XXX, Nr. 9, 1948, p. 527.
2. — *Asupra instabilității tijelor verticale grele, svelte și în rotație. Ecuația diferențială a liniei elastice.* Stud. și Cerc. de Mecanică și Metalurgie, Acad. R.P.R., t. II, 1951, p. 157.
3. — *Despre integrarea ecuației liniei elastice în flambajul tijelor verticale, grele și svelte.* Stud. și Cerc. de Mecanică și Metalurgie, t. III, Nr. 1-2, 1952, p. 53.
4. — *Efectul presiunii hidrostatice asupra stabilității tijelor svelte verticale.* Revistele tehnice AGIR Petrol, 1948, Nr. 1.
5. S. T. Timoshenko, *Résistance des Matériaux.* Paris, 1949, t. II, p. 277, t. I, p. 164.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

EFORTURI PRODUSE DE CUTREMUR ÎN BARAJELE DE GREUTATE

DE

R. PRIŞCU

Intr'o lucrare anterioară [5], referitoare la acţiunea cutremurului asupra barajelor, s'au indicat, printre altele, ipotezele care stau la baza calculelor de dimensionare şi verificare a acestor construcţii la cutremur. S'a arătat că, şi în acest caz, se admite ipoteza simplificatoare după care acţiunea complexă a undelor seismice se reduce la efectul unei acceleraţii orizontale, introdusă în calcul sub forma unei câtimi din acceleraţia gravităţii ($c = ag$). Forţele suplimentare ce solicită barajul se datoresc deci inerţiei massei de apă reţinute şi inerţiei massei proprii.

In ceea ce priveşte presiunea suplimentară a apei produsă de cutremur, se ştie că repartiţia ei are o desvoltare matematică mai complicată care, conform calculelor lui W e s t e r g a a r d care a dedus-o, poate fi înlocuită fără a se comite erori printr'o repartiţie eliptică sau parabolică.

Considerând că este utilă o cunoaştere cât mai apropiată a eforturilor suplimentare ce apar în corpul barajelor de greutate la cutremur, se vor da în cele ce urmează soluţii deduse prin elasticitate pentru eforturile provenind din inerţia massei de apă şi din inerţia massei proprii, precum şi o nouă formulă de dimensionare.

A. EFORTURI PRODUSE DE INERŢIA MASSEI DE APĂ

1. *Repartiţie eliptică a suprapresiunilor*

Referindu-ne la figura 1, presiunea suplimentară a apei la cota z în sistemul de axe cartesian este $p = a\,C_e \sqrt{H^2 - z^2}$, iar în sistemul de axe polar:

$$p = a\,C_e \sqrt{2\,Hr - r^2} = a\,C_e\,(2\,H)^{1/2}\,r^{1/2}\left(1 - \frac{r}{2\,H}\right)^{1/2}$$

sau notând

$$a\,C_e\,(2\,H)^{1/2} = k_e \qquad p = k_e\,r^{1/2}\left(1 - \frac{r}{2\,H}\right)^{1/2}.$$

Coeficientul C_e are dimensiunea unei greutăţi specifice şi are expresia:

$$C_e = \frac{654}{\sqrt{1 - \frac{7{,}75}{10^6}\left(\frac{H}{T}\right)^2}} \text{kg/m}^3$$

unde H (m) reprezintă înălţimea barajului şi T (sec) perioada vibraţiilor produse de cutremur.

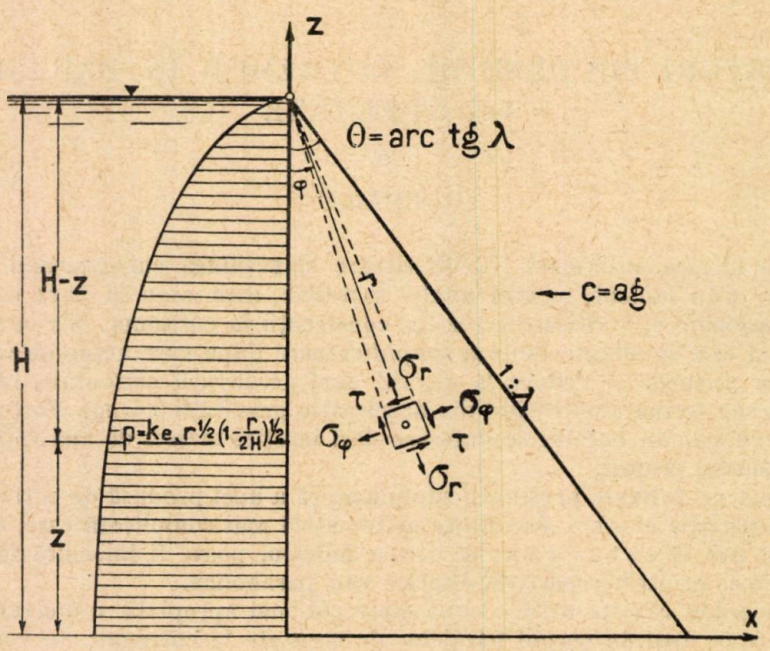


Fig. 1

Desvoltând în serie binomul din expresia de mai sus şi oprindu-ne la al 4-lea termen, putem scrie cu suficientă exactitate (valoarea maximă a lui r fiind H):

$$p = k_e\left(r^{1/2} - \frac{1}{4}\frac{r^{3/2}}{H} - \frac{1}{32}\frac{r^{5/2}}{H^2} - \frac{1}{128}\frac{r^{7/2}}{H^3}\right).$$

In sistemul de coordonate polare, introducând funcţia de efort F, eforturile sunt:

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\ ;\ \sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\ ;\ \tau = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} \qquad (1)$$

şi condiţia de compatibilitate:

$$\left(\frac{\partial^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right) = 0. \qquad (2)$$

Din soluția generală a ecuației (2) alegem o funcție F care să corespundă condițiilor marginale:

$$F = \sum r^{n+2} [A_n \cos (n+2)\varphi + B_n \sin (n+2)\varphi + C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi] \quad (3)$$

Conform ecuațiilor (1) eforturile devin:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\varphi = & \sum (n+1)(n+2) r^n [A_n \cos (n+2)\varphi + B_n \sin (n+2)\varphi + \\
& + C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi] \\
\sigma_r = & - \sum (n+1)(n+2) r^n \left[A_n \cos (n+2)\varphi + B_n \sin (n+2)\varphi + \right. \\
& \left. + C_n \frac{n-2}{n+2} \cos n\varphi + D_n \frac{n-2}{n+2} \sin n\varphi \right] \\
\tau = & \sum (n+1)(n+2) r^n \left[A_n \sin (n+2)\varphi - B_n \cos (n+2)\varphi + \right. \\
& \left. + C_n \frac{n}{n+2} \sin n\varphi - D_n \frac{n}{n+2} \cos n\varphi \right]
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

In cazul barajului solicitat de suprapresiunea apei produsă de cutremur, condițiile marginale sunt:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{pentru } \varphi = 0 \quad \sigma_\varphi = -p \quad \tau = 0 \quad \text{(paramentul amonte)} \\
&\text{pentru } \varphi = \theta \quad \sigma_\varphi = 0 \quad \tau = 0 \quad \text{(paramentul aval)}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Inlocuind în ecuațiile (4), avem:

Pentru $\varphi = 0$

$$\sigma_\varphi = -k_e \left(r^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{r^{3/2}}{H} - \frac{1}{32} \frac{r^{5/2}}{H^2} - \frac{1}{128} \frac{r^{7/2}}{H^3} \right) =$$

$$= \frac{15}{4} r^{1/2} (A_1 + C_1) + \frac{35}{4} r^{3/2} (A_2 + C_2) + \frac{63}{4} r^{5/2} (A_3 + C_3) + \frac{99}{4} r^{7/2} (A_4 + C_4)$$

$$\tau = \frac{15}{4} r^{1/2} \left(B_1 + \frac{1}{5} D_1 \right) + \frac{35}{4} r^{3/2} \left(B_2 + \frac{3}{7} D_2 \right) +$$

$$+ \frac{63}{4} r^{5/2} \left(B_3 + \frac{5}{9} D_3 \right) + \frac{99}{4} r^{7/2} \left(B_4 + \frac{7}{11} D_4 \right) = 0$$

Pentru $\varphi = \theta$

$$\sigma_\varphi = \frac{15}{4} r^{1/2} \left(A_1 \cos \frac{5}{2}\theta + B_1 \sin \frac{5}{2}\theta + C_1 \cos \frac{1}{2}\theta + D_1 \sin \frac{1}{2}\theta \right) +$$

$$+ \frac{35}{4} r^{3/2} \left(A_2 \cos \frac{7}{2}\theta + B_2 \sin \frac{7}{2}\theta + C_2 \cos \frac{3}{2}\theta + D_2 \sin \frac{3}{2}\theta \right) +$$

$$+ \frac{63}{4} r^{5/2} \left(A_3 \cos \frac{9}{2}\theta + B_3 \sin \frac{9}{2}\theta + C_3 \cos \frac{5}{2}\theta + D_3 \sin \frac{5}{2}\theta \right) +$$

$$+ \frac{99}{4} r^{7/2} \left(A_4 \cos \frac{11}{2}\theta + B_4 \sin \frac{11}{2}\theta + C_4 \cos \frac{7}{2}\theta + D_4 \sin \frac{7}{2}\theta \right) = 0$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{15}{4} r^{1/2}\left(A_1 \sin\frac{5}{2}\theta - B_1\cos\frac{5}{2}\theta + \frac{1}{5}C_1\sin\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{5}D_1\cos\frac{1}{2}\theta\right) +$$
$$+ \frac{35}{4} r^{3/2}\left(A_2\sin\frac{7}{2}\theta - B_2\cos\frac{7}{2}\theta + \frac{3}{7}C_2\sin\frac{3}{2}\theta - \frac{3}{7}D_2\cos\frac{3}{2}\theta\right) +$$
$$+ \frac{63}{4} r^{5/2}\left(A_3\sin\frac{9}{2}\theta - B_3\cos\frac{9}{2}\theta + \frac{5}{9}C_3\sin\frac{5}{2}\theta - \frac{5}{9}D_3\cos\frac{5}{2}\theta\right) +$$
$$+ \frac{99}{4} r^{7/2}\left(A_4\sin\frac{11}{2}\theta - B_4\cos\frac{11}{2}\theta + \frac{7}{11}C_4\sin\frac{7}{2}\theta - \frac{7}{11}D_4\cos\frac{7}{2}\theta\right) = 0$$

Egalând coeficienții puterilor lui r, respectiv, obținem sistemul de ecuații:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{15}{4}(A_1 + C_1) &= -k_e \\
35(A_2 + C_2) &= \frac{k_e}{H} \\
504(A_3 + C_3) &= \frac{k_e}{H^2} \\
3168(A_4 + C_4) &= \frac{k_e}{H^3} \\
5B_1 + D_1 &= 0 \\
7B_2 + 3D_2 &= 0 \\
9B_3 + 5D_3 &= 0 \\
11B_4 + 7D_4 &= 0 \\
A_1\cos\frac{5}{2}\theta + B_1\sin\frac{5}{2}\theta + C_1\cos\frac{1}{2}\theta + D_1\sin\frac{1}{2}\theta &= 0 \\
A_2\cos\frac{7}{2}\theta + B_2\sin\frac{7}{2}\theta + C_2\cos\frac{3}{2}\theta + D_2\sin\frac{3}{2}\theta &= 0 \\
A_3\cos\frac{9}{2}\theta + B_3\sin\frac{9}{2}\theta + C_3\cos\frac{5}{2}\theta + D_3\sin\frac{5}{2}\theta &= 0 \\
A_4\cos\frac{11}{2}\theta + B_4\sin\frac{11}{2}\theta + C_4\cos\frac{7}{2}\theta + D_4\sin\frac{7}{2}\theta &= 0 \\
A_1\sin\frac{5}{2}\theta - B_1\cos\frac{5}{2}\theta + \frac{1}{5}C_1\sin\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{5}D_1\cos\frac{1}{2}\theta &= 0 \\
A_2\sin\frac{7}{2}\theta - B_2\cos\frac{7}{2}\theta + \frac{3}{7}C_2\sin\frac{3}{2}\theta - \frac{3}{7}D_2\cos\frac{3}{2}\theta &= 0 \\
A_3\sin\frac{9}{2}\theta - B_3\cos\frac{9}{2}\theta + \frac{5}{9}C_3\sin\frac{5}{2}\theta - \frac{5}{9}D_3\cos\frac{5}{2}\theta &= 0 \\
A_4\sin\frac{11}{2}\theta - B_4\cos\frac{11}{2}\theta + \frac{7}{11}C_4\sin\frac{7}{2}\theta - \frac{7}{11}D_4\cos\frac{7}{2}\theta &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

cu soluțiile:

$$A_1 = \frac{4}{15} k_e \frac{a_1 \cos\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{5} b_1 \sin\frac{1}{2}\theta}{a_1^2 + b_1 c_1} = -\frac{4}{15} k_e A_1'$$

$$B_1 = \frac{4}{15} k_e \frac{c_1 \cos\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{5} a_1 \sin\frac{1}{2}\theta}{a_1^2 + b_1 c_1} = \frac{4}{15} k_e B_1'$$

$$C_1 = \frac{4}{15} k_e (A_1' - 1)$$

$$D_1 = -5\frac{4}{15} k_e B_1'$$

$$\begin{cases} a_1 = \cos\frac{5}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}\theta \\ b_1 = \sin\frac{5}{2}\theta - 5\sin\frac{1}{2}\theta \\ c_1 = \sin\frac{5}{2}\theta - \frac{1}{5}\sin\frac{1}{2}\theta \end{cases}$$

$$A_2 = -\frac{1}{35}\frac{k_e}{H}\frac{a_2 \cos\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{7} b_2 \sin\frac{3}{2}\theta}{a_2^2 + b_2 c_2} = \frac{1}{35}\cdot\frac{k_e}{H} A_2'$$

$$B_2 = -\frac{1}{35}\frac{k_e}{H}\frac{c_2 \cos\frac{3}{2}\theta - \frac{3}{7} a_2 \sin\frac{3}{2}\theta}{a_2^2 + b_2 c_2} = -\frac{1}{35}\frac{k_e}{H} B_2'$$

$$C_2 = \frac{1}{35}\frac{k_e}{H}(1 - A_2')$$

$$D_2 = \frac{7}{3}\frac{1}{35}\frac{k_e}{H} B_2'$$

$$\begin{cases} a_2 = \cos\frac{7}{2}\theta - \cos\frac{3}{2}\theta \\ b_2 = \sin\frac{7}{2}\theta - \frac{7}{3}\sin\frac{3}{2}\theta \\ c_2 = \sin\frac{7}{2}\theta - \frac{3}{7}\sin\frac{3}{2}\theta \end{cases}$$

$$A_3 = -\frac{1}{504}\frac{k_e}{H^2}\frac{a_3 \cos\frac{5}{2}\theta + \frac{5}{9} b_3 \sin\frac{5}{2}\theta}{a_3^2 + b_3 c_3} = \frac{1}{504}\frac{k_e}{H^2} A_3'$$

$$B_3 = -\frac{1}{504}\frac{k_e}{H^2}\frac{c_3 \cos\frac{5}{2}\theta - \frac{5}{9} a_3 \sin\frac{5}{2}\theta}{a_3^2 + b_3 c_3} = -\frac{1}{504}\frac{k_e}{H^2} B_3'$$

$$C_3 = \frac{1}{504}\frac{k_e}{H^2}(1 - A_3')$$

$$D_3 = \frac{9}{5}\frac{1}{504}\frac{k_e}{H^2}B_3'$$

$$\begin{cases} a_3 = \cos\frac{9}{2}\theta - \cos\frac{5}{2}\theta \\ b_3 = \sin\frac{9}{2}\theta - \frac{9}{5}\sin\frac{5}{2}\theta \\ c_3 = \sin\frac{9}{2}\theta - \frac{5}{9}\sin\frac{5}{2}\theta \end{cases}$$

$$A_4 = -\frac{1}{3168}\frac{k_e}{H^3}\frac{a_4\cos\frac{7}{2}\theta - \frac{7}{11}b_4\sin\frac{7}{2}\theta}{a_4^2 + b_4 c_4} = \frac{1}{3168}\frac{k_e}{H^3}A_4'$$

$$B_4 = -\frac{1}{3168}\frac{k_e}{H^3}\frac{c_4\cos\frac{7}{2}\theta - \frac{7}{11}a_4\sin\frac{7}{2}\theta}{a_4^2 + b_4 c_4} = -\frac{1}{3168}\frac{k_e}{H^3}B_4'$$

$$C_4 = \frac{1}{3168}\frac{k_e}{H^3}(1 - A_4')$$

$$D_4 = \frac{11}{7}\frac{1}{3168}\frac{k_e}{H^3}B_4'$$

$$\begin{cases} a_4 = \cos\frac{11}{2}\theta - \cos\frac{7}{2}\theta \\ b_4 = \sin\frac{11}{2}\theta - \frac{11}{7}\sin\frac{7}{2}\theta \\ c_4 = \sin\frac{11}{2}\theta - \frac{7}{11}\sin\frac{7}{2}\theta \end{cases}$$

Valorile A_1', A_2', A_3', A_4' și B_1', B_2', B_3', B_4' fiind funcții de $\theta = \text{arc tg}\,\lambda$, s'au calculat pentru o serie de valori mai frecvente ale lui λ, după cum se vede în tablourile Nr. 1 și Nr. 2.

TABLOUL Nr. 1

λ	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'
0,500	4,503.73	2,450.30	1,460.47	0,880.48
0,550	3,807.14	2,037.58	1,181.62	0,697.42
0,600	3,276.64	1,724.80	0,975.19	0,572.89
0,650	2,863.13	1,482.45	0,819.98	0,489.95
0,700	2,534.42	1,291.17	0,702.02	0,437.13
0,725	2,394.73	1,210.39	0,653.91	0,419.42
0,750	2,268.66	1,137.82	0,611.80	0,406.41
0,775	2,154.42	1,072.38	0,574.91	0,397.43
0,800	2,050.61	1,013.23	0,542.61	0,391.88
0,825	1,955.94	0,959.58	0,514.34	0,389.26
0,850	1,869.40	0,910.83	0,489.63	0,389.10
0,875	1,790.02	0,866.39	0,468.08	0,391.00
0,900	1,717.07	0,825.82	0,449.31	0,394.61
0,950	1,587.71	0,754.63	0,418.96	0,405.71
1,000	1,476.86	0,694.56	0,396.51	0,420.27

TABLOUL Nr. 2

λ	B_1'	B_2'	B_3'	B_4'
0,500	6,921.04	2,499.54	1,160.13	0,728.56
0,550	5,275.34	1,850.70	0,859.70	0,599.90
0,600	4,125.20	1,405.72	0,664.56	0,528.56
0,650	3,295.85	1,063.69	0,535.35	0,491.12
0,700	2,681.67	0,864.27	0,448.92	0,472.90
0,725	2,433.52	0,774.17	0,417.06	0,468.36
0,750	2,216.40	0,696.40	0,390.99	0,465.65
0,775	2,025.48	0,629.07	0,369.59	0,464.13
0,800	1,856.92	0,570.33	0,352.07	0,463.54
0,825	1,706.97	0,519.09	0,337.82	0,463.55
0,850	1,574.27	0,474.19	0,326.35	0,463.49
0,875	1,455.30	0,434.63	0,316.87	0,463.35
0,900	1,348.63	0,399.81	0,309.42	0,462.92
0,950	1,166.00	0,341.81	0,298.55	0,460.94
1,000	1,016.37	0,296,03	0,292.01	0,456.54

Expresiile finale ale eforturilor devin:

$$\sigma_\varphi = -k_e r^{1/2}\left[A_1'\left(\cos\frac{5}{2}\varphi - \cos\frac{1}{2}\varphi\right) - B_1'\left(\sin\frac{5}{2}\varphi - 5\sin\frac{1}{2}\varphi\right) + \cos\frac{1}{2}\varphi\right] +$$
$$+\frac{1}{4}\frac{k_e}{H}r^{3/2}\left[A_2'\left(\cos\frac{7}{2}\varphi - \cos\frac{3}{2}\varphi\right) - B_2'\left(\sin\frac{7}{2}\varphi - \frac{7}{3}\sin\frac{3}{2}\varphi\right) + \cos\frac{3}{2}\varphi\right] +$$
$$+\frac{1}{32}\frac{k_e}{H^2}r^{5/2}\left[A_3'\left(\cos\frac{9}{2}\varphi - \cos\frac{5}{2}\varphi\right) - B_3'\left(\sin\frac{9}{2}\varphi - \frac{9}{5}\sin\frac{5}{2}\varphi\right) + \cos\frac{5}{2}\varphi\right] + \quad (7)$$
$$+\frac{1}{128}\frac{k_e}{H^3}r^{7/2}\left[A_4'\left(\cos\frac{11}{2}\varphi - \cos\frac{7}{2}\varphi\right) - B_4'\left(\sin\frac{11}{2}\varphi - \frac{11}{7}\sin\frac{7}{2}\varphi\right) + \cos\frac{7}{2}\varphi\right]$$

$$\sigma_r = k_e r^{1/2}\left[A_1'\left(\cos\frac{5}{2}\varphi + \frac{3}{5}\cos\frac{1}{2}\varphi\right) - B_1'\left(\sin\frac{5}{2}\varphi + 3\sin\frac{1}{2}\varphi\right) - \frac{3}{5}\cos\frac{1}{2}\varphi\right] -$$
$$-\frac{1}{4}\frac{k_e}{H}r^{3/2}\left[A_2'\left(\cos\frac{7}{2}\varphi + \frac{1}{7}\cos\frac{3}{2}\varphi\right) - B_2'\left(\sin\frac{7}{2}\varphi + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\varphi\right) - \frac{1}{7}\cos\frac{3}{2}\varphi\right] -$$
$$-\frac{1}{32}\frac{k_e}{H^2}r^{5/2}\left[A_3'\left(\cos\frac{9}{2}\varphi - \frac{1}{9}\cos\frac{5}{2}\varphi\right) - B_3'\left(\sin\frac{9}{2}\varphi - \frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}\varphi\right) + \frac{1}{9}\cos\frac{5}{2}\varphi\right] - \quad (8)$$
$$-\frac{1}{128}\frac{k_e}{H^3}r^{7/2}\left[A_4'\left(\cos\frac{11}{2}\varphi - \frac{3}{11}\cos\frac{7}{2}\varphi\right) - B_4'\left(\sin\frac{11}{2}\varphi - \frac{3}{7}\sin\frac{7}{2}\varphi\right) + \frac{3}{11}\cos\frac{7}{2}\varphi\right].$$

$$\tau = -k_e r^{1/2}\left[A_1'\left(\sin\frac{5}{2}\varphi - \frac{1}{5}\sin\frac{1}{2}\varphi\right) + B_1'\left(\cos\frac{5}{2}\varphi - \cos\frac{1}{2}\varphi\right) + \frac{1}{5}\sin\frac{1}{2}\varphi\right] +$$
$$+\frac{1}{4}\frac{k_e}{H}r^{3/2}\left[A_2'\left(\sin\frac{7}{2}\varphi - \frac{3}{7}\sin\frac{3}{2}\varphi\right) + B_2'\left(\cos\frac{7}{2}\varphi - \cos\frac{3}{2}\varphi\right) + \frac{3}{7}\sin\frac{3}{2}\varphi\right] +$$
$$+\frac{1}{32}\frac{k_e}{H^2}r^{5/2}\left[A_3'\left(\sin\frac{9}{2}\varphi - \frac{5}{9}\sin\frac{5}{2}\varphi\right) + B_3'\left(\cos\frac{9}{2}\varphi - \cos\frac{5}{2}\varphi\right) + \frac{5}{9}\sin\frac{5}{2}\varphi\right] + \quad (9)$$
$$+\frac{1}{128}\frac{k_e}{H^3}r^{7/2}\left[A_4'\left(\sin\frac{11}{2}\varphi - \frac{7}{11}\sin\frac{7}{2}\varphi\right) + B_4'\left(\cos\frac{11}{2}\varphi - \cos\frac{7}{2}\varphi\right) + \frac{7}{11}\sin\frac{7}{2}\varphi\right]$$

De un interes deosebit sunt valorile eforturilor pe paramentele barajului, unde în acelaşi timp σ_φ şi σ_r sunt eforturi principale:

Amonte ($\varphi = 0$)

$$\sigma_{\varphi,0} = -k_e r^{1/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{H} - \frac{1}{32}\frac{r^2}{H^2} - \frac{1}{128}\frac{r^3}{H^3}\right)$$

$$\sigma_{r,0} = k_e r^{1/2}\frac{1}{5}(8A_1'' - 3) - \frac{k_e}{H} r^{3/2}\frac{1}{28}(8A_2'' - 1) - \frac{k_e}{H^2} r^{5/2}\frac{1}{288}(8A_3'' + 1) - \quad (10)$$

$$- \frac{k_e}{H^3} r^{7/2}\frac{1}{1408}(8A_4' + 3)$$

sau: $$\sigma_{r,0} = k_e r^{1/2}\left(\sigma'_{r,0} - \frac{r}{H}\sigma''_{r,0} - \frac{r^2}{H^2}\sigma'''_{r,0} - \frac{r^3}{H^3}\sigma''''_{r,0}\right) \quad (11)$$

$$\mathfrak{T} = 0 \quad (9)'$$

Aval ($\varphi = \theta$)

$$\sigma_{\varphi,\theta} = 0 \quad (7)'$$

$$\sigma_{r,\theta} = k_e r^{1/2}\left[A_1'\left(\cos\frac{5}{2}\theta + \frac{3}{5}\cos\frac{1}{2}\theta\right) - B_1'\left(\sin\frac{5}{2}\theta + 3\sin\frac{1}{2}\theta\right) - \frac{3}{5}\cos\frac{1}{2}\theta\right] -$$

$$- \frac{1}{4}\frac{k_e}{H} r^{3/2}\left[A_2'\left(\cos\frac{7}{2}\theta + \frac{1}{7}\cos\frac{3}{2}\theta\right) - B_2'\left(\sin\frac{7}{2}\theta + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\theta\right) - \frac{1}{7}\cos\frac{3}{2}\theta\right] -$$

$$- \frac{1}{32}\frac{k_e}{H^2} r^{5/2}\left[A_3'\left(\cos\frac{9}{2}\theta - \frac{1}{9}\cos\frac{5}{2}\theta\right) - B_3'\left(\sin\frac{9}{2}\theta - \frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}\theta\right) + \frac{1}{9}\cos\frac{5}{2}\theta\right] -$$

$$- \frac{1}{128}\frac{k_e}{H^3} r^{7/2}\left[A_4'\left(\cos\frac{11}{2}\theta - \frac{3}{11}\cos\frac{7}{2}\theta\right) - B_4'\left(\sin\frac{11}{2}\theta - \frac{3}{7}\sin\frac{7}{2}\theta\right) + \frac{3}{11}\cos\frac{7}{2}\theta\right]$$

sau:

$$\sigma_{r,\theta} = k_e r^{1/2}\left(\sigma'_{r,\theta} - \frac{r}{H}\sigma''_{r,\theta} - \frac{r^2}{H^2}\sigma'''_{r,\theta} - \frac{r^3}{H^3}\sigma''''_{r,\theta}\right) \quad (12)$$

$$\mathfrak{T}_\theta = 0 \quad (9)''$$

TABLOUL Nr. 3

λ	$\sigma'_{r,0}$	$\sigma''_{r,0}$	$\sigma'''_{r,0}$	$\sigma''''_{r,0}$
0,500	6,605.97	0,664.37	0,044.04	0,007.13
0,550	5,491.42	0,546.45	0,036.29	0,006.09
0,600	4,642.62	0,457.09	0,030.56	0,005.39
0,650	3,981.01	0,387.84	0,026.25	0,004.91
0,700	3,455.07	0,333.19	0,022.97	0,004.64
0,725	3,231.56	0,310.11	0,021.64	0,004.51
0,750	3,029.85	0,289.38	0,020.47	0,004.44
0,775	2,847.07	0,270.68	0,019.44	0,004.39
0,800	2,680.97	0,253.78	0,018.55	0,004.36
0,825	2,529.51	0,238.45	0,017.76	0,004.34
0,850	2,391.03	0,224,52	0,017.07	0,004.34
0,875	2,264.03	0,211.83	0,016.47	0,004.35
0,900	2,147.30	0,200.23	0,015.95	0,004.37
0,950	1,940.33	0,179.88	0,015.11	0,004.43
1,000	1,762.97	0,162.73	0,014.49	0.004.52

TABLOUL Nr. 4

λ	$\sigma'_{r,\theta}$	$\sigma''_{r,\theta}$	$\sigma'''_{r,\theta}$	$\sigma''''_{r,\theta}$
0,500	—7,264.92	—0,749.56	—0,048.08	—0,006.46
0,550	—6,148.96	—0,628.81	—0,039.33	—0,004.94
0,600	—5,298.80	—0,536.48	—0,032.58	—0,003.66
0,650	—4,635.72	—0,456.15	—0,027.19	—0,002.70
0,700	—4,108.24	—0,406.39	—0,022.79	—0,001.85
0,725	—3,884.00	—0,381.69	—0,020.88	—0,001.46
0,750	—3,681.44	—0,359.32	—0,019.13	—0,001.10
0,775	—3,497.92	—0,338.99	—0,017.51	—0,000.77
0,800	—3,331.00	—0,320.41	—0,016.02	—0,000.46
0,825	—3,178.72	—0,303.40	—0,014.63	—0,000.16
0,850	—3,039.48	—0,287.79	—0,013.34	+0,000.12
0,875	—2,911.68	—0,273.37	—0,012.13	+0,000.38
0,900	—2,794.12	—0,260.07	—0,010.99	+0,000.63
0,950	—2,585.60	—0,236.31	—0,009.05	+0,001.08
1,000	—2,406.68	—0,215.71	—0,007.07	+0,001.48

Pentru înlesnirea calculelor practice s'au calculat valorile $\sigma'_{r,0}$, $\sigma''_{r,0}$, $\sigma'''_{r,0}$, $\sigma''''_{r,0}$ și $\sigma'_{r,\theta}$, $\sigma''_{r,\theta}$, $\sigma'''_{r,\theta}$, $\sigma''''_{r,\theta}$, rezultatele fiind cele din tablourile Nr. 3 și Nr. 4, respectiv din diagramele din figurile 2 și 3. Se observă că $\sigma''''_{r,0}$ și $\sigma''''_{r,\theta}$ au valori atât de mici încât se poate renunța la al 4-lea termen.

*

Pentru a putea compara rezultatele obținute mai sus cu cele ce se deduc prin metoda statică elementară, le vom calcula și pe acestea din urmă.

Intr'o secțiune oarecare z (fig. 4), eforturile normale verticale σ_z produse de aceeași suprapresiune eliptică vor fi:

— presiunea în secțiunea z $\quad p = aC_e\sqrt{H^2 - z^2}$

— presiunea în secțiunea $z = 0$ $\quad p_0 = aC_eH$

— suprafața totală a sfertului de elipsă: $C_a = \frac{\pi}{4} a C_e H^2$

— suprafața parțială ABC:

$$C_{az} = C_a - \frac{1}{2} pz - \frac{1}{2} p_0 H \arcsin \frac{z}{H}$$

$$C_{az} = \frac{\pi}{4} a C_e H^2 - \frac{1}{2} a C_e z \sqrt{H^2 - z^2} - \frac{1}{2} a C_e H^2 \arcsin \frac{z}{H}$$

— ordonata centrului de greutate al suprafeței ABC față de $z = 0$ este:

$$z_g = \frac{1}{3} \frac{a C_e}{C_{az}} (H^2 - z)^{3/2}$$

iar față de secțiunea z (CB): $z'_g = z_g - z$

— momentul forței C_{az} față de secțiunea z:

$$M = C_{az} \cdot z'_g = \frac{1}{3} a C_e (H^2 - z^2)^{3/2} - z \left(\frac{\pi}{4} a C_e H^2 - \frac{1}{2} a C_e z \sqrt{H^2 - z^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} a C_e H^2 \arcsin \frac{z}{H} \right)$$

— modulul rezistent $W = \frac{1}{6}\lambda^2 (H - z)^2$

— efortul $\sigma_z = \pm \frac{M}{W}$ va fi

$$\sigma_z = \pm 3 \frac{a C_e}{\lambda^2} \frac{1}{(H-z)^2}\left[\frac{2}{3}(H^2 - z^2)^{3/2} - z\left(\frac{\pi}{2}H^2 - z\sqrt{H^2 - z^2} - H^2 \arcsin\frac{z}{H}\right)\right]$$

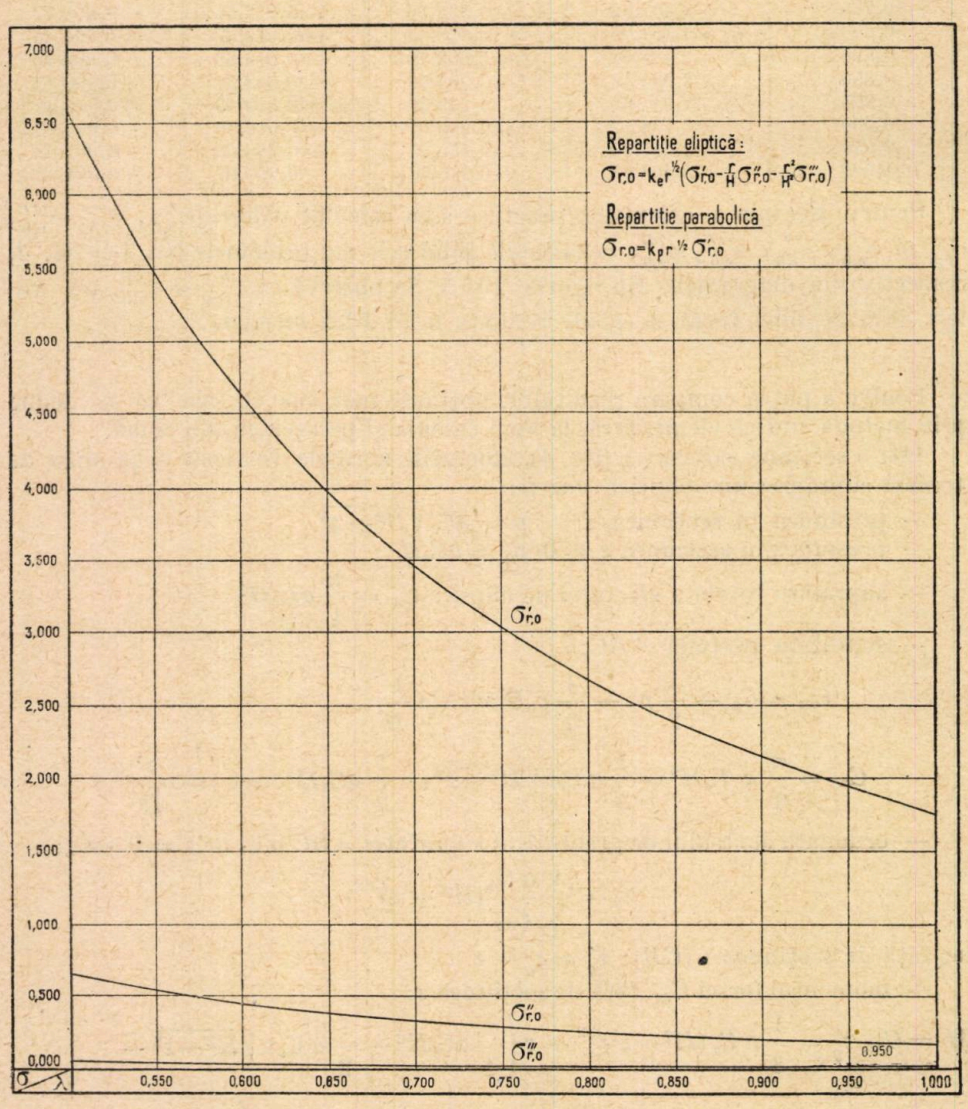


Fig. 2.— $\sigma'_{r,0}$, $\sigma''_{r,0}$, $\sigma'''_{r,0}$, $\sigma''''_{r,0}$ pentru diverse valori λ.

sau introducând notaţia $z = \rho H$, avem:

$$\sigma_z = \pm 3 \frac{aC_e}{\lambda^2} \frac{H}{(1-\rho)^2} \left[\frac{2}{3} (1-\rho^2)^{3/2} - \rho \left(\frac{\pi}{2} - \rho \sqrt{1-\rho^2} - \arcsin \rho \right) \right] \quad (13)$$

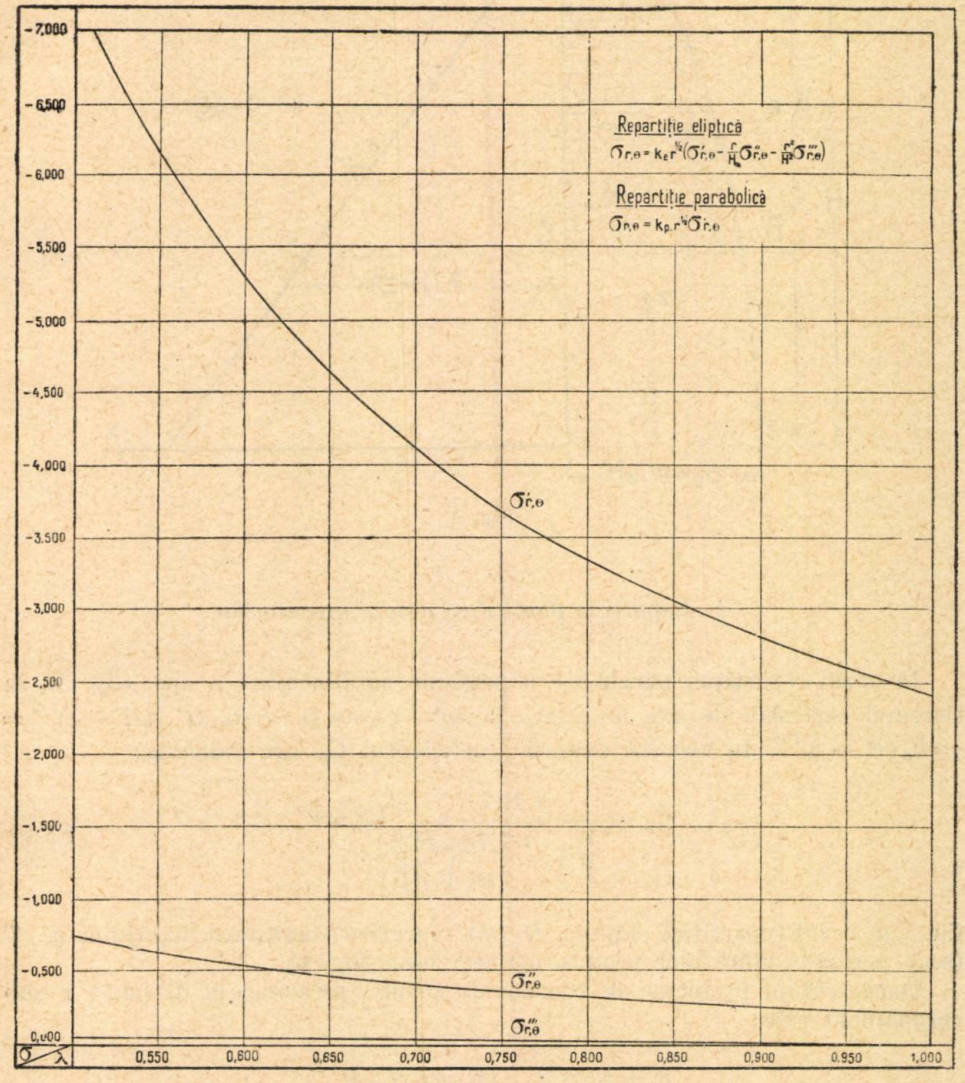


Fig. 3.— $\sigma'_{r,\theta}$, $\sigma''_{r,\theta}$, $\sigma'''_{r,\theta}$, $\sigma''''_{r,\theta}$ pentru diverse valori λ.

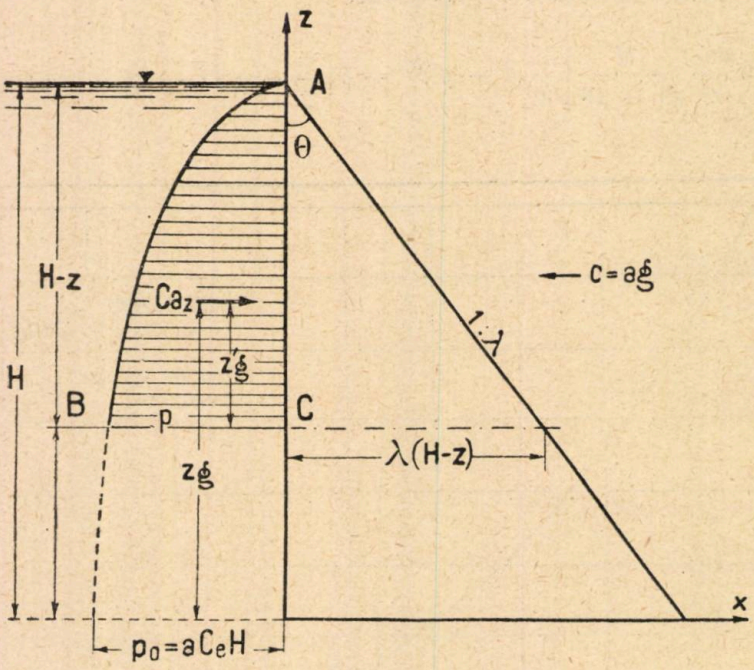


Fig. 4

2. *Repartiție parabolică a suprapresiunilor*

In cazul repartiției parabolice a presiunii suplimentare a apei (fig. 5), în sistemul cartesian de axe presiunea la cota z este $p = aC_p H^{1/2}(H - z)^{1/2} = k_p(H - z)^{1/2}$. In această expresie coeficientul C_p are valoarea:

$$C_p = \frac{817}{\sqrt{1 - \frac{7{,}75}{10^6}\left(\frac{H}{T}\right)^2}} \text{ kg/m}^3$$

Ca și în cazul repartiției eliptice, H (m) reprezintă înălțimea barajului și T (sec) perioada vibrațiilor produse de cutremur (fig. 6).

Dacă tratăm problema în coordonate polare, presiunea la distanța r sub coronament este:

$$p = k_p r^{1/2} \qquad (k_p = a\ C_p H^{1/2})$$

Referindu-ne la aceleași condiții de bază (1) și (2) date mai înainte, funcția de efort (3) se păstrează sub forma:

$$F = r^{n+2}\left[A_n \cos(n+2)\varphi + B_n \sin(n+2)\varphi + C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right] \quad (3)'$$

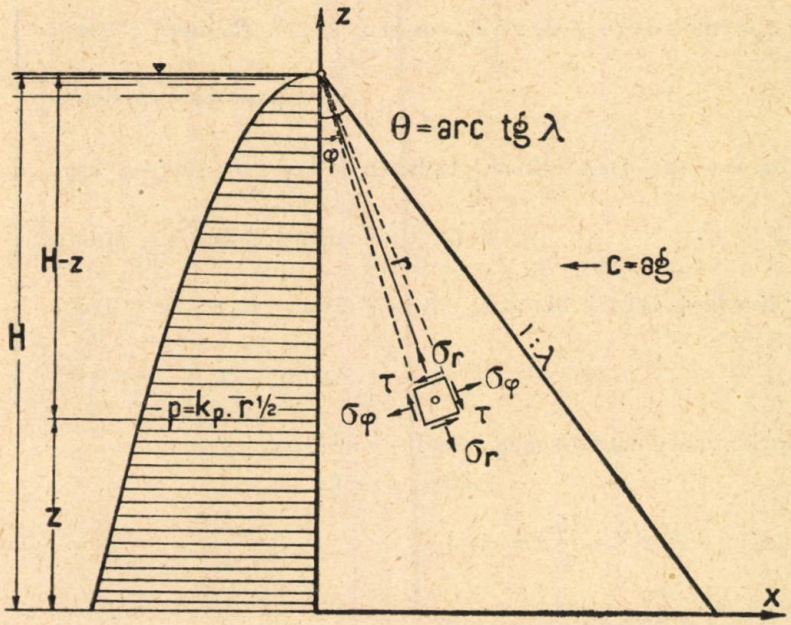


Fig. 5

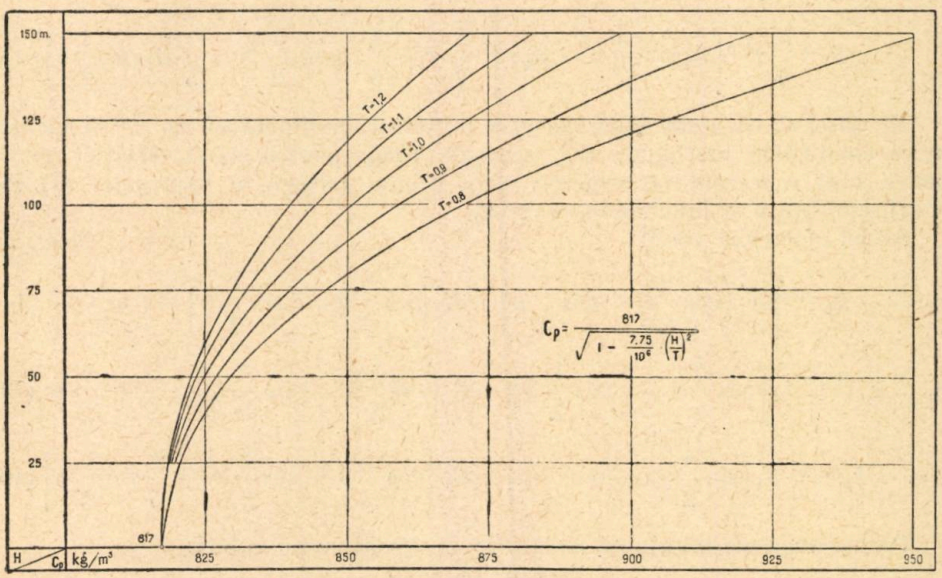


Fig. 6. — Coeficientul C_p pentru diverse valori H şi T.

eforturile fiind:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\varphi &= (n+1)(n+2)\, r^n \Big[A_n \cos(n+2)\varphi + B_n \sin(n+2)\varphi + \\
&\qquad + C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \Big] \\
\sigma_r &= -(n+1)(n+2)\, r^n \Big[A_n \cos(n+2)\varphi + B_n \sin(n+2)\varphi + \\
&\qquad + C_n \frac{n-2}{n+2} \cos n\varphi + D_n \frac{n-2}{n+2} \sin n\varphi \Big] \\
\tau &= (n+1)(n+2)\, r^n \Big[A_n \sin(n+2)\varphi - B_n \cos(n+2)\varphi + \\
&\qquad + C_n \frac{n}{n+2} \sin n\varphi - D_n \frac{n}{n+2} \cos n\varphi \Big]
\end{aligned}\right\} \quad (4)'$$

Condițiile marginale (5) menținându-se aceleași, avem

Pentru $\varphi = 0$

$$\sigma_\varphi = -k_p r^{1/2} = \frac{15}{4} r^{1/2} (A_1 + C_1)$$

$$\tau = \frac{15}{4} r^{1/2} \left(B_1 + \frac{1}{5} D_1 \right) = 0$$

Pentru $\varphi = \theta$

$$\sigma_\varphi = \frac{15}{4} r^{1/2} \left(A_1 \cos\frac{5}{2}\theta + B_1 \sin\frac{5}{2}\theta + C_1 \cos\frac{1}{2}\theta + D_1 \sin\frac{1}{2}\theta \right) = 0$$

$$\tau = \frac{15}{4} r^{1/2} \left(A_1 \sin\frac{5}{2}\theta - B_1 \cos\frac{5}{2}\theta + \frac{1}{5} C_1 \sin\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{5} D_1 \cos\frac{1}{2}\theta \right) = 0$$

Se observă că, dată fiind variația presiunii suplimentare cu $r^{1/2}$ și menținerea condițiilor marginale (5), soluțiile finale pentru cazul variației parabolice sunt reprezentate respectiv prin primul termen al expresiilor (7), (8) și (9), constanta k_e înlocuindu-se cu k_p.

Astfel eforturile vor fi:

$$\sigma_\varphi = -k_p r^{1/2} \left[A_1' \left(\cos\frac{5}{2}\varphi - \cos\frac{1}{2}\varphi \right) - B_1' \left(\sin\frac{5}{2}\varphi - 5 \sin\frac{1}{2}\varphi \right) + \cos\frac{1}{2}\varphi \right] \quad (14)$$

$$\sigma_r = k_p r^{1/2} \left[A_1' \left(\cos\frac{5}{2}\varphi + \frac{3}{5}\cos\frac{1}{2}\varphi \right) - B_1' \left(\sin\frac{5}{2}\varphi + 3 \sin\frac{1}{2}\varphi \right) - \frac{3}{5}\cos\frac{1}{2}\varphi \right] \quad (15)$$

$$\tau = -k_p r^{1/2} \left[A_1' \left(\sin\frac{5}{2}\varphi - \frac{1}{5}\sin\frac{1}{2}\varphi \right) + B_1' \left(\cos\frac{5}{2}\varphi - \cos\frac{1}{2}\varphi \right) + \frac{1}{5}\sin\frac{1}{2}\varphi \right] \quad (16)$$

Pe paramentele barajului, eforturile au următoarele valori:

Amonte ($\varphi = 0$)

$$\sigma_{\varphi,0} = -k_p r^{1/2} \quad (17)$$

$$\sigma_{r,0} = k_p r^{1/2} \frac{1}{5}(8A_1' - 3) = -k_p r^{1/2} \frac{\lambda^2 - 5\sqrt{1+\lambda^2} - 7}{7\lambda^2 + \sqrt{1+\lambda^2} - 1} = k_p r^{1/2} \sigma_{r,0}' \quad (18)$$

$$\tau_0 = 0 \quad (16)'$$

Aval ($\varphi = \theta$)

$$\sigma_{\varphi,\theta} = 0 \quad (14)'$$

$$\sigma_{r,\theta} = k_p r^{1/2}\left[A_1'\left(\cos\frac{5}{2}\theta - \frac{3}{5}\cos\frac{1}{2}\theta\right) - B_1'\left(\sin\frac{5}{2}\theta + 3\sin\frac{1}{2}\theta\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{5}\cos\frac{1}{2}\theta\right] = -k_p r^{1/2} 4 \frac{\lambda^2 + 2\sqrt{1+\lambda^2} + 1}{7\lambda^2 + \sqrt{1+\lambda^2} - 1} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{2\sqrt{1+\lambda^2}}} = k_p r^{1/2} \sigma_{r,\theta}' \quad (19)$$

$$\tau_\theta = 0 \quad (16)''$$

Menționăm că $\sigma_{r,0}'$ și $\sigma_{r,\theta}'$ sunt aceiași cu cei din expresiile (11) și (12), deci pot fi citiți în tablourile Nr. 3 și Nr. 4 sau în diagrama din figura 2.

*

In calculele curente se analizează, înafară de eforturile principale deduse mai sus, și eforturile orizontale (σ_x, τ) și verticale (σ_z, τ). Relațiile de transformare sunt cele cunoscute:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \sin^2\varphi + \sigma_\varphi \cos^2\varphi + 2\tau \sin\varphi\cos\varphi \\ \sigma_z &= \sigma_r \cos^2\varphi + \sigma_\varphi \sin^2\varphi - 2\tau \sin\varphi\cos\varphi \\ \tau_x &= (\sigma_\varphi - \sigma_r)\sin\varphi\cos\varphi + \tau(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Exprimând în coordonate cartesiene, eforturile iau următoarele valori pe cele două paramente:

Amonte ($\varphi = 0$ și $r = H - z$)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -k_p (H-z)^{1/2} \\ \sigma_z &= k_p (H-z)^{1/2} \sigma_{r,0}' \\ \tau &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Aval ($\varphi = \theta$ și $r = \dfrac{H-z}{\cos\theta}$)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= k_p (H-z)^{1/2} \sigma_{r,\theta}' \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^{3/4}} = k_p (H-z)^{1/2} \sigma_x' \\ \sigma_z &= k_p (H-z)^{1/2} \sigma_{r,\theta}' \frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/4}} = k_p (H-z)^{1/2} \sigma_z' \\ \tau &= -k_p (H-z)^{1/2} \sigma_{r,\theta}' \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^{3/4}} = -k_p (H-z)^{1/2} \tau' \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Valorile lui σ_x', σ_z', τ' se pot citi în tabloul Nr. 5 sau în diagrama din figura 7.

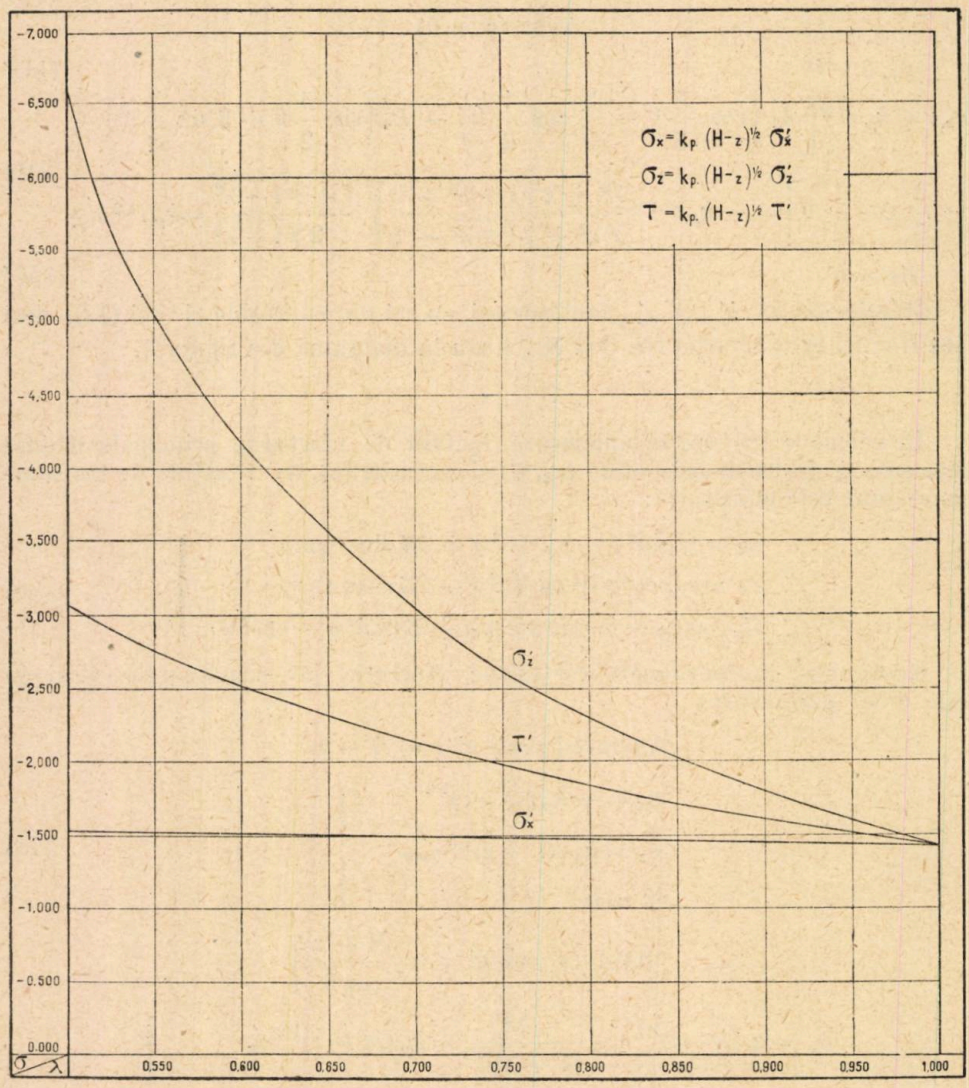


Fig. 7.—σ_x, σ'_z, τ' pentru diverse valori λ.

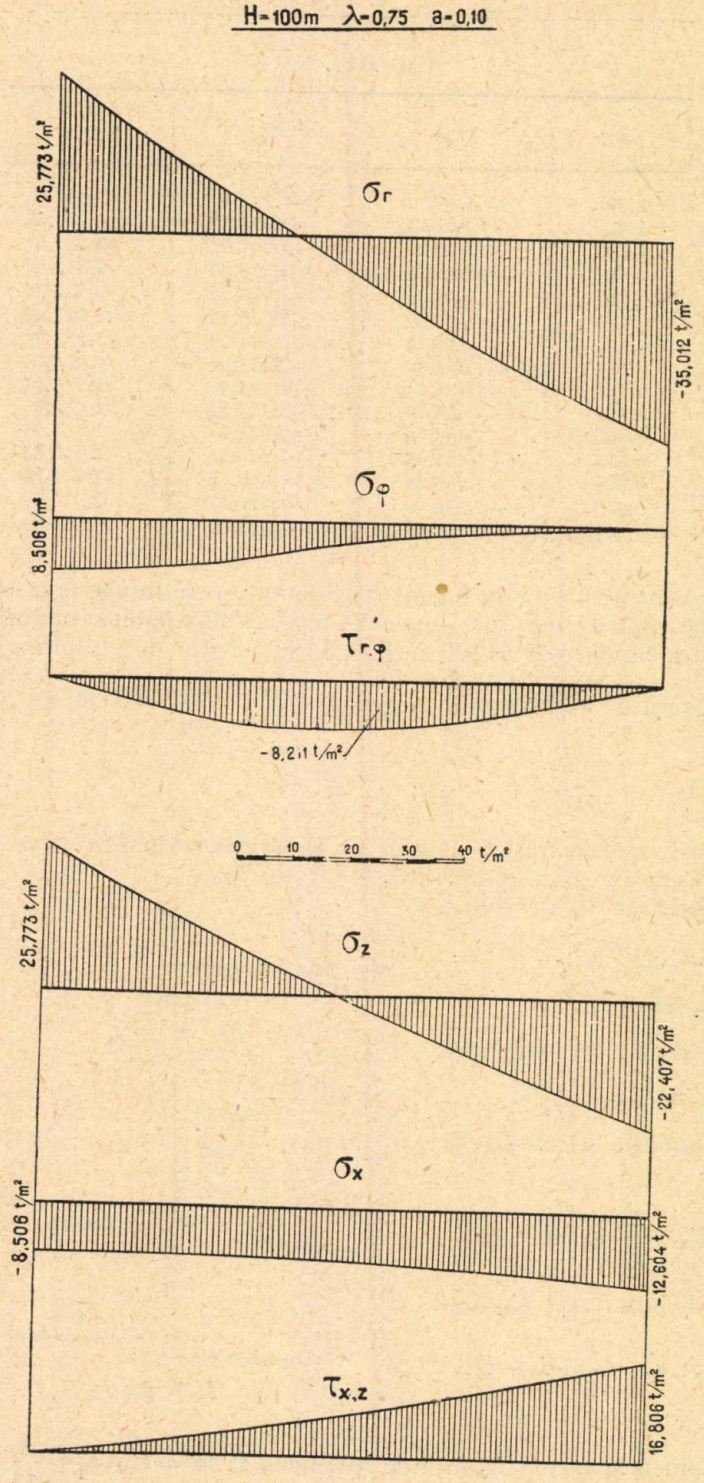


Fig. 8. — Repartiția eforturilor produse de suprapresiunea apei în suprafața de fundație a unui baraj de greutate cu H = 100 m.

TABLOUL Nr. 5

λ	σ'_x	σ'_z	τ'
0,500	—1,536.39	—6,145.40	—3,072.70
0,550	—1,525.62	—5,043.38	—2,773.86
0,600	—1,514.71	—4,207.51	—2,524.51
0,650	—1,503.69	—3,559.03	—2,313.36
0,700	—1,492.65	—3,046.22	—2,132.34
0,725	—1,487.22	—2,829.42	—2,051.33
0,750	—1,481.74	—2,634.22	—1,975.68
0,775	—1,476.37	—2,458.06	—1,905.00
0,800	—1,471.04	—2,298.49	—1,838.78
0,825	—1,465.74	—2,153.52	—1,776.65
0,850	—1,460.56	—2,021.53	—1,718.31
0,875	—1,455.43	—1,900.95	—1,663.33
0,900	—1,450.34	—1,790.56	—1,611.51
0,950	—1,440.49	—1,596.12	—1,516.30
1,000	—1,431.01	—1,431.01	—1,431.01

In diagramele din figura 8 sunt reprezentate rezultatele unui calcul condus după formulele date mai sus — calcul efectuat de-a-lungul suprafeței de fundație a unui baraj cu $H = 100$ m, $\lambda = 0{,}75$, solicitat de o suprapresiune parabolică produsă de un cutremur de gradul IX $\left(a = \frac{c}{g} = 0{,}10\right)$.

★

Folosind metoda statică elementară, eforturile normale verticale σ_z produse de aceeași suprapresiune parabolică, vor fi (fig. 9):

— presiunea în secțiunea z: $p = a\, C_p\, H^{1/2} (H - z)^{1/2} = k_p (H - z)^{1/2}$

— presiunea în secțiunea $z = 0$ $p_0 = a\, C_p\, H$

— suprafața parabolei pe înălțimea $H - z$: $C_{az} = \frac{2}{3} k_p (H - z)^{3/2}$

— ordonata forței C_{az} față de cota z: $z'_g = \frac{2}{5} (H - z)$

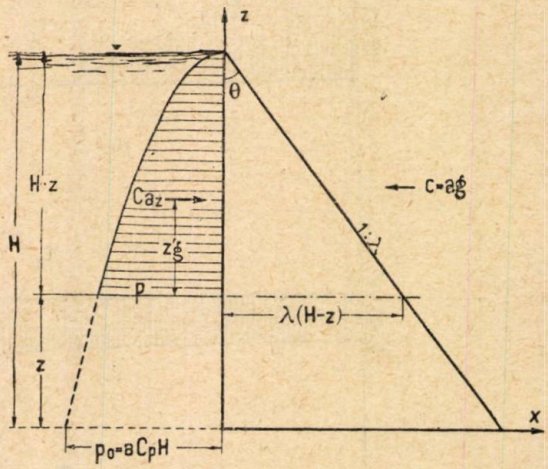


Fig. 9

— momentul forței C_{az} față de secțiunea z: $M = C_{az} \cdot z'_g = \frac{4}{15} k_p (H - z)^{5/2}$

— modulul rezistent $W = \frac{1}{6} \lambda^2 (H - z)^2$

— efortul $\sigma_z = \pm \frac{M}{W}$ va fi:

$$\sigma_z = \pm \frac{8}{5} \frac{k_p}{\lambda^2} (H - z)^{1/2} \qquad (23)$$

★

Cu formulele (11), (12), (13), având la bază repartiția eliptică, și cu (18), (19), (23), având la bază repartiția parabolică a suprapresiunilor, s'au efectuat o serie de calcule referitoare la trei baraje, înalte de 50 m, 100 m și 150 m, solicitate de un cutremur de gradul IX $\left(a = \frac{c}{g} = 0{,}10\right)$. Pentru alte valori a ale lui a, eforturile se vor modifica în raportul $\frac{a'}{a}$. Rezultatele sunt date în tablourile Nr. 6 și Nr. 7.

TABLOUL Nr. 6

Înălțimea barajului H	$\frac{H - z}{H}$	Repartiție eliptică σ_r amonte (t/m²)		Repartiție parabolică σ_r amonte (t/m²)	
		metoda statică	metoda elastică	metoda statică	metoda elastică
50 m	0,200	5,738	6,200	5,248	5,590
	0,400	8,017	8,590	7,421	7,905
	0,600	9,589	10,294	9,089	9,681
	0,800	10,789	11,616	10,495	11,179
	1,000	11,734	12,672	11,734	12,499
100 m	0,200	11,831	12,786	10,820	11,526
	0,400	16,532	17,713	15,303	16,300
	0,600	19,774	21,228	18,742	19,964
	0,800	22,248	23,952	21,641	23,052
	1,000	24,195	26,130	24,195	25,773
150 m	0,200	18,759	20,273	17,157	18,275
	0,400	26,213	28,085	24,263	25,845
	0,600	31,354	33,657	29,716	31,653
	0,800	35,276	37,979	34,313	36,550
	1,000	38,361	41,432	38,361	40,864

Din desfășurarea cifrelor rezultă că:

— de-a-lungul paramentului amonte, eforturile σ_r calculate prin elasticitate au valori mai mari decât cele calculate prin metoda elementară și invers de-a-lungul paramentului aval;

— de-a-lungul celor două paramente, diferențele mici între eforturile σ_r calculate prin elasticitate în cele două ipoteze se reduc pe măsură ce ne

TABLOUL Nr. 7

Înălțimea barajului H	$\frac{H-z}{H}$	Repartiție eliptică σ_r aval (t/m²)		Repartiție parabolică σ_r aval (t/m²)	
		metoda statică	metoda elastică	metoda statică	metoda elastică
50 m	0,200	— 8,965	— 8,377	— 8,200	— 7,593
	0,400	—12,547	—11,539	—11,595	—10,738
	0,600	—14,983	—13,744	—14,202	—13,152
	0,800	—16,859	—15,409	—16,398	—15,187
	1,000	—18,333	—16,697	—18,333	—16,982
100 m	0,200	—18,485	—17,274	—16,906	—15,658
	0,400	—25,832	—23,794	—23,911	—22,143
	0,600	—30,897	—28,340	—29,284	—27,120
	0,800	—34,763	—31,773	—33,814	—31,315
	1,000	—37,804	—34,430	—37,804	—35,012
150 m	0,200	—29,311	—27,390	—26,808	—24,826
	0,400	—40,958	—37,727	—37,911	—35,109
	0,600	—48,991	—44,935	—46,431	—43,000
	0,800	—55,120	—50,378	—53,614	—49,652
	1,000	—59,940	—54,590	—59,940	—55,512

apropiem de secțiunea de fundație; la piciorul amonte acestea sunt de ordinul — 1,38%, la piciorul aval de + 1,66%.

La baza verificărilor curente stând eforturile ce apar la piciorul amonte și aval al barajului, observăm că, indiferent de ipoteza de repartiție a presiunii suplimentare a apei, cifrele calculate prin elasticitate sunt sensibil aceleași. Vom prefera formulele deduse în ipoteza repartiției parabolice care în același timp sunt exacte și ușor de aplicat.

Eforturile din corpul barajului pot fi calculate prin formulele (14), (15), (16), repartiția lor fiind diferită de cea lineară după cum se vede și din diagramele din figura 8.

B. EFORTURI PRODUSE DE INERȚIA MASSEI PROPRII

1. *Accelerație seismică orizontală*

Inafară de solicitările produse de inerția massei de apă, la o accelerație seismică dirijată din aval spre amonte, corpul barajului mai este solicitat de o serie de forțe unitare cauzate de inerția massei proprii. Pentru a determina eforturile corespunzătoare, considerăm ecuațiile de bază în sistemul de axe cartesian (fig. 10):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial z}=-m_x \\ &\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau}{\partial x}=-m_z \\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_z)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x+\sigma_z)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Dacă notăm greutatea specifică a betonului cu γ_b, forţele massice unitare vor fi:

$$m_x = a\gamma_b \; ; \quad m_z = 0$$

Forţele massice m_x şi m_z nefiind funcţii de coordonatele curente, eforturile vor fi funcţii lineare de acestea:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 x + b_1 (H - z) \\ \sigma_z &= a_2 x + b_2 (H - z) \\ \tau &= a_3 x + b_3 (H - z) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Condiţiile marginale ale barajului astfel solicitat sunt:

$$\left.\begin{aligned} &\text{pentru } x = 0 \qquad \sigma_x = 0 \qquad \tau = 0 \qquad \text{(paramentul amonte)} \\ &\text{pentru } x = \lambda (H - z) \qquad \sigma_x = -\lambda\tau \qquad \tau = -\lambda\sigma_z \qquad \text{(paramentul aval)} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Introducând aceste valori în ecuaţiile (24) şi (25) şi rezolvând sistemul astfel obţinut, rezultă:

$$a_1 = -a\gamma_b$$

$$a_2 = -\frac{2a\gamma_b}{\lambda^2}$$

$$a_3 = \frac{a\gamma_b}{\lambda}$$

$$b_1 = 0 \qquad b_2 = \frac{a\gamma_b}{\lambda} \qquad b_3 = 0$$

şi deci:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -a\gamma_b x \\ \sigma_z &= \frac{a\gamma_b}{\lambda}\left(H - z - \frac{2x}{\lambda}\right) \\ \tau &= \frac{a\gamma_b}{\lambda} x \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

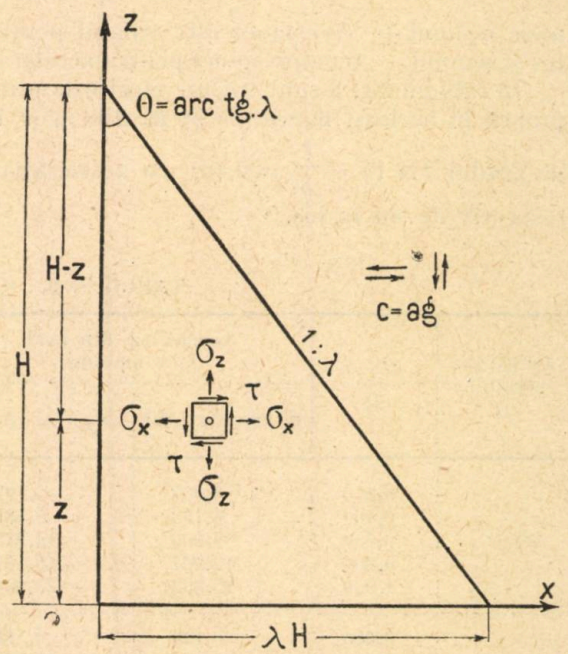


Fig. 10

Dacă acceleraţia cutremurului este dirijată în sens invers, eforturile deduse mai sus vor schimba şi ele de semn.

Pentru determinarea eforturilor principale corespunzătoare folosim relaţiile cunoscute:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau^2} \\ \tau_{max} &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau^2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Pe paramente, acestea iau valorile:

Amonte ($x = 0$)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_z = \frac{a\gamma_b}{\lambda}(H - z) \\ \sigma_2 &= \sigma_x = 0 \\ \tau_{max} &= \pm \frac{1}{2}\sigma_1 \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Aval ($x = \lambda(H - z)$)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -a\gamma_b\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)(H - z) \\ \sigma_2 &= 0 \\ \tau_{max} &= \pm \frac{1}{2}\sigma_1 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

2. *Accelerație seismică verticală*

In ceea ce privește eforturile produse de inerția massei proprii la un cutremur cu accelerația verticală $c = ag$, se poate deduce cu ușurință că singurul efort ce apare în corpul barajului este

$$\sigma_z = \pm a\gamma_b\left(H - z - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (31)$$

unde semnul + (tensiune) este valabil pentru accelerația dirijată de sus în jos și semnul — (compresiune) pentru accelerație de jos în sus.

In tabloul Nr. 8 sunt trecute eforturile principale produse de inerția massei proprii în aceleași baraje de 50 m, 100 m și 150 m înălțime, de un cutremur de gradul IX ($a = \frac{c}{g} = 0{,}10$), cu accelerația dirijată din aval spre amonte, respectiv de sus în jos.

TABLOUL Nr. 8

Înălțimea barajului H	$\frac{H-z}{H}$	Accelerație din aval spre amonte		Accelerație de sus în jos	
		σ_1 amonte t/m²	σ_1 aval t/m²	σ_1 amonte t/m²	σ_1 aval t/m²
50 m	0,200	3,067	—4,792	2,300	0
	0,400	6,133	— 9,583	4,600	0
	0,600	9,200	—14,375	6,900	0
	0,800	12,267	—19,167	9,200	0
	1,000	15,333	—23,958	11,500	0
100 m	0,200	6,133	— 9,583	4,600	0
	0,400	12,267	—19,167	9,200	0
	0,600	18,400	—28,750	13,800	0
	0,800	24,533	—38,333	18,400	0
	1,000	30,667	—47,917	23,000	0
150 m	0,200	9,200	—14,375	6,900	0
	0,400	18,400	—28,750	13,800	0
	0,600	27,600	—43,125	20,700	0
	0,800	36,800	—57,500	27,600	0
	1,000	46,000	—71,875	34,500	0

C. DIMENSIONAREA BARAJELOR DE GREUTATE SOLICITATE DE CUTREMUR

In studiul amintit anterior, s'a dat o formulă de dimensionare a barajelor de greutate la cutremur în ipoteza simplificatoare că împingerea suplimentară a apei este $C_a = \frac{1}{2} a \gamma H^2$ şi că repartiţia acestei forţe este eliptică. Tangenta unghiului dela vârf $\operatorname{tg} \theta = \lambda$ a rezultat:

$$\lambda = \frac{a \gamma_b}{2 \gamma_b'} + \sqrt{\left(\frac{a \gamma_b}{2 \gamma_b'}\right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma_b'}\left(1 + \frac{4}{\pi} a\right)} \tag{32}$$

Această formulă s'a dedus punând condiţia ca, ţinând seama de toate solicitările, inclusiv cele produse de cutremur, rezultanta să treacă prin extremitatea aval a sâmburelui central (condiţie echivalentă cu aceea ca la piciorul amonte al barajului efortul normal vertical să fie nul).

Să reluăm această problemă, folosind noile rezultate obţinute în lucrarea de faţă.

Tangenta unghiului θ se poate determina punând condiţia ca suma eforturilor verticale la piciorul amonte al barajului să fie nulă. In acest punct ($x = 0$, $z = 0$) eforturile sunt:

— efortul provenit din solicitările obişnuite (împingerea apei, greutatea proprie, subpresiuni), după T ö l k e:

$$\sigma_z = \gamma\left(\alpha\beta + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\gamma_b}{\gamma}\right) H \tag{a}$$

unde α reprezintă cantitatea de agregate dintr'un metru cub de beton şi β porozitatea liantului;

— efortul provenit din inerţia massei de apă (acceleraţia seismică dirijată din aval în amonte şi repartiţia suprapresiunilor parabolică, conform concluziilor de mai sus):

$$\sigma_z = k_p H^{1/2} \sigma_{r,0}' = - k_p H^{1/2} \frac{\lambda^2 - 5\sqrt{1+\lambda^2} - 7}{7\lambda^2 + \sqrt{1+\lambda^2} - 1} \tag{b}$$

— efortul provenit din inerţia massei proprii:

$$\sigma_z = \frac{a \gamma_b}{\lambda} H \tag{c}$$

Insumând cele trei expresii (a), (b) şi (c) şi egalând cu zero, ecuaţia rezultă complet incomodă din cauza formei în λ a lui $\sigma_{r,0}'$.

Pentru a elimina această dificultate se observă că dacă se compară expresia efortului σ_z dedusă prin elasticitate (21) şi respectiv prin metoda elementară (23), pe intervalul valorilor frecvente ale lui λ, cuprins între 0,650 şi 0,850, putem înlocui fără a comite erori factorul $\sigma_{r,0}'$ cu $1{,}0625 \frac{8}{5\lambda^2} = \frac{1{,}70}{\lambda^2}$ (fig.11). In acest mod condiţia enunţată mai sus devine:

$$\gamma\left(\alpha\beta+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{\gamma_b}{\gamma}\right)H+\frac{a\gamma_b}{\lambda}H+1{,}70\frac{k_p}{\lambda^2}H^{1/2}=0$$

sau înlocuind

$$k_p=a\ C_p H^{1/2}$$

avem:

$$\gamma\left(\alpha\beta+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{\gamma_b}{\gamma}\right)+\frac{a\gamma_b}{\lambda}+1{,}70\frac{a\ C_p}{\lambda^2}=0 \tag{33}$$

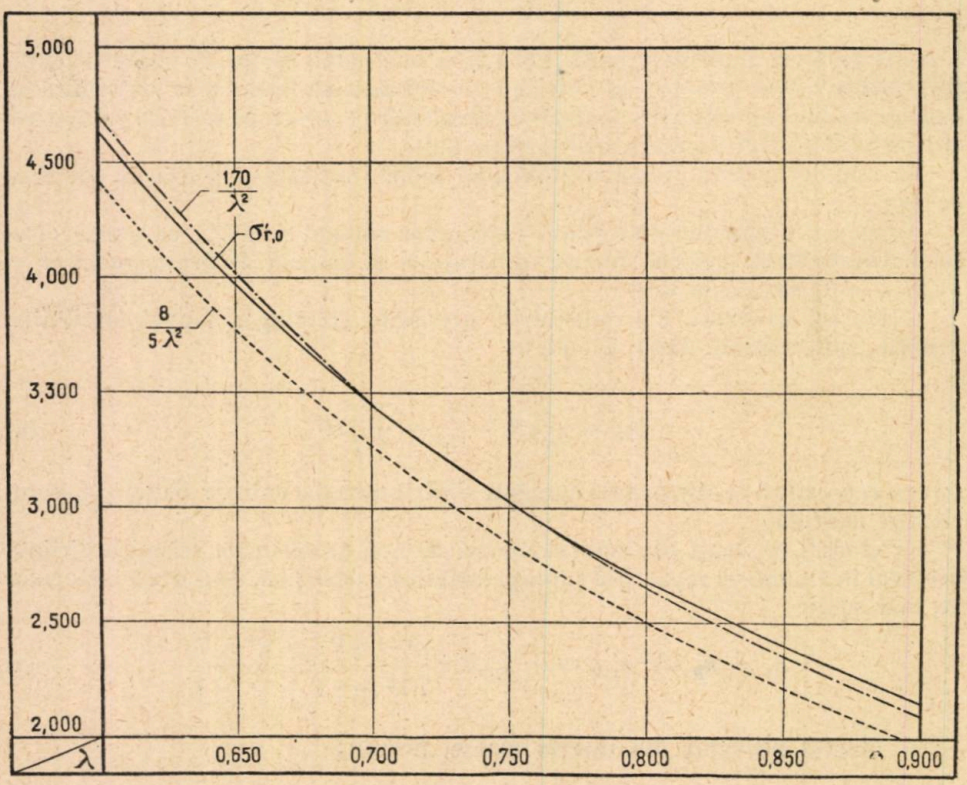


Fig. 11. — Comparație între $\sigma'_{r,0}$ și $1{,}70/\lambda^2$.

$$\lambda^2-\frac{a\gamma_b}{\gamma'_b}\lambda-\frac{\gamma+1{,}70\ a\ C_p}{\gamma'_b}=0 \qquad (\gamma'_b=\gamma_b-\alpha\beta\gamma)$$

Soluția ecuației (33) fiind:

$$\lambda=\frac{a\gamma_b}{2\gamma'_b}+\sqrt{\left(\frac{a\gamma_b}{2\gamma'_b}\right)^2+\frac{\gamma+1{,}70\ a\ C_p}{\gamma'_b}} \tag{34}$$

In cazul repartiţiei parabolice, echivalentul coeficientului C_p necorectat cu perioada T a vibraţiilor seismice este $\frac{3}{4}\gamma$. Inlocuindu-l sub această formă în fracţia de sub radical, aceasta devine

$$\frac{\gamma + 1{,}70\, a\, C_p}{\gamma_b'} = \frac{\gamma}{\gamma_b'}(1 + 1{,}275\, a)$$

Or coeficientul 1,275 este identic cu $\frac{4}{\pi}$ din formula (32) şi deci fără corectură formulele (32) şi (34) ar fi identice. Calculând pe λ după formula (34) obţinem valori mai mari, însă corecte.

Astfel, pentru un baraj cu $H = 100$ m, $\gamma_b = 2{,}2$ t/m^3 şi $\gamma_b' = 1{,}8$ t/m^3, la un cutremur de gradul IX ($a = 0{,}1$), calculând pe λ prin formula (32) rezultă $\lambda = 0{,}855$, iar cu formula (34), $\lambda = 0{,}860$.

Din cele de mai sus rezultă că pentru evaluări rapide, cifrele ce se citesc în nomograma reprezentând formula (32) sunt satisfăcătoare, urmând ca determinarea exactă a lui λ să se efectueze prin formula (34).

УСИЛИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕМ, В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПЛОТИНАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этом очерке определяются усилия, появляющиеся в теле прямой гравитационной плотины, когда она подвергается действию силы инерции, вызванной землетрясением.

Дополнительные влияния, вызванные ускорением землетрясения $c=ag$, являются составной частью ускорения гравитации и получаются вследствие инерции массы задержанной воды и массы плотины.

Для первой категории влияний были расчитаны усилия в предположении эллиптического распределения добавочного давления воды и в предположении параболического распределения их.

Сравнивая результаты, полученные посредством упругости, с результатами, полученными посредством статического метода, видим, что :

— Распределение усилий в теле плотины не линейное.

— Усилия, расчитанные посредством упругости, имеют большие значения вдоль верхней грани, чем усилия, выведенные по статическому методу, что влияет на размер плотины.

— Рекомендуется расчитывать усилия по формулам (14), (15), (16), выведенным в предположении параболического распределения.

Для второй категории влияний были расчитаны усилия, появляющиеся при горизонтальных и вертикальных ускорениях, имеющих линейное распределение (27) и (31).

При применении выражений усилий, вызванных землетрясением (18) и (29), вертикальное усилие равнодействующее у верхней грани должно быть равным нулю.

Отсюда вытекает, что формула распределения находится при помощи выражения (34).

EFFORTS PRODUITS PAR LE TREMBLEMENT DE TERRE DANS LES BARRAGES-POIDS

(RÉSUMÉ)

Dans cette étude, on détermine les efforts qui agissent à l'intérieur d'un barrage poids, sollicité par les forces d'inertie causées par le tremblement de terre.

Les forces supplémentaires causées par l'accélération séismique $c = ag$, considérée comme une fraction de l'accélération de la gravitation, sont dues à l'inertie de l'eau retenue et à l'inertie de la masse du barrage.

Pour la première catégorie de sollicitations, on a calculé les efforts dans deux hypothèses: la première suppose une répartition elliptique et la seconde une répartition parabolique de l'excès de poussée dû à l'eau retenue. En comparant les résultats obtenus par l'Elasticité avec ceux déterminés par la méthode statique, on constate que:

— la répartition des efforts à l'intérieur du barrage n'est pas linéaire;

— au long du parement amont les efforts calculés par l'Elasticité ont des valeurs plus grandes que celles calculées par la méthode statique, fait qui va influencer les dimensions du barrage;

— il est indiqué de calculer les efforts d'après les formules (14), (15), (16), déterminées dans l'hypothèse de la répartition parabolique.

Pour la seconde catégorie de sollicitations, on a calculé les efforts créés par des accélérations horizontales et verticales. Leur répartition a une allure linéaire (27) et (31).

En utilisant les expressions des efforts produits par le tremblement de terre (18) et (29), on a mis la condition que l'effort vertical résultant au pied amont du barrage soit nul. L'inclinaison du parement aval (λ) est donnée par l'expression (34).

BIBLIOGRAFIE

1. Westergaard H. M., *Water pressures on dams during earthquakes.* Trans. Am. Soc. Civ. Engrs, 1933, v. 98.
2. S. Timoshenko, *Théorie de l'Elasticité.* Paris, 1948.
3. M. M. Grişin, *Construcţii Hidrotehnice.* Moscova, 1947.
4. F. Tölke, *Talsperren.* Berlin, 1938.
5. R. Prişcu, *Efectul cutremurului asupra barajelor de greutate şi în arc pur.* St. şi Cerc. de Mecanică şi Metalurgie, t. II, Nr. 2—3, 1951, p. 111.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

STABILITATEA DINAMICĂ A CONSTRUCŢIILOR RIGIDE PE STÂLPI SAU PILOŢI

DE

M. MIŞICU

La anumite construcţii nu se pot evalua solicitările efective la care sunt supuse, fie că ele se datoresc unei conlucrări a întregului ansamblu, fie unei stări complexe de încărcare dinamică. In aceste cazuri se recurge la o supradimensionare a elementelor rezistente. In cazul construcţiilor importante, cum ar fi cheiurile, estacadele, pilele de poduri, fundaţiile de maşini, etc., construcţii masive care suportă încărcări dinamice complexe, supradimensionarea este considerată corespunzătoare gradului de importanţă al acestor ansambluri, fiind destinate a fi utilizate pentru un timp îndelungat şi sub acţiunea altor factori decât cei de calcul. Aceste măsuri de precauţie se referă atât la construcţia propriu zisă cât şi la elementele de susţinere care de obicei sunt utilizate la o fracţiune scăzută din sarcina portantă.

In cazul încărcărilor dinamice o consolidare rezultată din supradimensionare poate însă duce la mărirea excesivă a coeficienţilor de impact. De asemenea, dacă poate exista pericol de rezonanţă cu încărcări periodice, de multe ori prin rigidizarea construcţiei, se produce o coincidenţă între frecvenţele proprii de vibraţie ale construcţiei şi cele de excitaţie. Pentru aceleaşi motive, coeficientul de siguranţă la stabilitate al ansamblului ar putea să scadă.

In acest sens, calculul ar avea scopul de a permite determinarea condiţiilor de stabilitate dinamică în ansamblu a acestor construcţii, constituind un procedeu practic de verificare la sarcini dinamice cum ar fi valurile, vântul, convoaiele de pe poduri, cutremurul, şocul vaselor, sarcinile periodice ale maşinilor, etc. Pentru aceasta sunt necesare următoarele caracteristici ale stabilităţii dinamice pe care le stabileşte metoda de calcul expusă:

— Legătura între sarcinile critice din elementele de susţinere şi frecvenţele de excitaţie.

— Coeficienţii de impact ai sarcinilor exterioare în funcţie de frecvenţele critice şi de excitaţie.

— Coeficientul de siguranţă la stabilitate dinamică al ansamblului în funcţie de coeficienţii de siguranţă la stabilitate dinamică, de sarcinile piloţilor izolaţi şi de frecvenţa de excitaţie.

Cu ajutorul acestor elemente se poate verifica siguranţa în privinţa flambajului, rezonanţei, sau faptul dacă rezistenţele admisibile din elementele de susţinere nu sunt depăşite din cauza impactului.

I. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR DE STABILITATE DINAMICĂ

Notând condițiile de echilibru dinamic ale construcției rigide, acționate de sarcinile exterioare și reacțiile din capetele superioare ale elementelor de susținere, se obține un sistem de ecuații din care se pot deduce caracteristicile stabilității. Pentru aceasta trebue determinate în prealabil reacțiile din capetele elementelor de susținere cu ajutorul soluțiilor ecuațiilor vibrațiilor din piloți sau stâlpi.

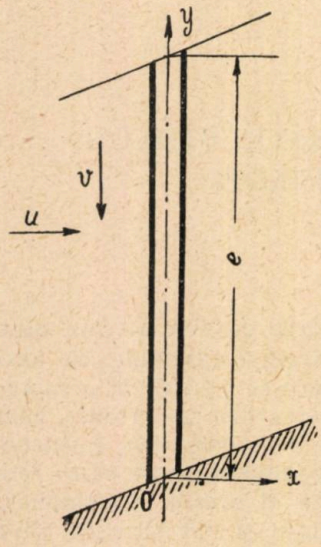


Fig. 1

Piloții sau stâlpii sunt considerați repartizați în plane paralele, astfel încât problema este redusă în plan.

1. *Vibrațiile piloților cu eforturi axiale.* Piloții (stâlpii), orientați după direcții oarecare suportă eforturile axiale p.

Aceste eforturi se determină în prealabil după metode obișnuite.

Se consideră că în ecuația vibrațiilor transversale, variațiile eforturilor sunt neglijabile în raport cu variațiile eforturilor de deformare statică. Intr'adevăr, în cazul construcțiilor rigide, surplusul de eforturi transmise direct în piloți în urma acțiunii dinamice este mic în raport cu eforturile statice.

De asemenea, datorită marii deosebiri între dimensiunile transversale și longitudinale ale piloților, vom considera că vibrațiile transversale și cele longitudinale nu se influențează, astfel încât, la stabilirea ecuațiilor de vibrație, se vor putea calcula separat.

In aceste condiții pentru o secțiune Ω, un moment de inerție I și o densitate γ a elementelor de susținere, ecuația diferențială a vibrațiilor transversale u se obține, punând condiția ca lucrul mecanic elementar (fig. 1):

$$L = \frac{1}{2}\left[EJ\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2 + pu\cdot\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{\gamma}{g}\,\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] \tag{1.1}$$

să fie minim (relația lui Euler):

$$\frac{d^2}{dy^2}\cdot\frac{d^2L}{d\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)} + \frac{dL}{dy} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{dL}{d\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d^4u}{dy^4} + \frac{P}{EI}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\gamma\Omega}{gEI}\frac{\partial^2u}{\partial t^2} = 0. \tag{1.3}$$

Soluția ecuației (1.3) fiind:

$$u = (A\sin\beta_1 y + B\cos\beta_1 y + Csh\,\beta_2 y + Dch\,\beta_2 y)\sin\omega t \tag{1.4}$$

valorile β_1 și β_2 îndeplinesc condițiile:

$$\beta_1^4 - \frac{P}{EI}\beta_1^2 - \frac{\gamma\Omega}{gEI}\omega^2 = 0 \tag{1.5}$$

$$\beta_2^4 + \frac{P}{EI}\beta_2^2 - \frac{\gamma\Omega}{gEI}\omega^2 = 0. \tag{1.6}$$

Intru cât β_1 și β_2 sunt reali, valorile lor se deduc luând soluțiile reale din (1.5) și (1.6):

$$\beta_1^2 = \beta_0^2(\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha) \tag{1.7}$$

$$\beta_2^2 = \beta_0^2(\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha) \tag{1.8}$$

$$\beta_0^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{gE}} \cdot \frac{\omega}{i}; \quad i^2 = \frac{I}{\Omega} \tag{1.9}$$

$$\alpha = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{p/P}{\beta_0^2 l^2}; \quad P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{1.10}$$

In mod analog, pornind dela ecuația vibrațiilor longitudinale:

$$\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{\gamma}{gE} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{1.11}$$

se obține pentru vibrațiile longitudinale expresia:

$$v = (A' \sin \delta y + B' \cos \delta y) \sin \omega t; \; \delta = \sqrt{\frac{\gamma}{gE}}\,\omega. \tag{1.12}$$

2. *Determinarea reacțiilor în capetele piloților.* In ecuațiile precedente constantele A, B, C, D, A', B', se determină punând condițiile de încastrare ale piloților la capete. Se presupune că piloții sunt încastrați în radier astfel, încât în urma unei deplasări orizontale a radierului capetele piloților se deplasează pe orizontală cu $a \sin \omega t$, iar în urma unei rotații generale $c \sin \omega t$, fibra medie a piloților la încastrare în radier este înclinată cu unghiul $c \sin \omega t$ față de poziția ei inițială (fig. 2).

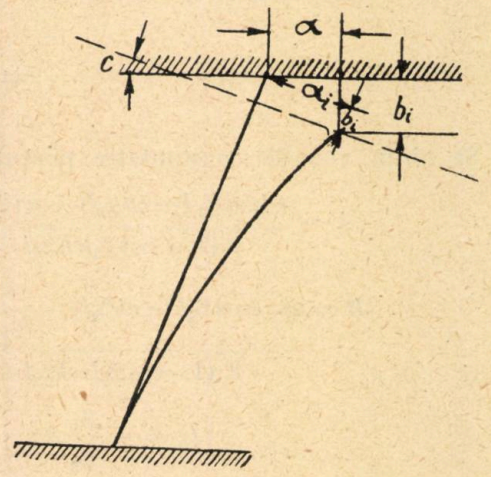


Fig. 2

Deplasarea pe verticală a capătului pilotului va fi dată de relația

$$b_i \sin \omega t = (b + cx_i) \sin \omega t \tag{2.1}$$

$b \sin \omega t$ fiind deplasarea pe verticală a centrului de greutate al construcției, iar x_i ordonata capătului pilotului i la axa verticală de greutate (fig. 3).

Deplasările în sensul axei și normalei sunt $b' \sin \omega t$ și $a \sin \omega t$.

Rezultă următoarele condiții la capete ale pilotului i:

pentru $y = 0$ $$u_i = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{du_i}{dy} = 0 \tag{2.3}$$

pentru $y = l$ $$u_i = a \sin \omega t \tag{2.4}$$

$$\frac{du_i}{dy} = c \sin \omega t \tag{2.5}$$

Cu ajutorul acestor relații și ținând seamă că

$$\beta_1^2 \beta_2^2 = \beta_0^4; \quad \beta_1^2 - \beta_0^2 = 2\alpha \beta_0^2. \tag{2.6}$$

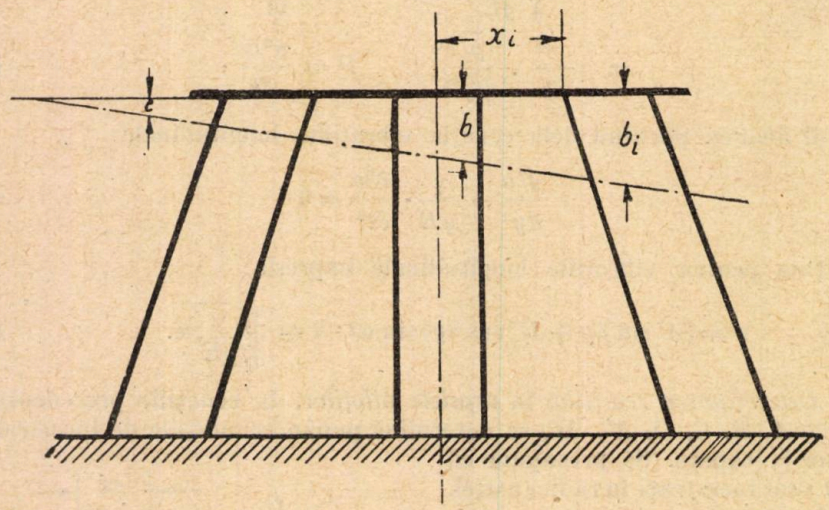


Fig. 3

Se obțin valorile constantelor pilotului i:

$$A = \frac{c(\cos \beta_1 l - ch\, \beta_2 l) + a(\beta_1 \sin \beta_1 l + \beta_2 \cdot sh\, \beta_2 l)}{2(1 - \cos \beta_1 l ch\, \beta_2 l - \alpha \sin \beta_1 l\, sh\, \beta_2 l)} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_0^2} \tag{2.7}$$

$$B = \frac{\alpha\beta_1(\cos \beta_1 l - ch\beta_2 l) - \frac{c}{\beta_2}(\beta_2 \sin \beta_1 l - \beta_1 sh\, \beta_2 l)}{2\,(1 - \cos \beta_1 l \cdot ch\beta_2 l - \alpha \sin\, \beta_1 l \cdot sh\beta_2 l)} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_0^2} \tag{2.8}$$

$$C = -\frac{\beta_1}{\beta_2} A; \quad D = -B \tag{2.9}$$

Expresiile momentului încovoietor $m = -EI \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$ și a forței tăietoare $q = \frac{dm}{dy}$,

la vârful pilotului, rezultă imediat:

$$m = EI\,\beta_0^2\left(ar - \frac{c}{\beta_0}\,s\right)\sin\omega t \tag{2.10}$$

$$q = EI\,\beta_0^3\left(at - \frac{C}{\beta_0}\,\omega\right)\sin\omega t \tag{2.11}$$

unde

$$r = \frac{\sin\beta_1 l\,sh\beta_2 l + \alpha\,(1-\cos\beta_1 l ch\beta_2 l)}{1-\cos\beta_1 l\cdot ch\,\beta_2 l-\alpha\sin\beta_1 l\cdot sh\,\beta_2 l} \tag{2.12}$$

$$s = \frac{\beta_2\sin\beta_1 l\cdot ch\beta_2 l-\beta_1\cos\beta_1 l\cdot sh\beta_2 l}{1-\cos\beta_1 l\cdot ch\beta_2 l-\alpha\sin\beta_1 l\cdot sh\beta_2 l}\sqrt{1+\alpha^2} \tag{2.13}$$

$$t = \frac{\frac{\beta_1}{\beta_0}\sin\beta_1 l\cdot ch\,\beta_2 l + \frac{\beta_2}{\beta_0}\cos\beta_1 l\cdot sh\,\beta_2 l}{1-\cos\beta_1 l\cdot ch\beta_2 l-\alpha\sin\beta_1 l\cdot sh\beta_2 l}\sqrt{1+\alpha^2} \tag{2.14}$$

$$w = \frac{(1+2\alpha^2)\,sin\,\beta_1 l\cdot sh\beta_2 l-\alpha\,(1-\cos\beta_1 l\cdot ch\beta_2 l)}{1-\cos\beta_1 l.ch\beta_2 l-\alpha\sin\beta_1 l\cdot h\beta_2 l} \tag{2.15}$$

In cazul vibrațiilor longitudinale, presupunând un coeficient de pat K_1 sub vârful pilotului, urmează condițiile:

pentru $y = 0$ $\qquad p_i = -K_1 v_i$ (2.16)

pentru $y = l$ $\qquad v_i = -b_i \sin\omega t$ (2.17)

(sensul pozitiv al tasării este în jos).

Ținând seama de (1.12) și de faptul că forța axială din pilot este:

$$p_i = -E\Omega.\frac{dv}{dy} \tag{2.18}$$

se calculează valorile constantelor A', B':

$$A' = -\frac{b_i'}{\sin\varphi+\frac{E\Omega}{K_1}\cdot\frac{\varphi}{l_i}\cos\varphi} \tag{2.19}$$

$$B' = -\frac{b_i'}{\sin\varphi+\frac{E\Omega}{K_1}\cdot\frac{\varphi}{l_i}\cos\varphi}\cdot\frac{E\Omega}{K}\cdot\frac{\varphi}{l_i}\;;\;\varphi=\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}\,\omega l_i \tag{2.20}$$

Cu acestea, reacția axială din capătul pilotului se deduce din (2.18):

$$p_i = \frac{E\Omega}{l_i}\,b_i'\cdot z_i\,\sin\omega t$$

$$z_i = \frac{\cos\varphi - \frac{E\Omega}{K_1}\cdot\frac{\varphi}{l_i}\sin\varphi}{\sin\varphi+\frac{E\Omega}{K_1}\cdot\frac{\varphi}{l_i}\cos\varphi}\,\varphi \tag{2.21}$$

pentru cazurile din practică $z_i \approx 1$.

3. *Componentele orizontale și verticale ale reacțiilor din capetele piloților.* Cu ajutorul relațiilor de proiecție ale deplasărilor și reacțiilor (fig. 5):

$$a_i = a\cos\alpha_i + b\sin\alpha_i \tag{3.1}$$

$$b_i' = b_i\cos\alpha_i - a\sin\alpha_i \tag{3.2}$$

$$P_i = p_i\cos\alpha_i + q_i\sin\alpha_i \tag{3.3}$$

$$Q_i = q_i\cos\alpha_i - p_i\sin\alpha_i \tag{3.4}$$

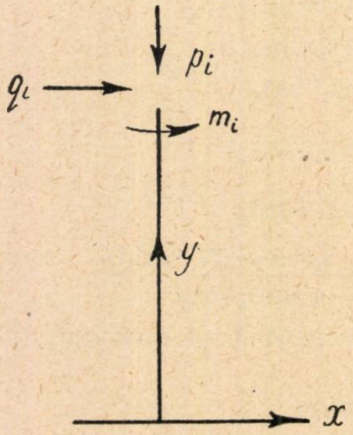


Fig. 4

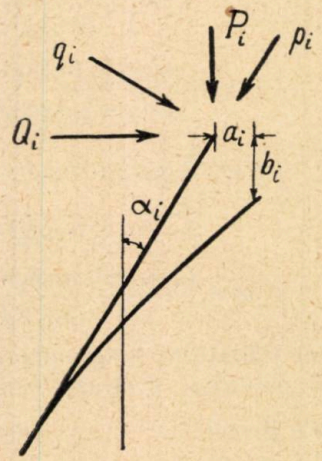


Fig. 5

și cu relația (2.1) se determină proiecțiile reacțiilor pe verticală și orizontală:

$$P_i = E\Omega\left\{a\left(i^2\beta_0^3 t_i - \frac{1}{l_i}\right)\sin\alpha_i\cos\alpha_i + b\left(i^2\beta_0^3 t_i\sin^2\alpha_i + \frac{1}{l_i}\cos^2\alpha_i\right) + \right.$$

$$\left. + c\left[x_i\left(i^2\beta_0^3 t_i\sin^2\alpha_i + \frac{1}{l_i}\cos^2\alpha_i\right) - i^2\beta_0^3 r_i\sin\alpha_i\right]\right\}\sin\omega t \tag{3.5}$$

$$Q_i = E\Omega\left\{a\left(i^2\beta_0^3 t_i\cos^2\alpha_i + \frac{1}{l_i}\sin^2\alpha_i\right) + b\left(i^2\beta_0^3 t_i - \frac{1}{l_i}\right)\sin\alpha_i\cos\alpha_i + \right.$$

$$\left. + c\left[x_i\left(i^2\beta_0^3 t_i - \frac{1}{l_i}\right)\sin\alpha_i\cos\alpha_i - i^2\beta_0^2 r_i\cos\alpha_i\right]\right\}\sin\omega t \tag{3.6}$$

$$M_i = EI\beta_0^2\left[ar_i\cos\alpha_i + br_i\sin\alpha_i + cx_i\left(r_i\sin\alpha_i - \frac{s_i}{\beta_0 x_i}\right)\right]. \tag{3.7}$$

In cazul piloților sau stâlpilor verticali, reacțiile devin:

$$P_i = \frac{E\Omega}{l}(b + cx)\sin\omega t \tag{3.8}$$

$$Q_i = EI\beta_0^2(a\beta_0 t_i - cr_i)\sin\omega t \tag{3.9}$$

$$M_i = EI\beta_0(a\beta_0 r_i - cs_i)\sin\omega t. \tag{3.10}$$

4. *Ecuațiile de echilibru dinamic.* Odată cunoscute reacțiile piloților se pot scrie condițiile de echilibru dinamic al construcției rigide de massă G/g acționată de încărcările exterioare periodice

$$p + \Sigma P_i + \frac{G}{g}\frac{d^2}{dt^2}(b \sin \omega t) = 0 \tag{4.1}$$

$$Q + \Sigma Q_i + \frac{G}{g} \cdot \frac{d^2}{dt^2}(a \sin \omega t) = 0 \tag{4.2}$$

$$-M + \Sigma M_i + \Sigma P_i X_i + \frac{G}{g} i_p^2 \frac{d^2}{dt^2}(c \sin \omega t) = 0; \; i_p^2 = \frac{I_p}{\Omega'} \tag{4.3}$$

In (4.3) I_p reprezintă momentul de inerție polar în raport cu axele ce trec prin centrul de greutate al construcției, iar Ω', suprafața transversală a construcției.

Din cele de mai sus reiese că problema se reduce la rezolvarea ecuațiilor (4.1), (4.2) și (4.3) care se mai pot scrie:

$$P + \Sigma P_i = \frac{G}{g} \omega^2 b$$

$$Q + \Sigma Q_i = \frac{G}{g} \omega^2 a$$

$$-M + \Sigma (M_i + P_i X_i) = \frac{G}{g} i_p^2 \omega^2 c, \tag{4.4}$$

In aceste ecuații se ține seama de (3.8—10) care exprimă reacțiile piloților în funcție de necunoscutele a, b, c,

Pentru sarcini exterioare nule se obțin valorile frecvențelor critice (proprii sau de rezonanță) cu condiția ca determinantul sistemului să fie nul. Pentru aceste valori, ansamblul poate căpăta oscilații libere pentru care amplitudinile sunt nedeterminate și proporționale cu minorii determinantului.

In cazul șocului (sarcini periodice nule), se produc amplitudini a, b, c, astfel ca [1]):

$$a = \frac{2mV}{\frac{G}{g} + m} \times \frac{1}{\omega_2} \tag{4.5}$$

mV fiind impulsul vasului iar ω_2 frecvența proprie de oscilație în sens orizontal. Valorile b, c se deduc univoc din condiția de nulitate a determinantului sistemului.

5. *Construcții de piloți sau stâlpi verticali*

a) Frecvențe și sarcini critice. In cazul n piloți sau stâlpi verticali de egale dimensiuni avem:

$$\Sigma x_i = 0, \; \Sigma \Omega_i = n\Omega, \; \Sigma I_i = nI, \; l_i = l \tag{5.1}$$

[1]) In ipoteza când lucrul mecanic acumulat de piloți este neglijabil. In alte cazuri se pot aplica formule cunoscute.

notând:

$$\omega_1^2 = \frac{E\Omega}{l} \cdot \frac{1}{\frac{G}{gn}}\ ;\ \omega_2^2 = EI\beta_0^3 t \cdot \frac{1}{\frac{G}{gr}}\ ;\ \omega_3^2 = \frac{E\Omega}{l} \cdot \frac{\Sigma x^2}{ni} \cdot \frac{1}{\frac{G}{gn}} \tag{5.2}$$

sistemul devine, cu neglijarea unor termeni foarte mici:

$$\begin{aligned} b\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) + c\frac{\Sigma x}{n} &= -\frac{l}{nE\,\Omega}P \\ a\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - c\frac{r}{\beta_0 t} &= -\frac{1}{\beta_0^3 tEJ}Q \\ -ar + \frac{c\Sigma x^2}{n\beta_0^2 i^2 l}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}\right) &= \frac{1}{nEI\beta_0^2}M. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Determinantul sistemului este:

$$\Delta = -\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}\right)\frac{\Sigma x^2}{n\beta_0^2 i^2 l} \tag{5.4}$$

ceea ce arată că ω_1, ω_2, ω_3 sunt frecvențe critice.

Intru cât forța medie în piloți este $\frac{G}{gn}$ iar $K = \frac{P}{p}$ este coeficientul de siguranță la flambajul static (cf. 1. 10), frecvențele critice se mai pot exprima în forma

$$\omega_1^2 = \frac{l}{i^2}K \tag{5.5}$$

$$\omega_2^2 = \left(\frac{\gamma}{gE}\right)^{3/2}\left(\frac{l^4}{i^3}\right)t^2\,K^2 \tag{5.6}$$

$$\omega_3^2 = \frac{\Sigma x^2}{ni^2} \cdot \frac{l}{i^2}K \tag{5.7}$$

corespunzând vibrațiilor critice verticale (ω_1), orizontale (ω_2) și unghiulare (ω_3). In formule s'a luat $\frac{g}{\pi^2} = 1$.

Este de observat că (5.6) este o ecuație transcendentă în ω_2 care, pentru a putea fi rezolvată prin tabele sau diagrame, se mai pune sub forma:

$$\frac{l^3}{i^2} = \left(\frac{gE}{\gamma}\right)^{3/4} \cdot \frac{\sqrt{\omega_2 l^2/i}}{t} \cdot \frac{1}{K} \tag{5.8}$$

în care, pentru $E = 10^6$, $\gamma = 0{,}5$ avem $\left(\frac{gE}{\gamma}\right)^{3/4} \simeq 31{,}3 \times 10^4$.

Valoarea t se calculează conform relației (2.15) în care

$$\beta_0^2 l^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{gE}}\,\frac{\omega_2 l^2}{i}\ ;\ \sqrt{\frac{\gamma}{gE}} = \frac{0{,}226}{10^3} \tag{5.9}$$

iar

$$\alpha = \frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{gE}{\gamma}} \cdot \frac{1/k}{\omega\, l^2/i}\ ;\ \frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{gE}{\gamma}} \simeq 21{,}8\times 10^3. \tag{5.10}$$

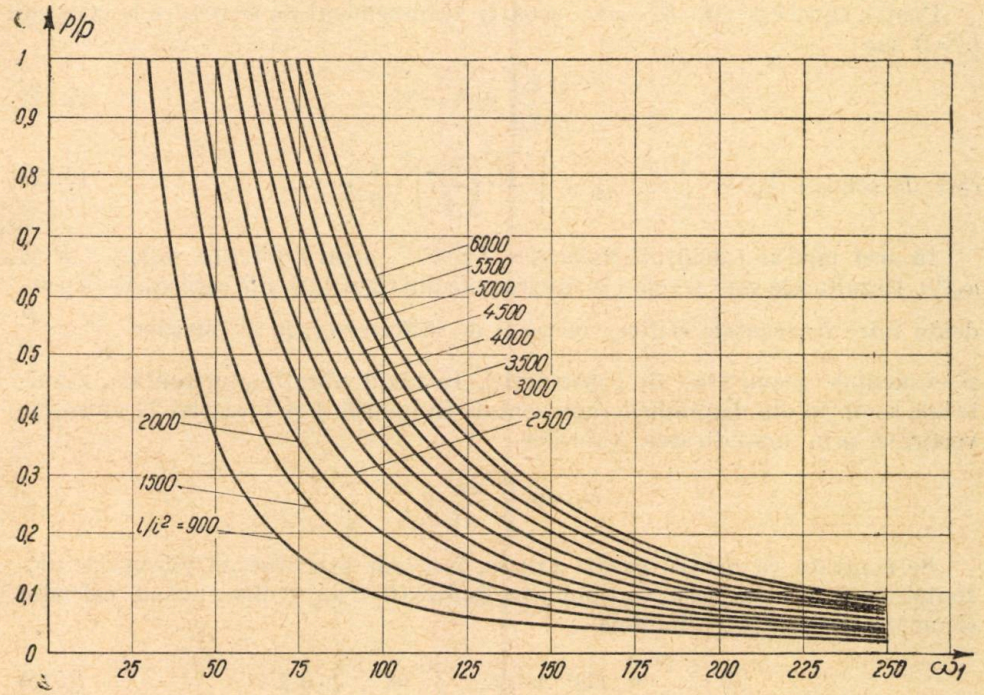

P/p
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
25
50
75
100
125
150
175
200
225
250
ω1
6000
5500
5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
l/i² = 900

Fig. 6

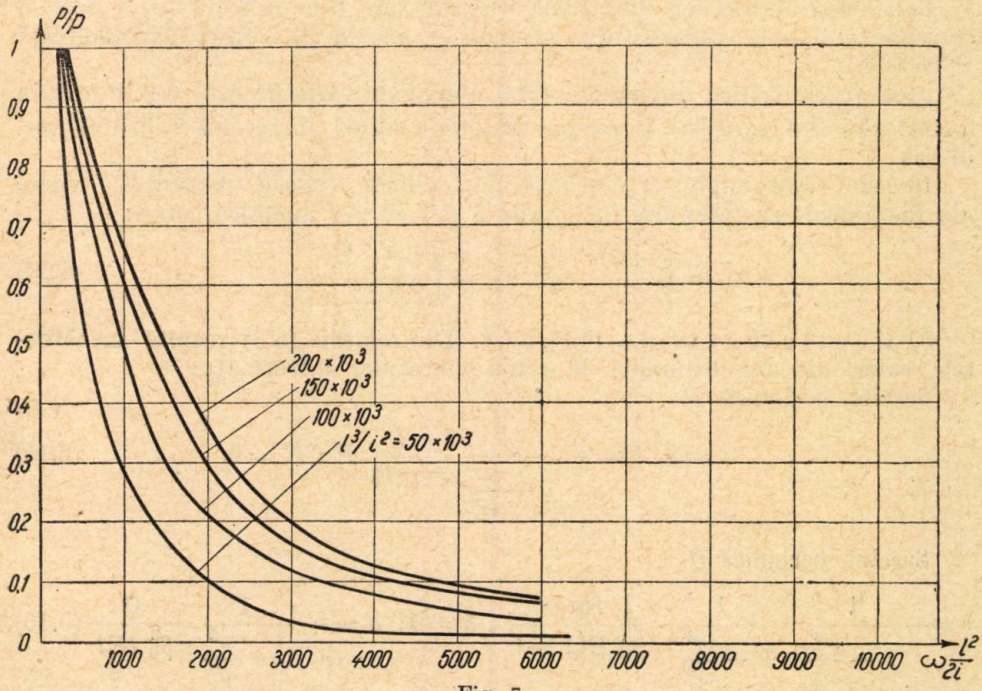

P/p
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
ω l²/2i
200 × 10³
150 × 10³
100 × 10³
l³/i² = 50 × 10³

Fig. 7

Pentru cazul extrem, $K = \infty$, ecuația transcendentală se reduce la ecuația $t = 0$ sau

$$\frac{tg\,\beta_0 l}{th\,\beta_0 l} + 1 = 0 \tag{5.11}$$

care dă soluțiile $\beta_0 l = \frac{3}{4}\pi$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{gE}{\gamma}}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 \frac{i}{l^2}$. (5.12)

In acest mod se calculează valorile α_1 t și l^3/i^2 pentru diferite valori p/P și $\omega_2 l^2/i$ Rezultatele sunt trecute în diagramele din figurile 6 și 7 care arată dependența între frecvențele critice, factorul de utilizare critic al piloților $\frac{1}{K} = \frac{p}{P}$ și elementele geometrice ale construcției. In cazul vibrațiilor orizontale, rezultatele se obțin din diagramele reprezentate în figurile 6 și 7 relative la vibrațiile verticale prin amplificarea valorilor

$$\omega_1 \text{ cu } \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{ni}}.$$

Se constată că pentru cazuri uzuale, frecvențele critice ale vibrațiilor orizontale sunt cele mai joase, ω_2 fiind între limitele $0 < \omega_2 < 3$/sec când celelalte elemente variază între limitele

$$50 < \frac{l^3}{i^2} < 200 \text{ metri}; \quad \frac{p}{P} = \frac{1}{k} > 0{,}2. \tag{5.13}$$

Frecvențele critice ale vibrațiilor verticale sunt mai ridicate ($\omega_1 > 30$/sec) corespunzând unor caracteristici geometrice uzuale ale construcției ($900\, cl/i^2 < 6000$/m).

Frecvențele critice unghiulare fiind amplificate față de cele verticale prin factorul $\sqrt{\Sigma x^2/ni}$ care este în general mai mare decât 50, variază dela 1500/sec. în sus.

In cazul când stâlpii sau piloții nu sunt de lemn, valorile frecvențelor critice din diagramele reprezentate în figurile 6 și 7 se vor modifica astfel:

$$\omega_1' = \sqrt{\frac{0{,}5E}{10^3\gamma}}\,\omega_1, \quad \omega_2' = \left(\frac{10^6\gamma}{0{,}5E}\right)^{3/2}\omega_2 \tag{5.14}$$

b) Coeficienții de impact. Din relațiile (5.3) rezultă următoarele valori ale amplitudinilor în cazul vibrațiilor întreținute:

Sarcină periodică P

$$a = 0,\ b = -\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \cdot \frac{l}{nE\Omega} P;\ C = 0. \tag{5.15}$$

Sarcină periodică Q

$$c = -\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_3^2}} \cdot \frac{rln\,Q}{\beta_0 t\, E\Omega\, \Sigma x^2};\ b = 0;\ a = -\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \cdot \frac{Q}{\beta_0^3\, tEI} \tag{5.16}$$

Moment periodic M

$$a = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}} \cdot \frac{2\,l}{\beta_0\, tE\,\Omega} M;\ b = 0 \tag{5.17}$$

$$c = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}} \cdot \frac{l}{E\Omega\,\Sigma x^2} M.$$

Se recunoaște deci că multiplicatorii de impact pentru vibrații verticale orizontale și unghiulare sunt:

$$V_p = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}},\quad V_Q = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}},\quad V_M = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}} \tag{5.18}$$

In cazul când frecvența de excitație ω coincide cu cea critică, se produce fenomenul de instabilitate dinamică, în care caz multiplicatorii cresc nemărginit. In practică se admite că acești multiplicatori să nu fie mai mari decât 2—3, ceea ce ar da următoarele condiții:

$$\omega < \omega_i\ (0{,}707 \div 0{,}810) \tag{5.19}$$

sau

$$\omega > \omega_i\ (1{,}23 \div 1{,}55) \qquad i = 1,2,3.$$

In cazul șocului de impuls mV, amplitudinile sunt

$$a = \frac{2V}{1+\frac{m'}{m}} \cdot \frac{1}{\omega_2};\quad m' = \frac{G}{g}$$

$$b = -\frac{\beta_0 t}{r}\frac{\Sigma x}{n}\, a\ ;\ i = \frac{\beta_0 t}{r}\, a. \tag{5.20}$$

In acest fel, cu ajutorul diagramelor reprezentate în figurile 6 și 7 și relațiilor (5.18) și (5.20), se pot determina caracteristicile stabilității dinamice ale construcției, și anume forțele și frecvențele critice, multiplicatorii de impact, amplitudinile în funcție de încărcări și solicitările corespunzătoare din piloți (vezi 2.1, 2.11, 2.21).

Cu aceste elemente se face verificarea construcției la rezonanță și la capacitatea de rezistență a elementelor de susținere sub acțiunea forțelor p și a sarcinilor suplimentare p_i, q_i, m_i astfel ca multiplicatorii de impact să satisfacă relațiile (5.19) și ca rezistențele admisibile în piloți să nu fie depășite.

In același timp, deși construcția ar putea să nu prezinte pericolul de flambaj dinamic, trebue verificat și coeficientul general de siguranță pentru stabilitatea dinamică, coeficient care, deși nu este impus în prescripții, trebue prevăzut în raport cu gradul de importanță al construcției.

6. *Coeficientul de siguranță la stabilitate dinamică a ansamblului sub acțiunea vibrațiilor unei masse.* Din rezultatele precedente se poate verifica prin diferite aplicații că deformările unghiulare sunt foarte mici în raport cu cele-

lalte deformări. In acest caz, se poate considera că deplasarea produsă prin flambaj se compune dintr'o deplasare orizontală şi una verticală.

Luând integrala de timp a energiei de deformare L şi a energiei potenţiale KU (K fiind coeficientul de siguranţă):

$$I = \int_o^t (L - KU)\, dt \tag{6.1}$$

se poate presupune, conform principiului lui Hamilton, că, dintre toate mişcările infinit apropiate care trec sistemul din aceeaşi stare iniţială de echilibru ($t=0$) la aceeaşi stare finală ($t=\pi/2\omega$), acea deplasare se produce în mod real care face ca variaţia integralei de timp să fie minimă:

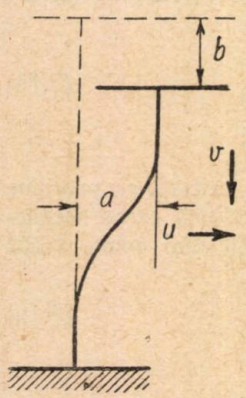


Fig. 8

$$\delta\, I = 0 \tag{6.2}$$

Deplasarea presupusă (conform figurii 8 şi relaţiei (1.4)·

$$u = (1 - \cos \beta_1 y)\, \frac{a}{2} \sin \omega t \tag{6.3}$$

va trebui să satisfacă condiţia (6.2). Determinând constanta β_1 astfel ca pentru $y=o$, $y=l$, $\frac{du}{dn} = 0$, rezultă $\beta_1 = \frac{\pi}{l}$ şi se poate calcula expresia integralei de timp a variaţiei energiei de deformare:

$$\delta \int_o^t L dt = \frac{1}{2} \Sigma \int_o^l \int_o^{\pi/2\omega} EI \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_o^e \int_o^{\pi/2\omega} \frac{\gamma \Omega}{g} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dn dt \tag{6.4}$$

şi anume:

$$\delta \int_o^t L dt = \frac{\pi}{4\omega} \cdot \frac{a^2}{16} \pi^2 \Sigma \frac{P}{l} \left(1 - \frac{\gamma}{gE\pi^4} \left(\frac{\omega l^2}{i}\right)^2\right) ; \; P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{6.5}$$

Ţinând seama conform relaţiei (1.5) că sarcina critică dinamică din piloţi este

$$P_c = \left(\beta_1^4 - \frac{\gamma}{gE} \frac{\omega^2}{i^2}\right) \frac{EI}{\beta_1^2} \tag{6.6}$$

sau pentru $\beta_1 = \pi/l$

$$P_c = P \left(1 - \frac{\gamma}{gE\pi^4} \left(\frac{\omega l^2}{i}\right)^2\right) \tag{6.7}$$

rezultă că (6.5) se scrie

$$\delta \int_o^t L dt = \frac{\pi}{4\omega} \frac{a^2}{16} \pi^2 \Sigma \frac{p \psi}{l} ; \; \psi = \frac{P_c}{p}. \tag{6.8}$$

Este de observat că coeficientul de siguranță dinamic ψ este foarte apropiat de cel static în cazul frecvenței joase ($\omega < 600/sec$) când termenul $1 - \frac{\gamma}{gE\pi^4}\left(\frac{\omega l^2}{i}\right)^2$ este apropiat de unitate.

In mod analog se calculează integrala de timp a energiei potențiale:

$$\delta \int_0^t U dt = \Sigma \int_0^{\pi/2\omega} pv' \sin \omega l dt + \Sigma \int_0^{\pi/2\omega} \frac{m}{2}\left[\left(\frac{du'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv'}{dt}\right)^2\right] dt \qquad (6.9)$$

$$m = p/g$$

Intru cât deplasarea axială este dată de relația:

$$v' = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{du'}{du}\right)^2 du \; ; \; u' = \alpha \sin \omega t \qquad (6.10)$$

reiese că

$$v' = \frac{\pi^2 a^2}{16\, l} \sin^2 \omega t$$

și cu neglijarea unor termeni foarte mici,

$$\delta \int_0^t U dt = -\frac{\pi}{4\omega}\frac{\pi^2 a^2}{16} \Sigma p \left(\frac{1}{l} + \frac{8}{\pi^2}\frac{\omega^2}{g}\right). \qquad (6.11)$$

Din (6.1) și (6.2) se deduce în cele din urmă că valoarea coeficientului de siguranță dinamic este:

$$K = \frac{\Sigma p \frac{\psi}{l}}{\Sigma p \left(\frac{1}{l} + \frac{8}{\pi^2}\frac{\omega^2}{g}\right)}. \qquad (6.12)$$

Formula este valabilă și pentru piloți cu înclinare redusă.

In cazul când piloții au aceeași lungime și același efort axial, coeficientul de siguranță este:

$$K = \frac{\psi}{1 + \frac{8}{\pi^2}\omega^2 \frac{l}{g}} \qquad (6.13)$$

relație în care apare evident faptul că coeficientul de siguranță dinamic este mai redus decât cel al elementelor izolate de susținere acționate doar de o forță p, fapt care se datorește forței vii transmise de massa construcției.

Odată cu verificarea coeficientului de siguranță al ansamblului se poate căpăta o imagine completă asupra modului de comportare a construcției la stabilitatea dinamică, comportare care nu se poate preveni întot deauna prin mărirea convențională a sarcinilor statice.

II

7. *Limite impuse de încărcările dinamice.* Acțiunea dinamică a încărcărilor se repartizează cu importanță diferită asupra comportării construc-

ției la flambaj, rezonanță sau capacitate de rezistență la rupere. Efectul încărcărilor dinamice fiind în general complex, construcțiile trebue astfel concepute în ansamblu încât să satisfacă totalitatea condițiilor de stabilitate. Acest fapt restrânge posibilitățile de folosire a diferitelor procedee de construcții.

Din cele ce urmează vor rezulta limitele ce se impun construcției de către diferite încărcări dinamice uzuale.

In cazul acțiunii dinamice a valurilor, de natura unor vibrații întreținute, se produc asupra construcției solicitări periodice orizontale și de subpresiune care, prin repetare, pot modifica starea de stabilitate.

Perioada presiunii valurilor, pe măsură ce se apropie de perioada critică a construcției, amplifică prin impact rezistențele calculate pe cale statică în elementele de susținere. O supradimensionare poate duce uneori la apropierea frecvențelor critice de cele întreținute, astfel încât impactul poate crește foarte mult. Acest efect constă la început în slăbirea legăturii piloților cu terenul sau cu restul construcției din cauza alternării sarcinilor și apariției tensiunilor în piloții slab încărcați.

Piloții înclinați au un efect favorabil asupra stabilității generale, chiar dacă duc la mărirea impactului; totuși, măsura de a prevedea piloți înclinați nu înlătură necesitatea verificării la stabilitate dinamică.

In Standardul Unional de STAT GOST 3255—46 asupra acțiunii valurilor se prevăd atât valorile încărcărilor dinamice, cât și perioadele valurilor ce pot apărea în funcție de adâncimea H a apei și de lungimea valurilor. Astfel, în tabloul Nr. 1 sunt trecute perioadele evaluate pentru adâncimi între 5 și 15 m și lungimi ale valului de 2—15 m.

TABLOUL Nr. 1

L	2	5	1o	15
T″	o,81	1,27	1,77	2,19

Rezultă că valorile frecvențelor $\omega = 2\pi/T$, care interesează în cazul valurilor, variază între limitele

$$2{,}86 < \omega < 7{,}76. \tag{7.1}$$

Pentru a preveni valori prea mari de impact, trebue ca frecvențele critice orizontale să fie limitate, conform condițiilor (5.19) de valorile:

$$\omega_2 < 0{,}707 \times 2{,}86 = 2{,}02/\text{sec} \text{ și } \omega_2 > 1{,}55 \times 7{,}76 = 12{,}1/\text{sec}. \tag{7.2}$$

In concordanță cu diagramele 1,2, reiese că, în general, pericolul de rezonanță este destul de important la construcțiile la care coeficientul de utilizare a piloților este mai mic decât 0,2 ($k=5$).

Apare deci că la construcții pe piloți verticali sarcina axială în piloți prea redusă poate atrage rezonanța; în practică însă, coeficientul de utilizare este mai ridicat.

In ceea ce privește limita inferioară a frecvențelor mari (12,7/sec), ea este mai redusă decât aceea care apare la construcții pe piloți înalți în cazul oscilațiilor verticale și unghiulare.

In baza acestor date este justificată alegerea la construcțiile hidrotehnice de ansambluri cu o mare rigiditate sau astfel dimensionate pentru a amortiza, datorită unei mari elasticități, solicitările dinamice.

Aceasta apare mai clar în cazul șocului, atunci când construcția vibrează după valorile proprii (critice) cu amplitudini determinate (cf. 4.5). Aici nu se mai pune problema rezonanței ci a depășirii rezistențelor admisibile sau a coeficientului de siguranță la flambaj.

După cum arată formulele

$$m_i = \sqrt{\frac{\gamma E \Omega I}{g}} \cdot \frac{2V}{1+\frac{G}{gm}} \; ; \; \sigma = 4\sqrt{gEr}\,\frac{V}{1+\frac{G}{gm}} \tag{7.3}$$

deduse din (2.10) și (1.9), rezistența în piloți, dată de momentele de natură dinamică, are un maxim pentru

$$1 - \cos \beta_1 l ch\, \beta_2 l - \alpha \sin \beta_1 l sh\, \beta_2 l = 0 \tag{7.4}$$

Această ecuație este însă satisfăcută de valori p/P și ω corespunzând unei rigidități și unor frecvențe medii: de aceea, la alegerea soluțiilor trebue evitate construcții de rigidități și frecvențe mijlocii.

O altă încărcare dinamică este dată de cutremure, care se situează, ca efect mecanic, între șocuri și vibrații întreținute. In oricare situație se poate constata că frecvențele undelor seismice se pot suprapune numai cu frecvențele critice ale vibrațiilor orizontale sau, cel mult, cu frecvențele critice ale vibrațiilor verticale.

In cazul convoaielor, frecvențele au în general valori joase (1—15/sec) [1][1], dar ele variază în raport cu dimensiunile și sistemul de pod. De aceea, stabilitatea pilelor este influențată de încărcările dinamice ale suprastructurii, cu atât mai mult cu cât acțiunea vântului are manifestări periodice datorită rafalelor de frecvență joase ($\omega = 1-50$/sec).

III. EXEMPLU

Cu ajutorul diagramelor din figurile 6 și 7 se poate verifica stabilitatea construcțiilor pe piloți sau stâlpi verticali.

In cazul unui radier rigid de 39,5 tone/ml pe 5 piloți de lemn pe ml așezați la egală distanță, având diametrul de 30 cm calculele se fac în modul următor:

Se calculează coeficientul de utilizare $p/P = 0{,}2$ ținând seama că forța axială este $p = G/n = 39{,}5/5 = 7{,}9$ tone, iar forța de flambaj

$$P = \pi^2 EI/l^2 = \pi^2\, 10^6 \times 0{,}000397/10^2 = 39{,}5 \text{ tone.}$$

Din diagrame, pentru $l/i^2 = 10/0{,}00563 = 17{,}8$; $\Sigma x^2/\text{ni} = 2(1^2+2^2)/5 \times 0{,}00563 = 357$ și $l^3/i^2 = 178 \times 10^3$

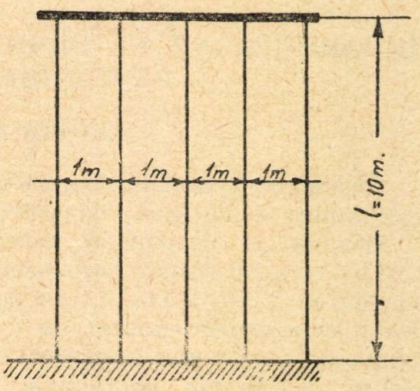


Fig 9

[1]) pagina 268.

se determină

$$\omega_1 = 94/\text{sec},\ \omega_2 = 2830 \times il^2 = 2{,}12/\text{sec},\ \omega_3 = 357.\omega_1 = 3370/\text{sec}.$$

Ținând seama de (7.1) și (7.2) rezultă că nu este pericol de rezonanță cu acțiunea valurilor. Impactul presiunii valurilor este redus căci, conform relației (7.1) și (5.18):

$$V_a = -\frac{1}{1-\left(\frac{2{,}86}{2{,}12}\right)^2} \approx 1.$$

In cazul șocului vasului, pentru

$$V = 2m/\text{sec}, \qquad G/gm = 10$$

rezultă pentru $\omega_0 = 2{,}12$, amplitudinea $a = 2 \times 2/2{,}12\ (1 + 10) = 0{,}172$ m.

Celelalte amplitudini se determină calculând în prealabil valorile $\beta_0 l = 0{,}815$, $\alpha = 0{,}74$, $\beta_1 l = 1{,}47$, $\beta_2 l = 0{,}455$, $r = 8{,}95$, $t = 17{,}8$, $\Sigma x/n = 1{,}2$.

Conform formulelor (5.20) rezultă, $c = 0{,}0815 \times \frac{17{,}8}{8{,}95} \times 0{,}172 = 0{,}0279$.

$$b = -0{,}0279 \times 1{,}2 = -0{,}0334.$$

Cu ajutorul relațiilor (2.10) și (2.11) rezultă că forța tăietoare și momentele încovoietoare din capetele piloților au valorile $q = 0{,}666$ tone și $m = 0{,}331$ tone.

Evident, piloții înclinați sunt necesari pentru preluarea eforturilor orizontale și micșorarea amplitudinilor orizontale.

Coeficientul de siguranță este, pentru $\omega = 2{,}12$:

$$K = \frac{5}{1 + \frac{8}{\pi^2}\, 2{,}12^2\, \frac{10}{9{,}81}}$$

ceea ce era de așteptat, $\omega = 2{,}12$ fiind frecvența critică pentru o deplasare orizontală.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РИГИДНЫХ СООРУЖЕНИЙ НА СТОЛБАХ ИЛИ НА СВАЯХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Изучаются условия динамической устойчивости столбов произвольной длины и наклона, поддерживающих ригидное сооружение

Исходя из уравнений колебаний подпирающих элементов (1.3 и 1.11), устанавливают выражение действующих сил на концах этих элементов (2.10, 2.11, 2.21) в функции амплитуды движений и частоты. Затем определяют амплитуды с учетом динамического равновесия совокупности в функции критических частот (5.15, 5.16, 1.17) и геометрических элементов постройки. Условие, что система обладает собственными колебаниями (при нулевой наружной нагрузке) дает возможность установить значения критических частот (5.5, 5.6, 1.7) и непосредственно значения коэффициента удара (5.18).

Когда подпирающие элементы имеют малый наклон, можно, между прочим, оценить для них коэффициент безопасности в отношении динамического изгиба (6.12).

Исходя из этих элементов можно вывести известные заключения, в особенности, применимые при гидротехнических постройках, относительно поведения построек на столбах под действием динамической нагрузки и относительно поставленных им пределов.

LA STABILITÉ DYNAMIQUE DES CONSTRUCTIONS RIGIDES SUR PILIERS OU PILOTIS

(RÉSUMÉ)

On étudie dans cet article les conditions de stabilité dynamique d'un ensemble de piliers de longueurs et inclinaisons quelconques, qui soutiennent une construction rigide.

En partant des équations de vibration des éléments de soutien (1.3 et 1.11), on établit les expressions des sollicitations aux extrémités de ces éléments (2.10, 2.11, 2.21) en fonction de l'amplitude des mouvements et fréquences. On détermine ensuite les amplitudes, en tenant compte de l'équilibre dynamique de l'ensemble, en fonction des fréquences critiques (5.15, 5.16, 5.17) et des éléments géométriques de la construction. La condition que le système possède des vibrations propres (pour des charges extérieures nulles) permet d'établir les valeurs des fréquences critiques (5.5, 5.6, 1.7). et d'une manière immédiate celles des coefficients d'impact (5.18).

Pour les éléments de soutien ayant une inclinaison réduite, on peut évaluer en outre le coefficient de sûreté au flambage dynamique (6.12).

En partant de ces éléments on peut tirer certaines conclusions, surtout avec application aux constructions hydrotechniques, sur le comportement des constructions rigides sur piliers sous l'action des charges dynamiques et sur les limites qui s'imposent.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Goldenblat, *Stabilitatea dinamică a construcțiilor.* Stroizdat, 1948.
2. — *Probleme actuale de vibrații și stabilitate în construcții.* 1947.
3. Corcinschi, *Calculul construcțiilor la sarcini dinamice.* Stroizdat, 1947.
4. — *Vibrații transversale și vitese critice.* Academia de Științe U.R.S.S. 1951.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3–4, 1952

TEORIA SUPRAFEŢELOR SUBŢIRI DE ROTAŢIE

DE

MIRCEA SOARE

INTRODUCERE

Lucrarea de faţă constitue o sinteză a celor mai importante probleme din teoria suprafeţelor subţiri de rotaţie. In ea sunt cuprinse rezultatele personale ale autorului în privinţa teoriei de membrană la încărcări nesimetrice, precum şi studiul deformărilor celor mai generale tot în cazul încercărilor nesimetrice. Inafară de prezentarea problemelor într'o ordine care a părut cea mai logică, unele formule au fost prelucrate astfel, încât aplicarea lor în calcule practice să fie cât mai simplă.

Din cauza spaţiului restrâns nu au fost incluse în această lucrare o serie de probleme dintre care citãm: studiul sarcinilor concentrate nesimetrice în teoria de membrană, soluţiile şi variaţia deformaţiilor în teoria de membrană, suprafeţe cu grosime variabilă, cupole în apsidă, aplicarea diferenţelor finite la teoria încovoierii, etc.

Demonstraţiile au fost redate foarte succint, în unele cazuri revenind cititorilor să deducă rezultatele cu ajutorul figurilor.

Teoria încovoierii la încărcări nesimetrice nu a fost cuprinsă în această lucrare din două motive: în primul rând nu există soluţii până în prezent decât pentru cazul cilindrului şi sferei; în al doilea rând chiar şi această problemă necesită un spaţiu prea mare. Unele rezultate personale ale autorului vor face obiectul unui studiu viitor.

I

ECUAŢIILE GENERALE

1. Elemente geometrice. Notaţii. La o suprafaţă de rotaţie definim următoarele elemente geometrice:

— *axa de rotaţie* pe care o alegem verticală;

— *curba meridiană* care reprezintă intersecţia suprafeţei cu un plan meridian definit prin unghiul θ pe care îl face cu un plan meridian de referinţă.

— *cercul paralel* care reprezintă intersecţia suprafeţei cu un plan normal pe axa de rotaţie;

r_0 = raza unui cerc principal;

r_1 = raza de curbură a curbei meridiane într'un punct oarecare;

r_2 = raza de curbură a curbei de pe suprafață, cuprinsă într'un plan perpendicular pe planul meridian în punctul considerat. Această rază este mărginită de suprafață și axa de rotație.

r_1 și r_2 au același suport și fac unghiul φ cu axa de rotație. Intre r_0, r_1 și r_2 există relațiile:

$$r_1 = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{dr_0}{d\varphi} \tag{1.1}$$

$$r_2 = \frac{r_0}{\sin\varphi} \tag{1.2}$$

— *grosimea pânzei* egală cu $\delta = 2h$ (presupusă constantă și foarte mică în raport cu razele de curbură).

— *suprafața mediană* este locul punctelor care împart grosimea pânzei în două părți egale [1]).

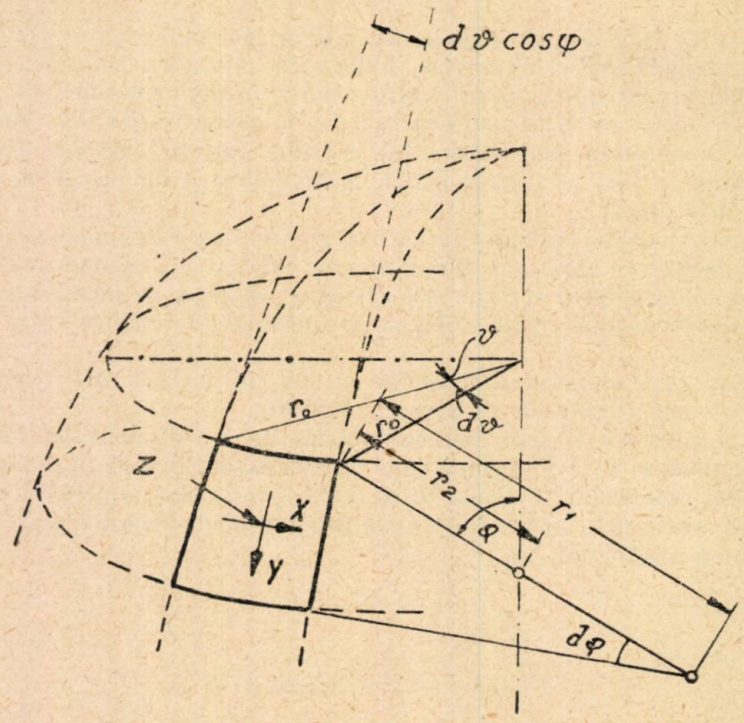


Fig. 1 — Elementele geometrice ale suprafeței subțiri.

Un *element de suprafață mediană* este definit de planele meridiane θ, $\theta + d\theta = \text{const.}$, determinând pe cercurile paralele arce de lungime

$$ds_0 = r_0 d\theta \tag{1.3}$$

[1]) In cele ce urmează, suprafața mediană își păstrează semnificația geometrică, în timp ce prin *suprafață* sau *pânză* vom înțelege construcția propriu zisă cu grosime.

și de două cercuri paralele determinând pe meridiane arce cu unghiul $d\varphi$ la centrul de curbură. Lungimea lor este

$$ds_1 = r_1 d\varphi = \frac{dr_0}{\cos\varphi} \tag{1.4}$$

In cazul când curba meridiană se reduce la o dreaptă, una din razele de curbură devine infinită și unul din unghiuri devine constant. Ca variabilă se va alege arcul $dx = ds_0$, sau ds_1.

Incărcarea exterioară, acționând asupra elementului de suprafață, este dată prin componentele X, Y, Z, după tangentele la paralel, la meridian și normala la suprafață, aplicată în centrul elementului considerat. X și Y sunt pozitivi către θ și φ crescători, iar Z către interior (fig. 1).

2. Starea de eforturi. Pentru a stabili starea de eforturi în pânză, observăm că grosimea ei este neglijabilă în raport cu celelalte dimensiuni.

Eforturile unitare acționând pe fețele elementului definit la paragraful 1 le descompunem după axele intrinseci ale sistemului, fie tangentele la paralel, la meridian și normala la suprafață (fig. 2).

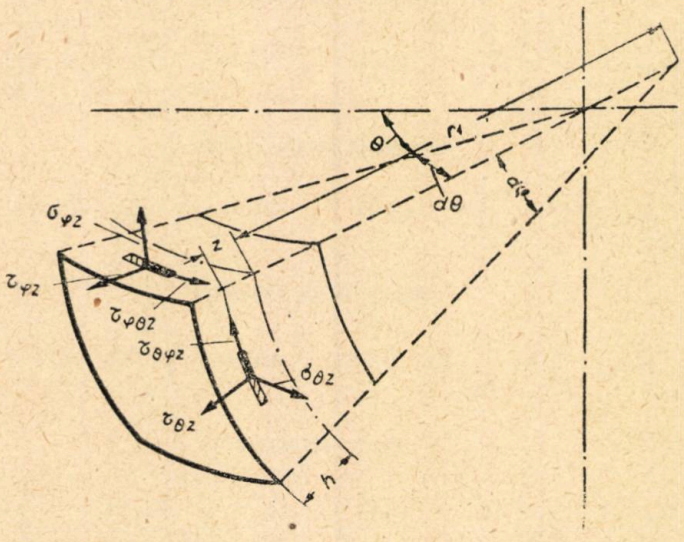


Fig. 2. — Eforturi unitare la o suprafață subțire.

Astfel, în secția $\varphi = \text{const.}$ apar: efortul unitar normal $\sigma_{\varphi z}$ și eforturile unitare de forfecare $\tau_{\varphi z}$ și $\tau_{\varphi\theta z}$.

In secția $\theta = \text{const.}$ apar: efortul unitar normal $\sigma_{\theta z}$ și eforturile unitare de forfecare $\tau_{\theta z}$ și $\tau_{\theta\varphi z}$.

Pe fețele libere ale elementului admitem că, datorită grosimii mici în raport cu razele de curbură, nu apar eforturi unitare ($\sigma_z \cong 0$, $\tau_{z\varphi} = \tau_{z\theta} \cong 0$).

Insumând aceste eforturi unitare, precum și momentele elementare în raport cu suprafața mediană, vom obține eforturile (pe unitatea de lungime), care acționează într'o suprafață subțire.

Să însumăm de exemplu eforturile unitare $\sigma_{\theta z}$ din secția $\theta = \text{const.}$ Un element de suprafață la cota z este definit (fig. 2) prin relația:

$$dA = \left(\frac{r_1 + z}{r_1} \cdot ds_1\right) \cdot dz.$$

Insumând acum eforturile $\sigma_{\theta z}$. dA se obține:

$$N_\theta . ds_1 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{\theta z}\left(1 + \frac{z}{r_1}\right) ds_1 . dz.$$

Putem simplifica cu ds_1 care nu este funcție de z. Pe această cale se obține final:

In secția $\varphi = \text{const.}$ In secția $\theta = \text{const.}$

Eforturi normale

$$N_\varphi = \int_{-h}^{+h} \sigma_{\varphi z}\left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \qquad (2.1) \qquad N_\theta = \int_{-h}^{+h} \sigma_{\theta z}\left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \qquad (2.2)$$

Eforturi de forfecare

$$N_{\varphi\theta} = \int_{-h}^{+h} \tau_{\varphi\theta z}\left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \qquad (2.3) \qquad N_{\theta\varphi} = \int_{-h}^{+h} \tau_{\theta\varphi z}\left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \qquad (2.4)$$

Momente încovoietoare

$$M_\varphi = -\int_{-h}^{+h} \sigma_{\varphi z} . z\left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \qquad (2.5) \qquad M_\theta = -\int_{-h}^{+h} \sigma_{\theta z} . z\left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \qquad (2.6)$$

Momente de răsucire

$$M_{\varphi\theta} = -\int_{-h}^{+h} \tau_{\varphi\theta z} . z\left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \qquad (2.7) \qquad M_{\theta\varphi} = -\int_{-h}^{+h} \tau_{\theta\varphi z} . z\left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \qquad (2.8)$$

Forțe tăietoare

$$Q_\varphi = \int_{-h}^{+h} \tau_{\varphi z} . \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \qquad (2.9) \qquad Q_\theta = \int_{-h}^{+h} \tau_{\theta z}\left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \qquad (2.10)$$

Deși Q_φ, Q_θ sunt prin natura lor tot eforturi de forfecare, le-am denumit forțe tăietoare prin analogie cu grinda dreaptă.

Din cauză că, în general, $r_1 \neq r_2$ se observă că avem și $N_{\varphi\theta} \neq N_{\theta\varphi}$, $M_{\varphi\theta} \neq M_{\theta\varphi}$, deși eforturile unitare de forfecare în suprafața mediană sunt egale ($\tau_{\varphi\theta} = \tau_{\theta\varphi}$), conform principiului dualității.

3. Ecuațiile generale de echilibru. In capitolul precedent am stabilit eforturile și momentele care apar în secțiile φ, $\theta = \text{const.}$ In secțiile infinit vecine, acestea, ca și razele de curbură cresc cu diferențiale (fig. 3, 4).

Putem scrie șase ecuații de echilibru al elementului de placă. Stabilirea lor se face ușor cu ajutorul tabloului Nr. 1.

TABLOUL Nr. 1

	Ecuații de proiecție pe			Ecuații de momente în raport cu		
	tangenta la paralel	tangenta la meridian	normala	tangenta la paralel	tangenta la meridian	normala
N_φ	—	$+\frac{\partial (N_\varphi\, r)}{\partial \varphi}\, d\varphi\, d\theta$	$+ N_\varphi . r_0\, d\theta . d\varphi$	—	—	—
N_θ	$+\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \cdot d\theta . r_2\, d\varphi$	$-N_\theta\, r_1\, d\varphi . d\theta \cos\varphi$	$+ N_\theta\, r_1\, d\varphi . d\theta \sin\varphi$	—	—	—
$N_{\varphi\theta}$	$+\frac{\partial (N_{\varphi\theta}\, r_0)}{\partial \varphi}\, d\varphi\, d\theta$	—	—	—	—	$- N_{\varphi\theta} . r_0\, d\theta . r_1\, d\varphi$
$N_{\theta\varphi}$	$+ N_{\theta\varphi} . r_1 d\varphi . d\theta \cos\varphi$	$+\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta}\, d\theta . r_1\, d\varphi$	—	—	—	$+ N_{\theta\varphi} . r_0\, d\theta . r_1\, d\varphi$
Q_φ	—	$- Q_\varphi . r_0\, d\theta\, d\varphi$	$+\frac{\partial (Q_\varphi\, r_0)}{\partial \varphi}\, d\varphi\, d\theta$	$- Q_\varphi . r_0\, d\theta . r_1\, d\varphi$	—	—
Q_θ	$- Q_\theta . r_1\, d\varphi . d\theta \sin\varphi$	—	$+\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta}\, d\theta . r_1\, d\varphi$	—	$- Q_\theta . r_0\, d\theta . r_1\, d\varphi$	—
M_φ	—	—	—	$+\frac{\partial (M_\varphi . r_0)}{\partial \varphi}\, d\varphi\, d\theta$	—	—
M_θ	—	—	—	$- M_\theta\, r_1\, d\varphi\, d\theta \cos\varphi$	$+\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}\, d\theta . r_1\, d\varphi$	—
$M_{\varphi\theta}$	—	—	—	—	$+\frac{\partial (M_{\varphi\theta}\, r_0)}{\partial \varphi}\, d\varphi\, d\theta$	$+ M_{\varphi\theta} . r_0\, d\theta . d\varphi$
$M_{\theta\varphi}$	—	—	—	$+\frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta}\, d\theta . r_1\, d\varphi$	$+ M_{\theta\varphi} , r_1 d\varphi . d\theta \cos\varphi$	$- M_{\theta\varphi} . r_1 d\varphi . d\theta \sin\varphi$
$X,\ Y,\ Z$	$+ X r_0\, d\theta . r_1\, d\varphi$	$+ Y r_0\, d\theta . r_1\, d\varphi$	$+ Z r_0\, d\theta . r_1\, d\varphi$	—	—	—

La stabilirea valorilor din tabloul Nr. 1 s'au înlocuit unele cantităţi prin infiniţii mic principali, de exemplu:

$$\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)=1;\ \sin\left(\frac{d\theta}{2}\cos\varphi\right)=\frac{d\theta}{2}\cos\varphi.$$

r_0 apare sub semnul derivatei, deoarece este funcţie de unghiul φ.

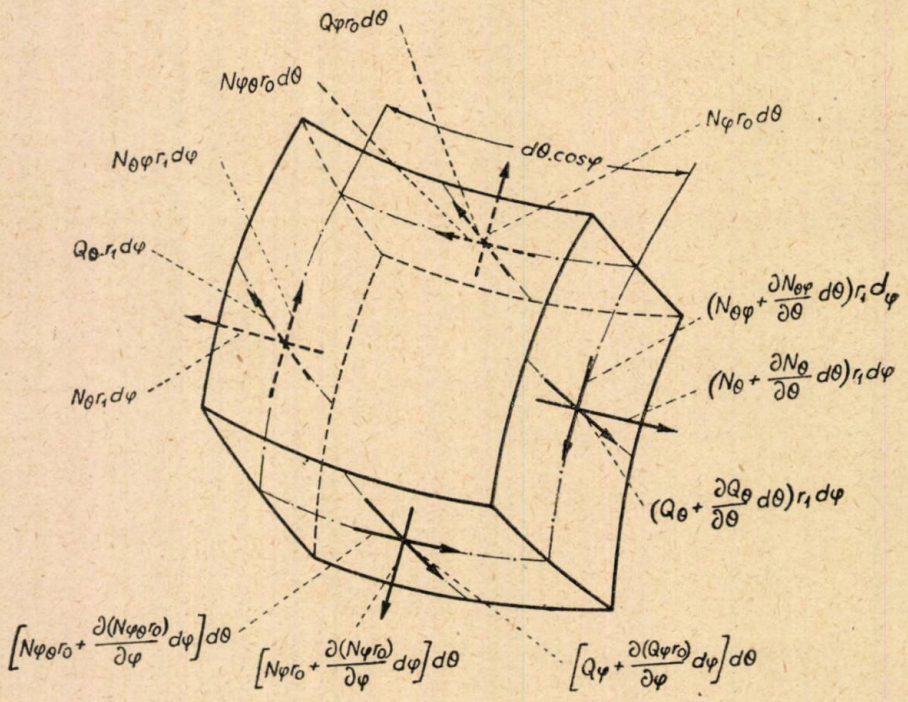


Fig. 3.— Eforturile acţionând asupra unui element.

Insumând pe coloană şi simplificând cu $d\varphi\, d\theta$, se obţin următoarele *ecuaţii generale de echilibru* pentru o suprafaţă subţire de rotaţie:

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}r_1+\frac{\partial(N_{\varphi\theta}.r_0)}{\partial\varphi}+N_{\theta\varphi}.r_1\cos\varphi-Q_\theta.r_1\sin\varphi+X r_0 r_1=0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta}r_1+\frac{\partial(N_\varphi.r_0)}{\partial\varphi}-N_\theta.r_1\cos\varphi-Q_\varphi.r_0+Y r_0 r_1=0 \qquad (3.2)$$

$$N_\varphi r_0+N_\theta r_1\sin\varphi+\frac{\partial(Q_\varphi r_0)}{\partial\varphi}+\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}r_1+Z r_0 r_1=0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}r_1+\frac{\partial(M_{\theta\varphi}.r_0)}{\partial\varphi}+M_{\theta\varphi}.r_1\cos\varphi-Q_\theta\, r_0 r_1=0. \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial\theta}r_1+\frac{\partial(M_\varphi r_0)}{\partial\varphi}-M_\theta.r_1\cos\varphi-Q_\varphi.r_0 r_1=0 \qquad (3.5)$$

$$\frac{M_{\varphi\theta}}{r_1}-\frac{M_{\theta\varphi}}{r_2}-N_{\varphi\theta}+N_{\theta\varphi}=0 \qquad (3.6)$$

Pentru obținerea ultimei relații s'a folosit relația (1.2)

Se va observa analogia dintre ecuațiile de proiecție și cele de momente.

Dacă în ultima ecuație de momente (3.6) înlocuim pe $N_{\varphi\theta}$, $N_{\theta\varphi}$, $M_{\varphi\theta}$, $M_{\theta\varphi}$ cu valorile date de (2.3), (2.4), (2.7), (2.8) și ținem seama că variabila de sub semnul integral este z, toate celelalte cantități fiind constante în raport cu z, rezultă că (3.6) este identic verificată. Deci, în realitate dispunem numai de cinci ecuații de echilibru, cuprinzând zece necunoscute.

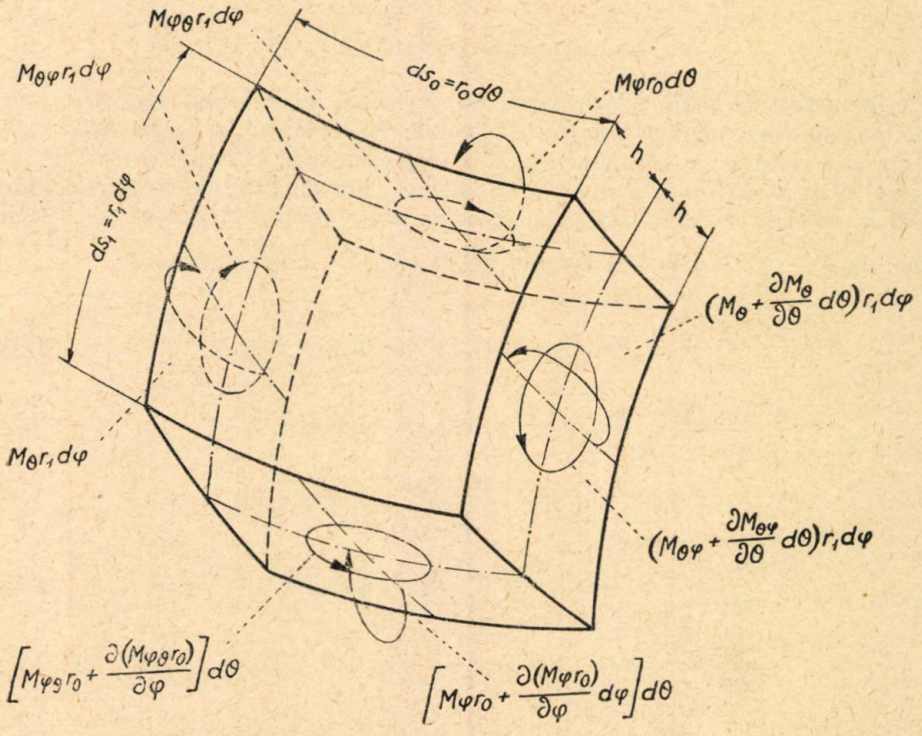

$M_{\varphi\theta} r_1 d\varphi$
$M_{\theta\varphi} r_1 d\varphi$
$ds_0 = r_0 d\theta$
$M_\varphi r_0 d\theta$
h
h
$ds_1 = r_1 d\varphi$
$(M_\theta + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} d\theta) r_1 d\varphi$
$M_\theta r_1 d\varphi$
$(M_{\theta\varphi} + \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} d\theta) r_1 d\varphi$
$\left[M_{\varphi\theta} r_0 + \frac{\partial (M_{\varphi\theta} r_0)}{\partial \varphi}\right] d\theta$
$\left[M_\varphi r_0 + \frac{\partial (M_\varphi r_0)}{\partial \varphi} d\varphi\right] d\theta$

Fig. 4. — Momentele acționând asupra unui element.

Problema este așa dar static nedeterminată și în cazul general va trebui să examinăm și deformările pânzei.

Sunt însă cazuri când prin anumite neglijări, problema devine static determinată, constituind așa numita *teorie de membrană*.

In acest studiu vom distinge două cazuri fundamentale, după cum încărcările sunt simetrice sau nesimetrice.

Convenția de semne. Convenția de semne stabilită pentru eforturi și momente este analoagă cu aceea dela grinda dreaptă. In figura 3, N_φ N_θ $N_{\varphi\theta}$ și $N_{\theta\varphi}$ reprezintă eforturi de întindere. Forțele tăietoare Q_φ, Q_θ sunt socotite pozitive, când sunt dirijate spre exterior (extrados) în secțiile φ, respectiv $\theta = \text{const.}$

In figura 4 momentele încovoietoare M_φ și M_θ sunt considerate pozitive, ele întinzând fibrele intradosului pânzei ($z = -h$). Momentele de răsucire $M_{\varphi\theta}$ și $M_{\theta\varphi}$ sunt de asemenea considerate pozitive în figura 4, ele tinzând să

rotească secţiile φ, respectiv $\theta = \text{const.}$ în sensul acelor unui ceasornic, pentru un observator privind spre φ, respectiv θ crescător.

Dacă solicitările de mai sus rezultă din calcul cu semnul minus, atunci ele acţionează în sens contrar faţă de cum sunt reprezentate în figurile 3 şi 4.

II

TEORIA DE MEMBRANĂ

A. ÎNCĂRCĂRI SIMETRICE

4. Ecuaţiile de bază şi integrarea lor. In cazul încărcărilor simetrice, orice plan meridian este plan de simetrie atât pentru încărcări, cât şi pentru suprafaţă.

De aici rezultă că componenta X a încărcării este constantă, iar componentele Y şi Z sunt funcţii doar de unghiul φ. Mai departe, rezultă că şi eforturile şi momentele sunt funcţii doar de φ, diferenţierile în raport cu θ fiind nule, adică $\frac{\partial (\ldots)}{\partial \theta} = 0$. Cu acestea ecuaţiile (3.1). . . (3.5) se pot scrie:

$$\frac{d\,(N_{\varphi\theta}\cdot r_0)}{d\varphi} + N_{\theta\varphi}\cdot r_1 \cos\varphi - Q_\theta\, r_1 \sin\varphi + X\, r_0\, r_1 = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{d\,(N_{\varphi\theta}\cdot r_0)}{d\varphi} - N_\theta\cdot r_1 \cos\varphi - Q_\varphi\cdot r_1 + Y\, r_0\, r_1 = 0 \tag{4.2}$$

$$N_\varphi\, r_0 + N_\theta\cdot r_1 \sin\varphi + \frac{d\,(Q_\varphi\cdot r_0)}{d\varphi} + Z\, r_0\, r_1 = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{d\,(M_{\varphi\theta}\cdot r_0)}{d\varphi} + M_{\theta\varphi}\cdot r_1 \cos\varphi - Q_\theta\, r_0\, r_1 = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{d\,(M_\varphi\cdot r_0)}{d\varphi} - M_\theta\cdot r_1 \cos\varphi - Q_\varphi\cdot r_0\, r_1 = 0 \tag{4.5}$$

Acestea sunt ecuaţiile generale în cazul încărcărilor simetrice.

Să ne ocupăm mai întâi de ecuaţiile (4.2) şi (4.3).

Inmulţind (4.2) cu $\sin\varphi$, (4.3) cu $\cos\varphi$, adunând şi ţinând seama că apar unele diferenţiale totale, obţinem:

$$\frac{d}{d\varphi}(N_\varphi\cdot r_0 \sin\varphi) + \frac{d}{d\varphi}(Q_\varphi\cdot r_0 \cos\varphi) + r_0\, r_1 (Y \sin\varphi + Z\cos\varphi) = 0$$

Prin integrare se obţine:

$$N_\varphi = -Q_\varphi\cdot\cot\varphi - \frac{1}{r_0 \sin\varphi}\left[C + \int r_0\, r_1 (Y\sin\varphi + Z\cos\varphi)\, d\varphi\right] \tag{4.6}$$

expresie în care C reprezintă o constantă de integrare.

După unele transformări simple, din (4.3) obţinem:

$$N_\theta = -\frac{1}{r_1}\cdot\frac{d(Q_\varphi\cdot r_2)}{d\varphi} + \frac{1}{r_1 \sin^2\varphi}\left[C + \int r_0 r_1 (Y\sin\varphi + Z\cos\varphi)\, d\varphi\right] - Z\, r_2 \tag{4.7}$$

Trebue observat că valorile lui N_φ și N_θ sunt funcție nu numai de componentele încărcării exterioare, ci și de necunoscuta Q_φ.

Să examinăm acum ce aproximații se pot face.

Eforturile unitare în pânză variază liniar cu grosimea acesteia (§ 12). Valorile extreme fiind însă foarte puțin diferite, vom putea considera că σ_φ, σ_θ și $\tau_{\varphi\theta}$ se distribue uniform pe grosimea pânzei, adică sunt independente de z.

De asemenea vom putea neglija pe z față de razele de curbură, adică:

$$1 + \frac{z}{r_{1,2}} \cong 1.$$

In această ultimă ipoteză, din relațiile (2.5)... (2.8) rezultă:

$$M_\varphi = M_\theta = M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} \equiv 0 \tag{4.8}$$

Ținând seama de (4.8), din (4.4) și (4.5) rezultă:

$$Q_\varphi = Q_\theta \equiv 0 \tag{4.9}$$

In mod analog, din (2.1)... (2.4) obținem integrând direct:

$$N_\varphi = \sigma_\varphi \cdot \delta\,;\; N_\theta = \sigma_\theta \cdot \delta\,;\; N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta} \cdot \delta \tag{4.10}$$

Observând acum că toate aceste rezultate se obțin dacă considerăm $z = 0$ sub semnul integral, urmează concluzia importantă că în teoria de membrană se consideră că eforturile iau naștere în suprafața mediană ($z = 0$). Din cauza grosimii neglijabile față de celelalte dimensiuni, urmează că eforturile unitare se distribue uniform pe grosimea pânzei, iar momentele sunt nule.

Sistemul de ecuații de echilibru în teoria de membrană se reduce la trei ecuații de proiecții, care în cazul încărcărilor simetrice au următoarea formă:

$$\frac{d(N_{\varphi\theta} \cdot r_0)}{d\varphi} + N_{\theta\varphi} \cdot r_1 \cos\varphi + X r_0 r_1 = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{d(N_\varphi \cdot r_0)}{d\varphi} - N_\theta \cdot r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0 \tag{4.12}$$

$$N_\varphi \cdot r_0 + N_\theta \cdot r_1 \sin\varphi + Z r_0 r_1 = 0 \tag{4.13}$$

Relațiile (4.11), (4.12) determină eforturile N_φ și N_θ. Expresiile lor se deduc din (4.6), (4.7) în care considerăm $Q_\varphi = 0$

$$N_\varphi = -\frac{1}{r_0 \sin\varphi}\left[C + \int r_0 r_1 (Y \sin\varphi + Z \cos\varphi)\, d\varphi\right] \tag{4.14}$$

$$N_\theta = +\frac{1}{r_1 \sin^2\varphi}\left[C + \int r_0 r_1 (Y \sin\varphi + Z \cos\varphi)\, d\varphi\right] - Z r_2 \tag{4.15}$$

Rămâne să determinăm pe $N_{\varphi\theta}$ din ecuația (4.11). Integrala se găsește, dacă ținem seama de (1.1), sub forma:

$$N_{\varphi\theta} = \frac{1}{r_0^2}\left(C_1 - X\int r_0^2 \cdot r_1\, d\varphi\right) \tag{4.16}$$

Problema de membrană este static determinată. Sistemul de trei ecuații diferențiale (4.11)... (4.13) are soluțiile (4.14), (4.15), (4.16) în funcție de două constante de integrare C și C_1.

In cazul încărcărilor obișnuite (de exemplu greutatea proprie, zăpada, presiunea unui fluid, etc.) componenta X este nulă. Să căutăm să determinăm în acest caz constanta C_1 în (4.16).

La creștet ($\varphi = 0$, la cupole închise) sau la paralelul superior ($\varphi = \varphi_s$, la cupole sau suprafețe deschise la partea superioară), forfecările sunt nule. Rezultă imediat $C_1 = 0$ și de aici:

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} \equiv 0 \tag{4.17}$$

Putem trage concluzia importantă că, dacă încărcarea simetrică este cuprinsă în plane meridiane, nu apar eforturi de forfecare în pânză.

In această ipoteză, încărcarea simetrică exterioară este echilibrată de eforturile de membrană N_φ și N_θ, determinate din următoarele ecuații de echilibru:

$$\frac{d(N_\varphi . r_0)}{d\varphi} - N_\theta r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0 \tag{4.12'}$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -Z \tag{4.13'}$$

Sub această formă se întâlnesc în unele tratate.

In unele cazuri de încărcări simple sau forma cupolei simple, efortul N_φ se poate obține imediat. Pentru aceasta să revenim la expresia (4.12), pe care să o scriem sub forma:

$$2\pi r_0 . N_\varphi . \sin\varphi = -\int_{\varphi}^{\varphi_s} (Y \sin\varphi + Z\cos\varphi) . 2\pi r_0 . r_1 d\varphi. \tag{4.18}$$

Dacă însumăm, de-a-lungul unui paralel, componentele verticale ale eforturilor N_φ, se obține primul membru al egalității (4.18).

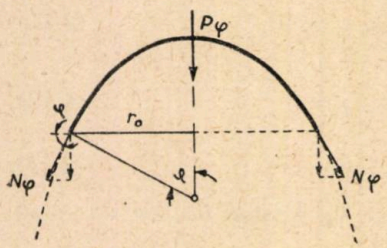


Fig. 5.— Relația între N_φ și P_φ.

Paranteza din membrul al doilea reprezintă componenta verticală a încărcării exterioare pe unitatea de suprafață, iar $2\pi r_0 . r_1 d\varphi$ reprezintă o fâșie de suprafață cuprinsă între două cercuri paralele subîntinzând unghiul $d\varphi$. Integrala reprezintă deci componenta verticală a rezultantei încărcărilor deasupra unui cerc paralel r_0 și o notăm cu P_φ. Din (4.18) rezultă atunci imediat:

$$N_\varphi = -\frac{P_\varphi}{2\pi r_0 \sin\varphi} \tag{4.19}$$

Semnul minus apare deoarece s'a presupus că N_φ este dirijat spre φ crescător (fig. 5).

Efortul N_θ se deduce din (4.13').

Exemple de calcul

Calculul unui turn având forma unui hiperboloid de rotație.

Ecuația cartesiană a hiperbolei meridiane este:

$$\frac{r_0^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{4.20}$$

în care a reprezintă raza cercului de gât (secțiunea $z = 0$).

Prin derivare, din (4.20) se deduce

$$\frac{dz}{dr_0} = -\operatorname{tg}\varphi = -\frac{b}{a}\cdot\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - a^2}} \tag{4.21}$$

și de aici

$$r_0 = -\frac{a^2\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\varphi - b^2}};\ z = +\frac{b^2}{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\varphi - b^2}};\ \frac{dr_0}{d\varphi} = \frac{a^2 b^2}{\cos^2\varphi\cdot(a^2\operatorname{tg}\varphi - b^2)^{3/2}} \tag{4.22}$$

$$r_1 = \frac{a^2 b^2}{\cos^3\varphi\,(a^2\operatorname{tg}^2\varphi - b^2)^{3/2}} \tag{4.23}$$

Componentele încărcării sunt: $X \equiv 0$; $Y = g\sin\varphi$; $Z = g\cos\varphi$. Pentru determinarea efortului N_φ, aplicăm relația (4.14) care devine:

$$N_\varphi = \frac{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\varphi - b^2}}{a^2\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\varphi}\cdot\left[C' - \int\frac{a^4 b^2\sin\varphi}{\cos^4\varphi(a^2\operatorname{tg}^2\varphi - b^2)^2}\cdot(g\sin^2\varphi + g\cos^2\varphi)\,d\varphi\right]$$

Pentru simplificare introducem notația $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} A$. ($A$ unghiul asimptotelor hiperbolei meridiane cu axa $O r_0$). Cu aceasta expresia lui N_φ se scrie:

$$N_\varphi = -ga\sin^2 A\cos A\,\frac{\sqrt{\cos^2 A - \cos^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\left[C'' + \int\frac{-\sin\varphi\,.\,d\varphi}{(\cos^2 A - \cos^2\varphi)^2}\right]$$

Integrala se efectuează cu ușurință prin substituția $\cos\varphi = t$, încât rezultatul final, în funcție de o constantă de integrare C, este:

$$N_\varphi = -ga\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 A}{4}\cdot\frac{\sqrt{\cos^2 A - \cos^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\left[C + \frac{2\cos A\cos\varphi}{\cos^2 A - \cos^2\varphi} + ln\left(\frac{\cos A + \cos\varphi}{\cos A - \cos\varphi}\right)\right] \tag{4.24}$$

Constanta C se determină astfel, încât la cercul superior ($\varphi = \varphi_s$) efortul N_φ să fie nul. Pentru ușurința determinării lui C și a diferitelor valori pentru N_φ și N_0, s'a întocmit tabloul Nr. 2.

Dacă se notează $\xi = \frac{\cos\varphi}{\cos A}$ și prin $f(\xi)$ paranteza dreaptă din (4.24):

$$f(\xi) = \frac{2\cos A\cos\varphi}{\cos^2 A - \cos^2\varphi} + ln\left(\frac{\cos A + \cos\varphi}{\cos A - \cos\varphi}\right) = \frac{2\xi}{1 - \xi^2} + ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)$$

pentru diferitele valori ale lui ξ, din tabloul Nr. 2 se poate citi direct $f(\xi)$. Se observă că $f(-\xi) = -f(\xi)$.

Constanta va avea valoarea $C = -f(\xi_s)$, unde $\xi_s = \frac{\cos\varphi_s}{\cos A}$.

Pentru ușurința calculului, expresiile lui N_φ și N_0 se pun sub forma

$$N_\varphi = -ga\frac{\operatorname{tg}^2 A}{4\cos A}\cdot\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1 + \operatorname{tg}^2 A - \xi^2}\cdot[C + f(\xi)]$$

$$N_0 = ga\cos A.\,\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} + \frac{N_\varphi}{\operatorname{tg}^2 A}(1 - \xi^2)$$

TABLOUL Nr. 2

ξ	$f(\xi)$	ξ	$f(\xi)$	ξ	$f(\xi)$	ξ	$f(\xi)$
0,000	0,000	0,100	0,403	0,275	1,159	0,550	2,814
0,010	0,040	0,110	0,444	0,300	1,278	0,600	3,261
0,020	0,080	0,120	0,485	0,325	1,401	0,650	3,802
0,030	0,120	0,130	0,526	0,350	1,529	0,700	4,480
0,040	0,160	0,140	0,567	0,375	1,661	0,750	5,374
0,050	0,200	0,150	0,609	0,400	1,800	0,800	6,642
0,060	0,241	0,175	0,715	0,425	1,945	0,850	8,638
0,070	0,281	0,200	0,822	0,450	2,111	0,900	12,418
0,080	0,321	0,225	0,932	0,475	2,261	0,950	23,151
0,090	0,362	0,250	1,044	0,500	2,432	1,000	∞

Variaţia eforturilor N_φ şi N_θ (raportate la grosimea δ) în cazul particular când: $a = 10$ m, $b = 23$ m, tg $A = 2{,}30$, $r_{0s} = 10{,}90$ m, $\gamma = 2400$ kg/m^3 (beton armat) se poate urmări în figura 6.

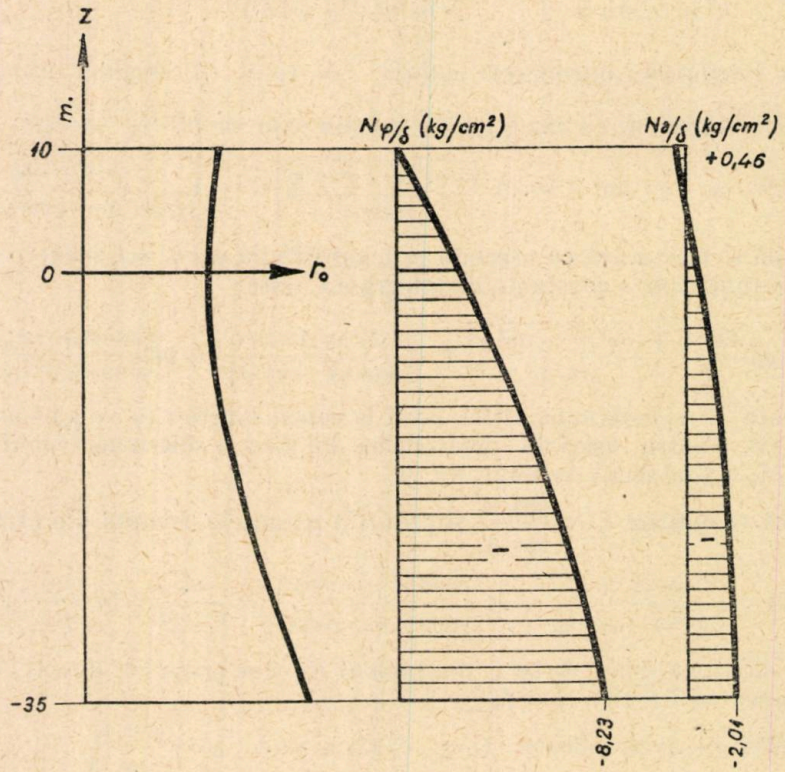


Fig. 6.— Variaţia eforturilor unitare la un turn hiperbolic.

Calculul unei cupole deschise încărcată cu zăpadă

Incărcarea cu zăpadă p se consideră uniform distribuită pe unitatea de suprafaţă orizontală; componentele încărcării sunt: $X = 0$; $Y = p \sin\varphi . \cos\varphi$; $Z = p.\cos^2\varphi$.

Folosind relația (4.19), încărcarea totală deasupra unui cerc paralel (φ) este:

$$P_\varphi = \pi r_0^2 p - \pi r_{os}^2 . p.$$

De aici rezultă pentru N_φ expresia:

$$N_\varphi = -\frac{pr_2}{2} + \frac{pr_{os}^2}{2r_0 \sin \varphi}$$

Din (4.13′) se obține direct N_θ.

In cazul cupolei închise la vârf avem $r_{os} = 0$, iar pentru eforturi avem soluțiile:

$$N_\varphi = -\frac{pr_2}{2}$$

$$N_\theta = -\frac{pr_2}{2}\left(\sin 2\varphi - \frac{r_2}{r_1}\right)$$

Calculul unei cupole sferice deschise supusă greutății proprii.

Razele de curbură sunt constante și egale:

$$r_1 = r_2 = a; \quad r_0 = a \sin \varphi$$

Din aplicarea relației (4.19) și (4.13′) rezultă:

$$P_\varphi = 2\pi a . ga(1 - \cos\varphi) - 2\pi a . ga(1 - \cos\varphi_s) = 2\pi ga^2(\cos\varphi_s - \cos\varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{ga}{\sin^2\varphi}(\cos\varphi_s - \cos\varphi) \\ N_\theta &= -ga\left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi_s - \cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right) \end{aligned}\right\}$$

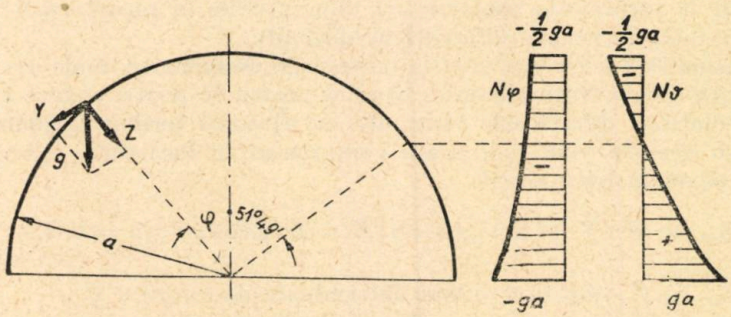


Fig. 7. — Cupolă sferică încărcată cu greutatea proprie.

Din relațiile precedente se deduce pentru cupola închisă

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{ga}{1 + \cos\varphi} \\ N_\theta &= -ga\left(\cos\varphi - \frac{1}{1 + \cos\varphi}\right) \end{aligned}\right\}$$

Variația eforturilor se poate urmări în figura 7.

Încărcarea din luminator

Fie P_φ greutatea totală a luminatorului.

Aplicarea directă a formulei (4.19) ne dă:

$$N_\varphi = -N_\theta = -\frac{P_\varphi}{2\pi a \sin^2\varphi}$$

Se observă că pentru $\varphi \to 0$, când sarcina P_φ devine concentrată și aplicată în creștetul cupolei, eforturile devin infinite.

B. INCĂRCĂRI NESIMETRICE

5. **Ecuațiile de bază și integrarea lor.** Folosind aceleași aproximații ca în cazul încărcărilor simetrice, vom putea neglija forțele tăietoare și momentele. Problema devine static determinată, iar cele trei eforturi N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ urmează să fie determinate din cele trei ecuații de proiecție. Acestea se deduc din (3.1). . . (3.3) sub forma:

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_{\varphi\theta} \cdot r_0)}{\partial \varphi} + N_{\theta\varphi} r_1 \cos\varphi + X r_0 r_1 = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_\varphi \cdot r_0)}{\partial \varphi} - N_\theta r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_0} = -Z \tag{5.3}$$

Am văzut la încărcările simetrice că diferențierile în raport cu θ fiind nule, aveam de integrat ecuații diferențiale obișnuite.

Problema este mult mai grea la încărcările nesimetrice, unde avem de integrat ecuații cu derivate parțiale. Studiul nostru se poate reduce tot la integrarea ecuațiilor diferențiale obișnuite cu ajutorul seriilor trigonometrice.

Pentru aceasta vom reprezenta componentele încărcării exterioare prin șirurile trigonometrice simple

$$X = \Sigma X_n \cdot \sin n\theta;\ Y = \Sigma Y_n \cdot \cos n\theta;\ Z = \Sigma Z_n \cdot \cos n\theta \quad (n = 0, 1, 2\ldots) \tag{5.4}$$

în care X_n, Y_n, Z_n sunt funcții bine determinate de unghiul φ.

Putem presupune în acest caz că și eforturile se pot pune sub aceeași formă trigonometrică

$$N_\varphi = \Sigma N_{\varphi n} \cdot \cos n\theta;\ N_\theta = \Sigma N_{\theta n} \cdot \cos n\theta;\ N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = \Sigma N_{\varphi\theta n} \cdot \sin n\theta$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.5}$$

în care $N_{\varphi n}$, $N_{\theta n}$, $N_{\varphi\theta n}$ sunt funcții pure de φ ce urmează a fi determinate. Se va observa că, mărginindu-ne la primul termen ($n = 0$), ne găsim în cazul încărcărilor simetrice cu $X = 0$ și $N_{\varphi\theta} = 0$.

Seriile (5.4) și (5.5) vor satisface în ansamblu ecuațiile (5.1). . . (5.3), numai dacă fiecare termen în parte va satisface aceste ecuații.

Corespunzător termenilor de rang n, vom avea după simplificarea liniilor trigonometrice ale unghiului θ:

$$-N_{\theta n}\cdot nr_1+\frac{d}{d\varphi}(N_{\varphi\theta n}\cdot r_0)+N_{\varphi\theta n}\cdot r_1\cos\varphi+X_n\cdot r_0 r_1=0 \tag{5.6}$$

$$N_{\theta\varphi n}\cdot nr_1+\frac{d}{d\varphi}(N_{\varphi n}\cdot r_0)-N_{\theta n}r_1\cos\varphi+Y_n\cdot r_0 r_1=0 \tag{5.7}$$

$$N_{\theta n}=-Z_n\cdot r_2-N_{\varphi n}\cdot\frac{r_2}{r_1} \tag{5.8}$$

Prin eliminarea lui $N_{\theta n}$, se ajunge la cele două ecuații diferențiale de bază ale încărcărilor nesimetrice:

$$\frac{dN_{\varphi\theta n}}{d\varphi}+\left(\frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}+\frac{r_1}{r_2}\cot\varphi\right)\cdot N_{\varphi\theta n}+\frac{n}{\sin\varphi}\cdot N_{\varphi n}=-X_n\cdot r_1-Z_n\cdot\frac{nr_1}{\sin\varphi} \tag{5.9}$$

$$\frac{dN_{\varphi n}}{d\varphi}+\left(\frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}+\cot\varphi\right)\cdot N_{\varphi n}+\frac{n}{\sin\varphi}\cdot\frac{r_1}{r_2}N_{\varphi\theta n}=-Y_n\cdot r_1-Z_n r_1\cot\varphi \tag{5.10}$$

Înlocuind pe r_1 și r_2 cu valorile (1.1) și (1.2), ecuațiile (5.9) și (5.10) se pun sub o formă mai convenabilă:

$$\frac{dN_{\varphi\theta n}}{d\varphi}+\frac{2}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}N_{\varphi\theta n}+\frac{n}{\sin\varphi}N_{\varphi n}=-\left(X_n+Z_n\frac{n}{\sin\varphi}\right)\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} \tag{5.11}$$

$$\frac{dN_{\varphi n}}{d\varphi}+\left(\frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}+\cot\varphi\right)N_{\varphi n}+$$

$$+\frac{n}{r_0\cos\varphi}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}\cdot N_{\varphi\theta n}=-(Y_n+Z_n\cot\varphi)\frac{dr_0}{d\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} \tag{5.12}$$

Înmulțind ecuația (5.11) cu r_0^2, ecuația (5.12) cu $r_0\sin\varphi$ și introducând notațiile:

$$F=N_{\varphi\theta n}\cdot r_0^2\ ;\quad V=N_{\varphi n}\cdot r_0\sin\varphi \tag{5.13}$$

ecuațiile (5.11) și (5.12) se scriu sub forma simplă:

$$\frac{dF}{d\varphi}+\frac{nr_0}{\sin^2\varphi}\cdot V=-\left(X_n+\frac{n}{\sin\varphi}Z_n\right)\frac{r_0^2}{\cos\varphi}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi} \tag{5.14}$$

$$\frac{dV}{d\varphi}+\frac{n\operatorname{tg}\varphi}{r_0^2}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}\cdot F=-(Y_n\cdot\operatorname{tg}\varphi+Z_n)\cdot r_0\frac{dr_0}{d\varphi} \tag{5.15}$$

Prin scoaterea lui V din (5.14) și introducerea lui în (5.15) se obține:

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2}+\left(2\cot\varphi-\frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}\right)\cdot\frac{dF}{d\varphi}-\frac{n^2}{\sin\varphi\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}F=L(\varphi) \tag{5.16}$$

în care am notat:

$$L(\varphi)=(Y_n\cdot\operatorname{tg}\varphi+Z_n)\frac{nr_0^2}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}-\frac{r_0}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left[(X_n\sin\varphi+nZ_n)\operatorname{tg}\varphi\cdot r_0\frac{dr_0}{d\varphi}\right] \tag{5.17}$$

Ecuația diferențială (5.16) este o ecuație diferențială lineară și de ordinul al doilea, cu coeficienți variabili și parte dreaptă (neomogenă) $L(\varphi)$.

Ea se poate integra în cazul când $n = 0$, când se recade peste soluția încărcărilor simetrice.

Ea se mai poate integra în cazul general pentru $n = 1$ (cazul obișnuit în practică). Ecuația de integrat se poate scrie sub forma:

$$\left(\frac{d^2F}{d\varphi^2} + 2\cot\varphi \cdot \frac{dF}{d\varphi}\right) - \frac{1}{r_0} \cdot \frac{dr_0}{d\varphi}\left(\frac{dF}{d\varphi} + \frac{F}{\sin\varphi\cos\varphi}\right) = L(\varphi) \tag{5.18}$$

Din analiză se știe că în cazul ecuațiilor lineare va trebui să căutăm o soluție a ecuației omogene, la care vom adăuga o soluție particulară. In cazul de față se găsesc destul de ușor două soluții particulare ale ecuației omogene:

$$F_1 = \cot\varphi \;\; ; \;\; F_2 = \cot\varphi \int \frac{r_0\, d\varphi}{\cos^2\varphi} \tag{5.19}$$

Soluția generală a ecuației omogene este atunci:

$$F = C_1 F_1 + C_2 F_2 \tag{5.20}$$

în care C_1 și C_2 sunt constante de integrare.

Soluția ecuației cu parte dreaptă se obține cu ajutorul metodei variației constantelor. Anume, admițând că în (5.20) C_1 și C_2 nu sunt constante, ci funcții de φ, le determinăm din sistemul:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot \frac{dC_1}{d\varphi} + F_2 \cdot \frac{dC_2}{d\varphi} &= 0 \\ \frac{dF_1}{d\varphi} \cdot \frac{dC_1}{d\varphi} + \frac{dF_2}{d\varphi} \cdot \frac{dC_2}{d\varphi} &= L(\varphi) \end{aligned}$$

din care se obține final:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= c_1 - \int \frac{L(\varphi)}{r_0} \sin\varphi\cos\varphi \cdot d\varphi \int \frac{r_0\, d\varphi}{\cos^2\varphi} \\ C_2 &= c_2 + \int \frac{L(\varphi)}{r_0} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \end{aligned}\right\}$$

c_1, c_2 sunt aici constante veritabile.

Expresia definitivă a lui F se poate pune atunci sub forma:

$$\begin{aligned} F = \cot\varphi \left[c_1 - \int \frac{L(\varphi)}{r_0} \sin\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int \frac{r_0\, d\varphi}{\cos^2\varphi} \right] + \\ + \cot\varphi \int \frac{r_0\, d\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \left[c_2 + \int \frac{L(\varphi)}{r_0} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \right] \end{aligned} \tag{5.21}$$

Odată determinată funcția F, eforturile $N_{\varphi\theta_1}$, N_{φ_1} și N_{θ_1} se obțin sub următoarea formă:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi\theta 1} &= \frac{1}{r_0^2} F \\ N_{\varphi 1} &= -\frac{\sin\varphi}{r_0^2} \cdot \frac{dF}{d\varphi} - r_1 (X_1 \sin\varphi + Z_1) \\ N_{\theta 1} &= \frac{1}{r_0 r_1} \cdot \frac{dF}{d\varphi} + X_1 r_0 \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Pentru $n>1$ nu se poate obține o integrală generală a ecuației (5.16).

In cazuri particulare ale curbelor meridiane, integrarea generală a ecuației (5.16) reușește.

Astfel, în cazul cupolei sferice de rază a vom avea $r_0 = a \sin \varphi$, iar ecuația (5.16), făcută omogenă, se scrie:

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} + \frac{dF}{d\varphi} \cot \varphi - \frac{n^2F}{\sin^2\varphi} = 0$$

Se pot găsi destul de ușor soluțiile particulare

$$F_1 = \cot^n \frac{\varphi}{2} \; ; \; F_2 = \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}$$

Procedând ca mai sus, se găsește în cele din urmă soluția completă:

$$F = \cot^n \frac{\varphi}{2}\left[c_1 - \frac{2}{n}\int \frac{L(\varphi)}{\sin \varphi} \cdot \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}\, d\varphi\right] + \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}\left[c_2 + \frac{2}{n}\int \frac{L(\varphi)}{\sin \varphi} \cdot \cot^n \frac{\varphi}{2} d\varphi\right] \quad (5.23)$$

Analog, în cazul cupolei parabolice vom avea $r_1 = \dfrac{a}{\cos^3 \varphi}$, $r_0 = a \operatorname{tg} \varphi$, iar ecuația (5.16), făcută omogenă, se scrie:

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} + \frac{dF}{d\varphi} \cot 2\varphi - \frac{4n^2 F}{\sin^2 2\varphi} = 0$$

cu soluțiile particulare:

$$F_1 = \cot^n \varphi \; ; \quad F_2 = \operatorname{tg}^n \varphi .$$

Soluția completă se determină ca mai sus și are expresia

$$F = \cot^n \varphi\left[c_1 - 2n\int \frac{L(\varphi) \operatorname{tg}^n \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi\right] + \operatorname{tg}^n \varphi\left[c_2 + 2n\int \frac{L(\varphi) \cot^n \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi\right] \quad (5.24)$$

Odată determinată funcția F, eforturile $N_{\varphi\theta n}$, $N_{\varphi n}$ și $N_{\theta n}$ se obțin sub următoarea formă:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi\theta n} &= \frac{1}{r_0^2} F \\ N_{\varphi n} &= -\frac{\sin \varphi}{n r_0^2} \cdot \frac{dF}{d\varphi} - r_1\left(\frac{\sin \varphi}{n} X_n + Z_n\right) \\ N_{\theta n} &= \frac{1}{n r_0 r_1} \cdot \frac{dF}{d\varphi} + X_n \frac{r_0}{n} \end{aligned}\right\} \quad (5.25)$$

6. Integrarea aproximativă a ecuațiilor de bază. Pentru cazurile $n > 1$ se poate obține o soluție aproximativă a eforturilor, considerând că razele de curbură principale sunt egale:

$$r_1 \simeq r_2 \quad (6.1)$$

Ecuațiile (5.9) și (5.10) se pot scrie în acest caz, dacă considerăm în (5.10) că:

$$\cot\varphi \simeq \frac{r_1}{r_2}\cot\varphi \text{ și } \frac{n}{\sin\varphi}\cdot\frac{r_1}{r_2} \simeq \frac{n}{\sin\varphi}$$

$$\frac{dN_{\varphi\theta n}}{d\varphi} + \frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}N_{\varphi\theta n} + \frac{n}{\sin\varphi}N_{\varphi n} = -\left(X_n + \frac{n}{\sin\varphi}Z_n\right)r_1 \tag{6.2}$$

$$\frac{dN_{\varphi n}}{d\varphi} + \frac{2}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}N_{\varphi n} + \frac{n}{\sin\varphi}N_{\varphi\theta n} = -(Y_n + Z_n\cot\varphi)r_1 \tag{6.3}$$

Observăm că eforturile și derivatele lor au aceiași coeficienți în (6.2) și (6.3); de aceea suntem conduși să facem următoarele schimbări de funcții:

$$N_{\varphi n} + N_{\varphi\theta n} = U_{1n}\ ;\quad N_{\varphi n} - N_{\varphi\theta n} = U_{2n} \tag{6.4}$$

Mai introducem notațiile:

$$L_{1\,2}(\varphi) = (\pm X_n + Y_n)r_1 + Z_n\cdot r_1\frac{\cos\varphi \pm n}{\sin\varphi} \tag{6.5}$$

Prin adunarea, respectiv scăderea membru cu membru a ecuațiilor (6.2), (6.3) și ținând seama de (6.4), (6.5), se obțin ecuațiile separate:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU_{1n}}{d\varphi} + \left(\frac{2}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi} + \frac{n}{\sin\varphi}\right)U_{1n} + L_1(\varphi) = 0\\ \frac{dU_{2n}}{d\varphi} + \left(\frac{2}{r_2}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi} - \frac{n}{\sin\varphi}\right)U_{2n} + L_2(\varphi) = 0\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

cu soluția generală în funcție de două constante de integrare A_1, A_2:

$$\left.\begin{aligned}U_{1n} = \left[A_1 - \int L_1(\varphi)\cdot r_0^2\ \mathrm{gt}^n\frac{\varphi}{2}d\varphi\right]\frac{\cot^n\frac{\varphi}{2}}{r_0^2}\\ U_{2n} = \left[A_2 - \int L_2(\varphi)\, r_0^2\ \cot^n\frac{\varphi}{2}d\varphi\right]\frac{\mathrm{tg}^n\frac{\varphi}{2}}{d\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Eforturile $N_{\varphi n}$, $N_{\varphi\theta n}$, se deduc din (6.4), iar $N_{\theta n}$, din (5.8).

In mod analog, se vor mai putea obține trei metode variante, căutând pe baza egalității $r_1 = r_2$ să facem ca în ecuația (5.9) și (5.10) necunoscutele să aibă aceiași coeficienți. Unele calcule comparative au arătat că metoda prezentată mai sus dă cele mai mici erori.

Soluțiile (6.7) sunt riguros exacte în cazul cupolei sferice când $r_1 = r_2 = a$, $r_\theta = a\sin\varphi$. In acest caz se obțin formulele cunoscute:

$$\left.\begin{aligned}U_{1n} = \left[C_1 - \int L_1(\varphi)\sin^2\varphi\ \mathrm{tg}^n\frac{\varphi}{2}d\varphi\right]\frac{\cot^n\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi}\\ U_{2n} = \left[C_2 - \int L_2(\varphi)\sin^2\varphi\cot^n\frac{\varphi}{2}d\varphi\right]\frac{\mathrm{tg}^n\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Constantele de integrare se determină astfel, încât să satisfacă condițiile la limită, anume că eforturile $N_{\varphi n}$ și $N_{\varphi\theta n}$ trebue să fie finite la cheie ($\varphi = 0$, în cazul cupolelor închise) sau nule la cercul paralel superior ($\varphi = \varphi_s$, în cazul cupolelor deschise).

Când încărcarea exterioară cuprinde mai mulți termeni, operațiile se vor repeta pentru fiecare termen n, rezultatele finale obținându-se prin însumarea tuturor rezultatelor parțiale.

Exemple de calcul

Presiunea vântului asupra unei cupole sferice.

Admitem că presiunea vântului variază după legea: $X = Y \equiv 0$, $Z = Z_1 \cos\theta = p \sin\varphi \cos\theta$, direcția vântului fiind paralelă cu planul meridian $\theta = 0$.

Din (6.5) rezultă factorii de încărcare: $L_{1,2}(\varphi) = p\,a\,(\cos\varphi \pm 1)$, iar după efectuarea integralelor în (6.8), se obțin eforturile:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi_1} &= \frac{1}{2\sin^3\varphi}\left[C_1 + C_2 + (C_1 - C_2)\cos\varphi + 2\,pa\cos\varphi\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\right] \\ N_{\varphi\theta_1} &= \frac{1}{2\sin^3\varphi}\left[C_1 - C_2 + (C_1 + C_2)\cos\varphi + 2\,pa\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (6.9)$$

Considerând cupola închisă, pentru $\varphi = 0$, expresiile (6.9) sunt triplu nedeterminate. Prin desvoltări în serie limitate la primii trei termeni se poate ridica nedeterminarea și rezultă pentru constante valorile $C_1 = -C_2 = -\frac{2}{3}\,pa$

Expresiile finale ale eforturilor se pot scrie atunci:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{pa}{3}\cdot\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\cdot\cos\theta \\ N_{\varphi\theta} &= -\frac{pa}{3}\cdot\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\theta \\ N_\theta &= -\frac{pa}{3}\cdot\sin\varphi\cos\theta - N_\varphi \end{aligned}\right\} \quad (6.10)$$

Variația acestor eforturi se poate urmări în figura 8.

7. Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite. Am arătat în capitolele precedente că soluția generală a ecuațiilor de bază a încărcărilor nesimetrice este necunoscută.

Se poate obține o soluție aproximativă de calcul numeric, aproximația fiind oricât de mică dorim, dacă nu vom lucra cu infiniți mici, ci cu cantități foarte mici finite.

In acest caz vom considera:

$$d(\ldots) \simeq \Delta(\ldots) = (\ldots)_{m+1} - (\ldots)_m$$

Aceasta presupune că împărțim curba meridiană într'un număr oarecare de arce prin punctele $0, 1 \ldots m, m+1, \ldots$ și o înlocuim apoi prin coardele unind câte două puncte consecutive.

Scriem din nou ecuațiile de integrat [1]):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dN_{\varphi\theta}}{d\varphi}+\frac{2}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}\cdot N_{\varphi\theta}+\frac{n}{\sin\varphi}\cdot N_{\varphi}=-\left(X+\frac{n}{\sin\varphi}Z\right)r_1\\&\frac{dN_{\varphi}}{d\varphi}+\left(\frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}+\cot\varphi\right)N_{\varphi}+\frac{n}{\sin\varphi}\cdot\frac{r_1}{r_2}\cdot N_{\varphi\theta}=-(Y+Z\cot\varphi)\,r_1\end{aligned}\right\}\quad(7.1)$$

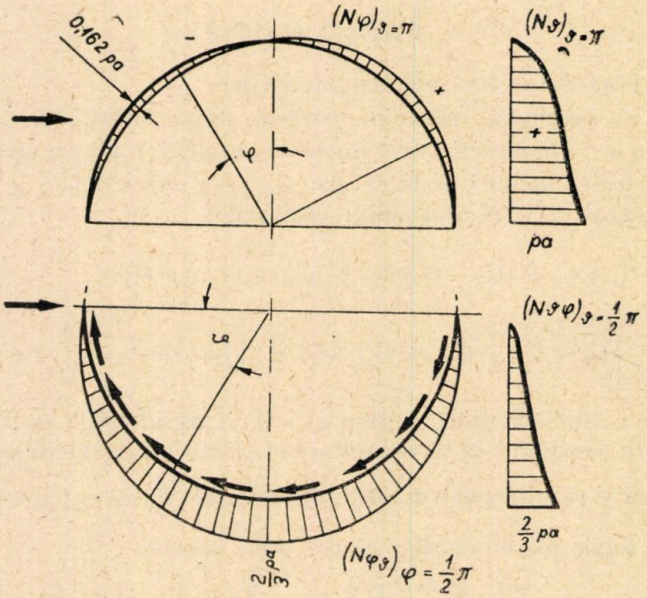


Fig. 8.— Eforturi din vânt.

Trecând la diferențe finite, relațiile (7.1) se aduc la forma:

$$\left.\begin{aligned}&N_{\varphi\theta}^{m+1}=\frac{r_0^m}{r_0}N_{\varphi\theta}^m-\frac{n\,\Delta\varphi}{\sin\varphi}\cdot N_{\varphi}^m-\left(X+\frac{n}{\sin\varphi}Z\right)r_1\,\Delta\varphi\\&N_{\varphi}^{m+1}=\frac{3\,r_0^m-r_0^{m+1}}{2\,r_0}\cdot N_{\varphi}^m-\frac{n\,r_1\,\Delta\varphi}{r_0}N_{\varphi\theta}^m-(Y+Z\cot\varphi)\,r_1\,\Delta\varphi\end{aligned}\right\}\quad(7.2)$$

In fond cele două ecuații (7.2) se pot pune sub forma:

$$\left.\begin{aligned}N_{\varphi\theta}^{m+1}&=A^m N_{\varphi\theta}^m+B^m N_{\varphi}^m+C^m\\N_{\varphi}^{m+1}&=D^m N_{\varphi}^m+E^m N_{\varphi\theta}^m+F^m\end{aligned}\right\}\quad(7.3)$$

Semnificația factorilor $A^m, \ldots F^m$ rezultă din compararea ecuațiilor (7.2) și (7.3). Valorile neafectate de indici m reprezintă valoarea medie pe interval, adică

$$(\ldots)=\frac{(\ldots)_{m+1}+(\ldots)_m}{2}$$

[1]) Pentru simplificarea notației s'au suprimat indicii n.

Expresiile (7.3) formează relații de recurență pentru determinarea lui $N_{\varphi\theta}$ și N_{φ} când $m = 0, 1, 2, \ldots$

Cunoscând condițiile marginale (§ 6), avem:

$$N^0_{\varphi\theta} = N^0_{\varphi} = 0$$

dacă presupunem că împărțirea pe tronsoane începe dela partea superioară a suprafeței. Pentru celelalte rosturi, eforturile se deduc din aproape în aproape cu valori numerice determinate, independente de constante.

Exemplu de calcul

Presiunea vântului asupra unei cupole parabolice închise.

Date geometrice: $f = \frac{a}{2}\operatorname{tg}^2\varphi$, $r_0 = a\operatorname{tg}\varphi$, $r_1 = \frac{a}{\cos^3\varphi}$, în care f reprezintă săgeata cupolei până la cercul paralel (φ).

Soluția exactă: conform relației (5.17) factorul de încărcare $L(\varphi)$ este:

$$L(\varphi) = -2pa^3 \cdot \frac{\sin^3\varphi}{\cos^6\varphi}$$

Pentru $N_{\varphi\theta 1}$ se găsește următoarea expresie exactă:

$$N_{\varphi\theta 1} = -\frac{pa}{15} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos^2\varphi + 2\cos^2\varphi + 8\cos\varphi + 4}{\cos^2\varphi(1+\cos\varphi)} \tag{7.4}$$

Soluția aproximativă: din relațiile (6.7) se obține pentru același $N_{\varphi\theta_1}$:

$$N_{\varphi\theta_1} = -\frac{pa}{4} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \tag{7.5}$$

In tabloul Nr. 3 sunt date comparativ rezultatele metodei exacte, celei aproximative și rezultatele obținute prin calcul cu diferențe finite pentru intervale constante $\Delta\varphi = 1°$. Pentru orientare sunt indicate raportul razelor de curbură, precum și pleoștirea $f/2r_0$. Deși pentru $\varphi = 45°$ avem $r_1 = 2r_2$ (prin ipoteză, $r_1 = r_2$) erorile metodei aproximative sunt de cca 1%.

TABLOUL Nr. 3

φ		0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$\frac{N_{\varphi\theta 1}}{pa}$	Metoda exactă	0	0,022	0,045	0,069	0,097	0,129	0,168	0,214	0,274	0,356
	Metoda aproximativă	0	0,022	0,044	0,069	0,097	0,129	0,167	0,214	0,274	0,354
	Diferențe finite	0	0,026	0,049	0,075	0,103	0,134	0,174	0,223	0,287	0,372
r_1/r_2		1	1,008	1,030	1,072	1,131	1,220	1,333	1,490	1,533	2,000
$f/2r_0$		0	1 / 45,72	1 / 22,69	1 / 14,93	1 / 10,99	1 / 8,58	1 / 6,93	1 / 5,72	1 / 4,77	1 / 4

8. Cupole sferice pe stâlpi izolați. Expresiile stabilite în capitolele precedente pentru eforturi au la bază ipoteza că pânza reazemă pe o fundație continuă, rezemarea făcându-se după tangentele la curbele meridiane.

In cazul cupolelor pe stâlpi izolaţi, apar la marginea pânzei noi eforturi, consecinţă a modului de rezemare. Aceste eforturi apărând la margine, este ca şi cum pânza ar fi neîncărcată; peste această stare, urmează să suprapunem starea de membrană produsă de încărcările exterioare.

Ca exemplu să tratăm o cupolă semisferică închisă, rezemând pe p stâlpi echidistanţi, şi supusă greutăţii proprii.

Să ne ocupăm mai întâi de pânza neîncărcată. Anulând factorii de încărcare $L_{1,2}(\varphi)$ în (6.8), eforturile $N_{\varphi n}$ şi $N_{\varphi\theta n}$ se scriu:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi n} &= \frac{U_{1n}+U_{2n}}{2} = \frac{1}{2\sin^2\varphi}\left(C_{1n}.\cot^n\frac{\varphi}{2} + C_{2n}.\operatorname{tg}^n\frac{\varphi}{2}\right) \\ N_{\varphi\theta n} &= \frac{U_{1n}-U_{2n}}{2} = \frac{1}{2\sin^2\varphi}\left(C_{1n}.\cot^n\frac{\varphi}{2} - C_{2n}.\operatorname{tg}^n\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

Constanta C_{1n} trebue să fie nulă, astfel ca eforturile la cheie să fie finite. Eforturile se exprimă atunci sub forma:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi n} &= -N_{\theta n} = \frac{C_{2n}}{2\sin^2\varphi}\cdot\operatorname{tg}^n\frac{\varphi}{2}\cdot\cos n\,\theta \\ N_{\varphi\theta n} &= -\frac{C_{2n}}{2\sin^2\varphi}\cdot\operatorname{tg}^n\frac{\varphi}{2}\cdot\sin n\,\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

La cercul de bază $\left(\varphi = \varphi_k = \frac{\pi}{2}\right)$, eforturile au mărimile

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi nk} &= -N_{\theta nk} = \frac{C_{2n}}{2}\cdot\cos n\theta \\ N_{\varphi\theta nk} &= \frac{C_{2n}}{2}\cdot\sin n\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Determinarea constantelor C_{2n} se face stabilind pe altă cale valorile eforturilor la marginea cupolei. Fie $2e$ unghiul la centru al fiecărui stâlp.

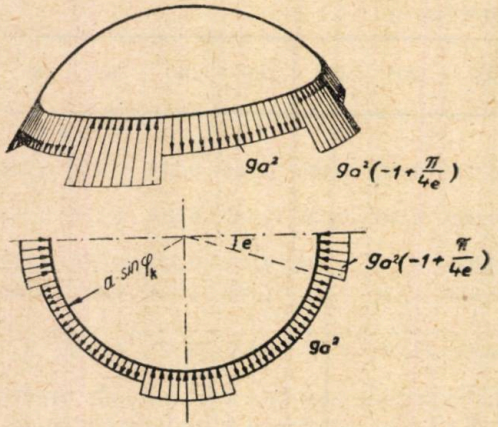


Fig. 9.— Cupolă pe stâlpi izolaţi.

Încărcarea totală $2\pi\,ga^2$ se transmite ca o sarcină ga^2 uniform distribuită pe unitatea de unghiu θ. Această încărcare totală este însă preluată de cei p stâlpi, fiecăruia revenindu-i $\frac{2\pi ga^2}{p}$ sau, pe unitatea de unghiu $\frac{\pi\,ga^2}{pe}$.

Scăzând reacţia din efortul la margine, vom avea (fig. 9).

ga^2 în câmp (între stâlpi)

$ga^2\left(-1+\frac{\pi}{pe}\right)$ în dreptul stâlpilor

Distribuția anterioară poate fi reprezentată prin seria trigonometrică:

$$N_{\varphi k} = 2\,ga \sum' \frac{\sin ne}{ne} \cos n\theta \qquad (n = p, 2p, 3p, \ldots) \tag{8.3}$$

Din compunerea relațiilor (8.2) și (8.3) rezultă:

$$C_{2n} = 4\,ga \frac{\sin ne}{ne}$$

Cu aceste valori se obține rezultatul final pentru soluția omogenă:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi = -N_\theta &= \frac{2\,ga}{\sin^2 \varphi} \sum' \frac{\sin ne}{ne} \cdot \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} \cdot \cos n\theta \\ N_{\varphi\theta} &= -\frac{2\,ga}{\sin^2 \varphi} \sum' \frac{\sin ne}{ne} \cdot \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} \cdot \sin n\theta \end{aligned}\right\} (n = p, 2p, 3p, \ldots) \tag{8.4}$$

Atunci când $e \to 0$, adică stâlpii în număr infinit constitue o fundație continuă, se recade peste soluția omogenă a încărcărilor nesimetrice.

Peste soluția (8.4) trebue suprapusă o soluție particulară. In cazul încărcărilor simetrice ea este dată de (4.14) și (4.15), iar în cazul încărcărilor nesimetrice, de relațiile (6.4).

9. Critica teoriei de membrană. Am arătat la § 4 că în ipoteza de membrană, forțele tăietoare Q_φ, Q_θ și momentele M_φ, M_θ, $M_{\varphi\theta}$, $M_{\theta\varphi}$ sunt neglijabile. Prin reducerea lor, problema devine static determinată și eforturile N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ rezultă în funcție de două constante de integrare. Determinarea constantelor se face astfel ca la cheie eforturile să fie finite sau la cercul paralel superior să fie nule.

La marginile inferioare ($\varphi = \varphi_k$) rezultă valori bine determinate pentru eforturi.

In acest mod nu se poate ține seama de condițiile de rezemare ale cupolei, nemai dispunând de constante.

In cazul când reazemele nu sunt dirijate după tangenta meridiană sau când se realizează o încastrare a marginii pânzei, se va produce o încovoiere locală.

Aceste nepotriviri dintre practică și calcul rezultă, după cum am arătat, din cauza simplificărilor aduse sistemului de ecuații, în care nu mai putem lua în considerare condițiile marginale dela bază.

Practica arată totuși, că la oarecare depărtare de reazem, eforturile reale concordă cu cele calculate, încât în lipsa unui calcul de încovoiere, teoria de membrană va da o exactitate suficientă.

O altă critică ce se poate aduce teoriei de membrană este că nu poate satisface condiții de continuitate.

Pentru aceasta să luăm ca exemplu un rezervor emisferic rezemat de-a-lungul unui cerc paralel $A - A$ (fig. 10) și umplut cu un lichid de greutate specifică γ.

Componentele încărcării: $X = Y \equiv 0$; $Z = -\gamma a (1 - \cos\varphi)$.
Eforturile rezultă sub forma:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{\gamma a^2}{3} \cdot \frac{\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi} \\ N_\theta &= -\frac{\gamma a^2}{3} \cdot \cos\varphi\,(3 + \cot^2\varphi) \end{aligned}\right\} \text{pentru } \varphi < \varphi_k \qquad (9')$$

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{\gamma a^2}{3} \cdot \frac{1 + \cos^3\varphi}{\sin^2\varphi} \\ N_\theta &= -\frac{\gamma a^2}{3} \cdot \left(2\cos\varphi + \frac{1}{1 - \cos\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \text{pentru } \varphi < \varphi_k \qquad (9'')$$

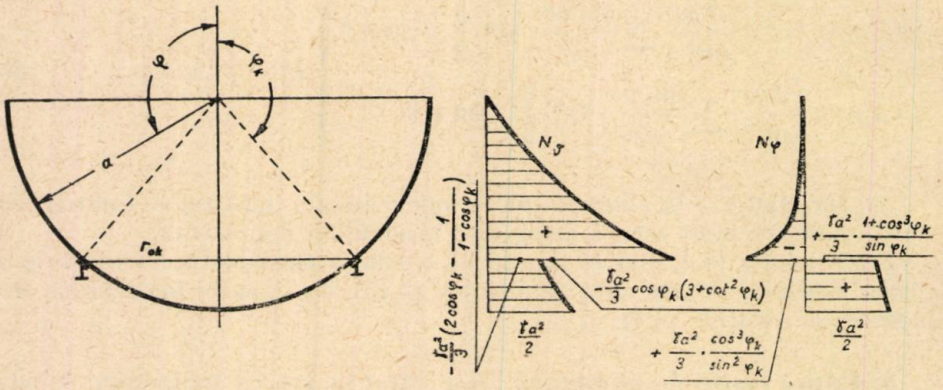


Fig. 10.— Rezervor emisferic.

De-a-lungul cercului paralel $A - A$ eforturile N_φ se modifică brusc cu cantitatea $\Delta N_{\varphi k} = \frac{\gamma a^2}{3 \sin^2 \varphi_k}$. Variația eforturilor este redată în figura 12.

Precum se vede, teoria de membrană nu satisface condiția de continuitate și este de așteptat o încovoiere locală lângă reazeme. Iată deci care ar fi lipsurile teoriei de membrană. Pentru un studiu mai exact, va trebui să luăm în considerare momentele și forțele tăietoare. Problema fiind însă static nedeterminată, va trebui să ținem seama și de deformările pânzei.

III

STUDIUL DEFORMĂRILOR

10. Deformările suprafeței mediane. Un punct oarecare P al suprafeței mediane capătă deplasările u, v, w, în direcția paralelului, a meridianului și a normalei. Deplasările u, v, sunt pozitive spre θ și φ crescători, iar w spre exterior. In secțiile infinit vecine deplasările cresc cu diferențiale.

Pentru exprimarea deformărilor, considerăm un element de suprafață $PQRS$ (fig. 11) definit conform § 1. Inainte de deformare avem

$PQ = ds_1$, și $PS = ds_0$. Prin deformare, vârfurile elementului ajung în punctele $P'\ Q'\ R'\ S'$ suferind deplasările:

$$P\,(u, v, w,); Q\left(u + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,d\varphi,\ v + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\,d\varphi,\ w + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\,d\varphi\right), S\left(u + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u}{\partial \theta}\,d\theta,\ v + \frac{\partial v}{\partial \theta}\,d\theta,\ w + \frac{\partial w}{\partial \theta}\,d\theta\right).$$

Lungirea totală a elementului de arc meridian (fig. 12) se scrie:

$$\Delta ds_1 = (ds_1 + dv)\frac{r_1 + w}{r_1} - ds_1 = \frac{r_1 dv + w ds_1 + w dv}{r_1}.$$

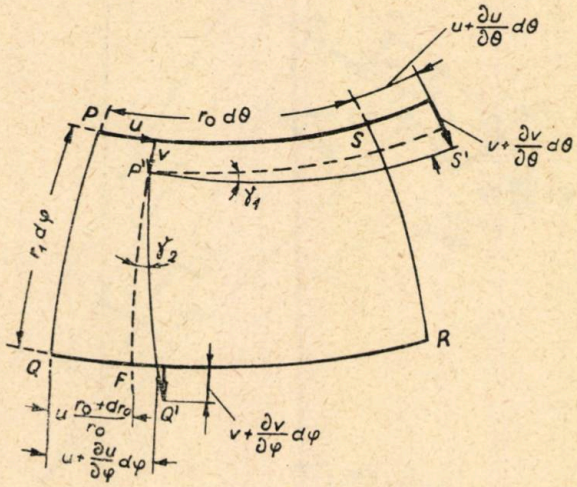


Fig. 11.— Deformările suprafeței mediane.

Raportând la lungimea inițială și neglijând infinitul mic $w \cdot dv$, se obține *lungirea specifică meridiană*:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta\, ds_1}{ds_1} = \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\right) \tag{10.1}$$

Analog, lungirea totală a elementului de cerc paralel (fig. 12) se scrie:

$$\Delta ds_0 = \left(v \cos \varphi + w \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) d\theta.$$

Raportând la lungimea inițială ds_0, se obține *lungirea specifică a cercului paralel*:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_2}(v \cot \varphi + w) + \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{10.2}$$

Unghiul drept SPQ descrește cu unghiul $\gamma_{\varphi\theta} = \gamma_1 + \gamma_2$ în care (fig. 11):

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\,d\theta}{r_0\,d\theta + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\,d\theta} \simeq \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\gamma_2 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi - u \frac{r_0 + dr_0}{r_0}}{r_1 d\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi} \simeq \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u}{r_0 r_1} \cdot \frac{dr_0}{d\varphi}$$

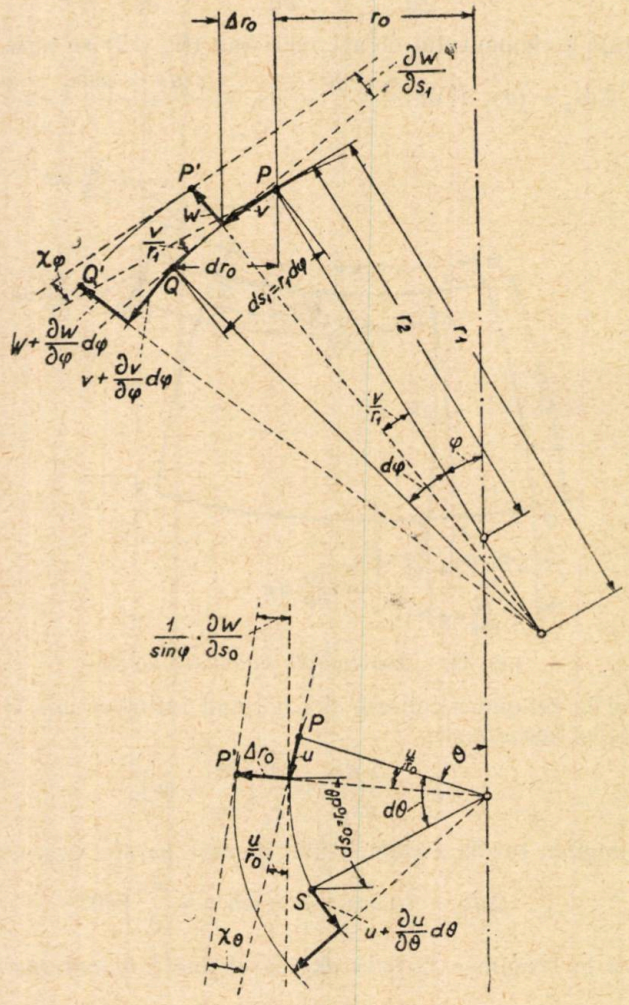


Fig. 12.— Alungirile suprafeței mediane.

După unele transformări, se obține *lunecarea specifică*:

$$\gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u \cos \varphi}{r_0} \qquad (10.')$$

Tangentele la meridian și la paralel variază și ele datorită lui u, v, w, cu cantitățile χ_φ, respectiv χ_θ.

Se obține astfel *variația pantei tangentei la meridian*:

$$\chi_\varphi = \frac{1}{r_1}\left(v - \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right), \tag{10.4}$$

și *variația pantei tangentei la cercul paralel*:

$$\chi_\theta = \frac{1}{r_0}\left(u - \frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{\partial w}{\partial \theta}\right). \tag{10.5}$$

In sfârșit, se mai pot stabili *variațiile de curbură principale* (inversele razelor de curbură respective):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}_\varphi &= \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_1} = \frac{d(\varphi + \chi_\varphi)}{ds_1(1+\varepsilon_\varphi)} - \frac{d\varphi}{ds_1} \cong \frac{\partial \chi_\varphi}{\partial s_1} \\ \mathfrak{X}_\theta &= \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2} = \frac{\sin(\varphi+\chi_\varphi)\cdot d(\theta+\chi_\theta)}{ds_0\cdot(1+\varepsilon_\theta)} - \frac{\sin\varphi\cdot d\theta}{ds_0} \end{aligned}\right\}$$

Pentru unghiuri foarte mici (χ_φ, χ_θ reprezintă variațiile unghiurilor φ respectiv θ) putem scrie:

$$\sin\chi \cong \chi;\ \cos\chi \cong 1;\ \sin(\varphi+\chi) = \sin\varphi + \chi\cos\varphi.$$

Din relațiile de mai sus, se obține:

$$\mathfrak{X}_\varphi = \frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial \chi_\varphi}{\partial \varphi} \tag{10.6}$$

$$\mathfrak{X}_\theta = \frac{1}{r_2}\cdot\frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\chi_\varphi\cdot\cot\varphi}{r_2} \tag{10.7}$$

In cazul încărcărilor simetrice $\left(\text{cu } X \equiv 0 \text{ și } \frac{\partial(\ldots)}{\partial\theta} = 0\right)$, deformările stabilite mai sus se simplifică după cum urmează:

$$\left.\begin{aligned} u &\equiv 0, \text{ rămân } v \text{ și } w \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r_1}\left(\frac{dv}{d\varphi} + w\right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r_2}(v\cot\varphi + w) \\ \gamma_{\varphi\theta} &\equiv 0 \\ \chi_\varphi &= \chi = \frac{1}{r_1}\left(v - \frac{dw}{d\varphi}\right) \\ \chi_\theta &\equiv 0 \\ \mathfrak{X}_\varphi &= \frac{1}{r_1}\cdot\frac{d\chi}{d\varphi} \\ \mathfrak{X}_\theta &= \frac{\chi\cot\varphi}{r_2} \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Problema reciprocă de a determina pe u, v, w, când presupunem cunoscute ε_φ, ε_θ și $\gamma_{\varphi\theta}$ se rezolvă imediat cu ajutorul relațiilor (10.1) ... (10.3), care se scriu:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w = r_1 \varepsilon_\varphi \\ &\frac{\partial u}{\partial \theta} + v \cos\varphi + w \sin\varphi = r_0 \varepsilon_\theta \\ &\frac{r_0}{r_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - u \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta} = r_0 \gamma_{\varphi\theta} \end{aligned}\right\}$$

In cazul încărcărilor simetrice ultima ecuație dispare, iar pentru v și w se obține soluția în funcție de o constantă de integrare.

In cazul încărcărilor nesimetrice trebue introduse seriile trigonometrice (problema analoagă cu determinarea eforturilor de membrană la încărcări nesimetrice).

11. Deformările generale ale suprafețelor de rotație. Fie P_z punctul situat pe normala în P la suprafața mediană și la cota z de acesta. Deformațiile la cota z se notează prin indicele z.

In figurile 13 și 14 sunt reprezentate secțiunile θ, respectiv $\varphi = \text{const.}$ După deformare, P_z ajunge în P'_z. Din exprimarea acestei deformări se pot stabili relațiile între u, v, z și u_z, v_z și w_z. Ele se pot aduce ușor la forma:

$$\left.\begin{aligned} u_z &= u \cdot \frac{r_2 + z}{r_2} - \frac{z}{r_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} = u + z\chi_{\theta} \sin\varphi \\ v_z &= v \cdot \frac{r_1 + z}{r_1} - \frac{z}{r_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} = v + z\chi_{\varphi} \\ w_z &\simeq w \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

Observând că razele de curbură devin $(r_1 + z)$, respectiv $(r_2 + z)$, putem stabili și variațiile pantelor tangentelor $\chi_{\varphi z}$, $\chi_{\theta z}$. Avem:

$$\chi_{\varphi z} = \frac{1}{r_1 + z}\left(v_z - \frac{\partial w_z}{\partial \varphi}\right)$$

Introducând valorile găsite pentru v_z și w_z, și repetând operațiile pentru $\chi_{\theta z}$, se obține:

$$\chi_{\varphi z} \equiv \chi_{\varphi} \; ; \quad \chi_{\theta z} \equiv \chi_{\theta} \qquad (11.2)$$

Prin considerarea punctelor Q_z și S_z se pot stabili și lungirile specifice la cota z.

Pe figura 17 putem citi:

$$\overline{P_z Q_z} = (r_1 + z)\, d\varphi$$

$$\overline{P'_z Q'_z} = (1 + \varepsilon_\varphi)\, r_1\, d\varphi + z\,(d\varphi + d\chi_\varphi)$$

$$\overline{P_z S_z} = (r_0 + z \sin\varphi)\, d\theta$$

$$\overline{P'_z S'_z} = (1 + \varepsilon_\theta)\, r_0\, d\theta + z \sin(\varphi + \chi_\varphi).\,(d\varphi + d\chi_\varphi)$$

De aici rezultă imediat lungirea specifică meridiană:

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{r_1}{r_1 + z}(\varepsilon_\varphi + z\mathfrak{X}_\varphi), \tag{11.3}$$

lungirea specifică a cercului paralel:

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{r_2}{r_2 + z}(\varepsilon_\theta + z\mathfrak{X}_\theta). \tag{11.4}$$

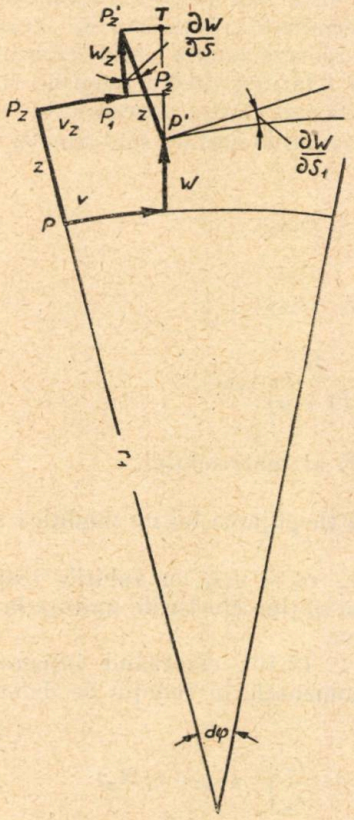


Fig. 13.— Secția θ = const. Deformări la cota z.

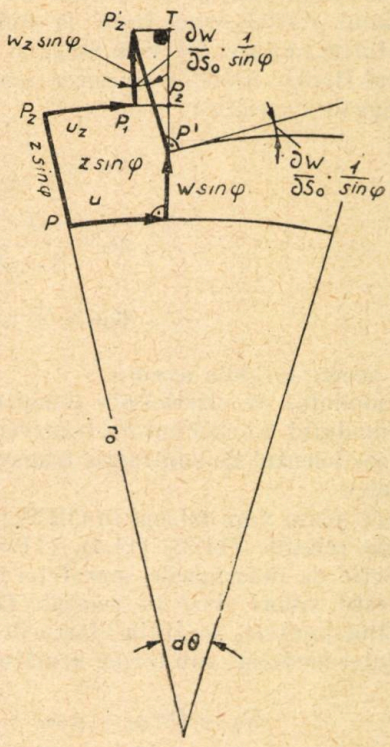


Fig. 14.— Secția φ = const. Deformări la cota z.

In mod analog se obține lunecarea specifică:

$$\gamma_{\varphi\theta z} = \frac{1}{r_0 + z\sin\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - u\cos\varphi\right) + \frac{1}{r_1 + z}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{z}{r_0 + z\sin\varphi}\left(\frac{\partial\chi_\varphi}{\partial\theta} - \chi_\theta\cdot\cot\varphi\right) +$$

$$+ \frac{z}{r_1 + z}\left(\frac{\partial\chi_\theta}{\partial\varphi}\sin\varphi + \chi_\theta\cdot\cos\varphi\right) \tag{11.5}$$

In cazul particular al încărcărilor simetrice se neglijează în (11.3) și (11.4) z față de r_1 și r_2 la numitor. Deformările specifice sunt în acest caz:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi z} &= \varepsilon_\varphi + z\mathfrak{X}_\varphi \\ \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_\theta + z\mathfrak{X}_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta z} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

Se observă că pentru $z = 0$ se recade peste deformațiile suprafeței mediane.

12. Relațiile dintre lungiri și eforturi. Ecuațiile stabilite precedent referitoare la echilibrul forțelor interioare și la deformări sunt riguros exacte din punct de vedere teoretic. Numărul lor fiind însă mai mic decât numărul necunoscutelor, problema rămâne static nedeterminată. Numărul de ecuații va putea fi completat, dacă vom face anumite ipoteze asupra felului cum lucrează materialul. Astfel, vom trece la stabilirea relațiilor dintre lungirile specifice și eforturile unitare. Ne vom mărgini la domeniul elastic, în care este valabilă legea lui Hooke. Astfel, vom putea scrie că eforturile unitare sunt funcții lineare de lungirile specifice:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi z} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\varphi z} + \mu\varepsilon_{\theta z}) \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\theta z} + \mu\varepsilon_{\varphi z}) \\ \tau_{\varphi\theta z} &= G\cdot\gamma_{\varphi\theta z} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{\varphi\theta z} \end{aligned} \tag{12.1}$$

In aceste formule avem:

E modulul de elasticitate (longitudinal) al materialului;

G modulul de elasticitate transversal;

μ coeficientul de contracție transversală (neglijarea lui nu modifică sensibil calculele).

Dacă acum vom înlocui în (12.1) pe $\varepsilon_{\varphi z}$, $\varepsilon_{\theta z}$ și $\gamma_{\varphi\theta z}$ cu valorile respective date de relațiile (11.3), (11.4), (11.5), vom obține eforturile unitare la cota z în funcție de deformările suprafeței mediane.

Aceste valori duse în relațiile (2.1) ... (2.10), efectuând integralele și calculând limitele, se obțin eforturile și momentele în funcție de deformările suprafeței mediane, sub forma următoare:

$$N_\varphi = D(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_\theta) + \frac{K}{r_1^2}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\cdot(\varepsilon_\varphi - r_1\mathfrak{X}_\varphi) \tag{12.2}$$

$$N_\theta = D(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_\varphi) + \frac{K}{r_2^2}\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)(\varepsilon_\theta - r_2\mathfrak{X}_\theta) \tag{12.3}$$

$$N_{\varphi\theta} = D\cdot\frac{1-\mu}{2}\cdot\gamma_{\varphi\theta} + \frac{K}{r_1^2}\frac{1-\mu}{2}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \chi_\theta\cos\varphi - \frac{\partial\chi_\theta}{\partial\varphi}\cdot\sin\varphi\right) \tag{12.4}$$

$$N_{\theta\varphi} = D\cdot\frac{1-\mu}{2}\gamma_{\varphi\theta} + \frac{K}{r_2^2}\cdot\frac{1-\mu}{2}\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)\cdot\left[\frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - u\cos\varphi\right) - \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial\chi_\varphi}{\partial\theta} - \chi_\theta\cot\varphi\right)\right] \tag{12.5}$$

$$M_\varphi = -K\left[\mathfrak{X}_\varphi + \mu\mathfrak{X}_\theta - \frac{1}{r_1}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\varepsilon_\varphi\right] \tag{12.6}$$

$$M_\theta = -K\left[\mathfrak{X}_\theta + \mu\mathfrak{X}_\varphi - \frac{1}{r_2}\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)\varepsilon_\theta\right] \tag{12.7}$$

$$M_{\varphi\theta} = -K\cdot\frac{1-\mu}{2}\cdot\left[-\frac{1}{r_1^2}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial\chi_\varphi}{\partial\theta} - \chi_\theta\cot\varphi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial\chi_\theta}{\partial\varphi}\sin\varphi + \chi_\theta\cos\varphi\right)\right] \tag{12.8}$$

$$M_{\theta\varphi} = -K\cdot\frac{1-\mu}{2}\left[-\frac{1}{r_0 r_2}\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - u\cos\varphi\right) + \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial\chi_\varphi}{\partial\theta} - \chi_\theta\cot\varphi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial\chi_\theta}{\partial\varphi}\sin\varphi + \chi_\theta\cos\varphi\right)\right] \tag{12.9}$$

In expresiile de mai sus am introdus următoarele notații:

$$D = \frac{2Eh}{1-\mu^2} = \frac{E\delta}{1-\mu^2} \tag{12.10}$$

modulul de rigiditate la întindere a pânzei

$$K = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)} = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \tag{12.11}$$

modulul de rigiditate la încovoiere a pânzei.

Se observă că δ, respectiv $\frac{\delta^3}{12}$ reprezintă secțiunea și momentul de inerție al pânzei pe unitatea de lungime; $\frac{E}{1-\mu^2}$ este modulul redus al materialului.

La determinarea relațiilor de mai sus s'a folosit desvoltarea în serie limitată:

$$\ln\frac{r+h}{r-h} = \frac{2h}{r} + \frac{2h^3}{3r^3} + \cdots$$

Folosind relațiile simplificate (11.6), pentru cazul încărcărilor simetrice, se obține:

$$N_\varphi = D(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_\theta) + \frac{K}{r_2}(\mathfrak{X}_\varphi + \mu\mathfrak{X}_\theta)$$

$$N_\theta = D(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_\varphi) + \frac{K}{r_1}(\mathfrak{X}_\theta + \mu\mathfrak{X}_\varphi)$$

$$M_\varphi = -K\left(\mathfrak{X}_\varphi + \mu\mathfrak{X}_\theta + \frac{\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_\theta}{r_2}\right)$$

$$M_\theta = -K\left(\mathfrak{X}_\theta + \mu\mathfrak{X}_\varphi + \frac{\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_\varphi}{r_1}\right)$$

Expresiile găsite pentru N_φ și N_θ diferă prin termenul al doilea cuprinzând pe K în factor. Să vedem care este importanța celor doi termeni.

Pentru aceasta facem rapoartele:

$$k_1 = \frac{K}{Dr_1^2} = \frac{\delta^2}{12 r_1^2} \quad ; \quad k_2 = \frac{K}{Dr_2^2} = \frac{\delta^2}{12 r_2^2} \tag{12.12}$$

Obișnuit $k_{1,2}$ au valori cuprinse între 10^{-3} și 10^{-7}, astfel încât termenii cuprinzând pe K în factor sunt neglijabili față de cei cuprinzând pe D. De asemenea, neglijând termenii având pe r_1 sau r_2 la numitor, vom obține relațiile finale pentru cazul încărcărilor simetrice:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= D(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_\theta) \\ N_\theta &= D(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_\varphi) \\ M_\varphi &= -K(\mathfrak{X}_\varphi + \mu\mathfrak{X}_\theta) \\ M_\theta &= -K(\mathfrak{X}_\theta + \mu\mathfrak{X}_\varphi) \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} N_{\varphi\theta} &= N_{\theta\varphi} \equiv 0 \\ M_{\varphi\theta} &= M_{\theta\varphi} \equiv 0 \end{aligned}\right| \tag{12.13}$$

Se pot stabili expresii aproximative asemănătoare pentru eforturile de forfecare și momentele de răsucire. Neglijând pe z față de r_1 și r_2, din (11.5) se obține:

$$\gamma_{\varphi\theta z} = \gamma_{\varphi\theta} + z\mathfrak{X}_{\varphi\theta}$$

în care

$$\mathfrak{X}_{\varphi\theta} = \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial\theta} - \gamma_\theta \cot\varphi\right) + \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial\varphi}\sin\varphi + \gamma_\theta\cos\varphi\right)$$

De aici se obține:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi\theta} &= D\frac{1-\mu}{2}\gamma_{\varphi\theta} + K\frac{1-\mu}{2}\cdot\frac{\mathfrak{X}_{\varphi\theta}}{r_2} \\ N_{\theta\varphi} &= D\frac{1-\mu}{2}\gamma_{\varphi\theta} + K\cdot\frac{1-\mu}{2}\cdot\frac{\mathfrak{X}_{\varphi\theta}}{r_1} \\ M_{\varphi\theta} &= -K\cdot\frac{1-\mu}{2}\left(\mathfrak{X}_{\varphi\theta} + \frac{\gamma_{\varphi\theta}}{r_2}\right) \\ M_{\theta\varphi} &= -K\cdot\frac{1-\mu}{2}\left(\mathfrak{X}_{\varphi\theta} + \frac{\gamma_{\varphi\theta}}{r_1}\right) \end{aligned}\right| \tag{12.14}$$

Și aici vom putea neglija termenii cuprinzând pe r_1, r_2 la numitor.

IV

TEORIA ÎNCOVOIERII LA ÎNCĂRCĂRI SIMETRICE

13. Ecuațiile diferențiale de bază. In cazul obișnuit al încărcărilor simetrice, avem $X \equiv 0$. Din motive de simetrie $N_{\varphi\theta}$, $N_{\theta\varphi}$, $M_{\varphi\theta}$, $M_{\theta\varphi}$ și Q_θ se anulează, de asemenea diferențierile în raport cu θ. Din ecuațiile de echilibru static, rămân valabile ecuațiile (4.2), (4.3) și (4.5) care se scriu:

$$\frac{d(N_\varphi \cdot r_0)}{d\varphi} - N_\theta r_1 \cos\varphi - Q_\varphi \cdot r_0 + Y r_0 r_1 = 0 \tag{13.1}$$

$$N_\varphi \cdot r_0 + N_\theta \cdot r_1 \sin\varphi + \frac{d(Q_\varphi r_0)}{d\varphi} + Z r_0 r_1 = 0 \tag{13.2}$$

$$\frac{d(M_\varphi r_0)}{d\varphi} - M_\theta \cdot r_1 \cos\varphi - Q_\varphi \cdot r_0 r_1 = 0 \tag{13.3}$$

Din primele două relații rezultă N_φ și N_θ în funcție de $Q_\varphi = Q$. Dacă se notează:

$$U = r_2 Q \quad \text{și} \quad \frac{dP}{d\varphi} = r_0 r_1 (Y \sin\varphi + Z\cos\varphi)$$

din (4.6) și (4.7) rezultă:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{U}{r_2}\cot\varphi - \frac{P}{r_2 \sin^2\varphi} \\ N_\theta &= -\frac{1}{r_1}\cdot\frac{dU}{d\varphi} + \frac{P}{r_1 \sin^2\varphi} - Z r_2 \end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

Din (12.13) și (10.8) se obține:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{N_\varphi - \mu N_\theta}{E\delta} = \frac{1}{r_1}\left(\frac{dv}{d\varphi} - w\right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{N_\theta - \mu N_\varphi}{E\delta} = \frac{1}{r_2}(v\cot\varphi + w) \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

Din combinarea relațiilor (13.5) și a derivatelor lor se obține:

$$v - \frac{dw}{d\varphi} = \frac{\cot\varphi}{E\delta}\left[(r_1 + \mu r_2) N_\varphi - (r_2 + \mu r_1) N_\theta\right] - \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{r_2}{E\delta}(N_\theta - \mu N_\varphi)\right]$$

Dacă ținem seama că $v - \frac{dw}{d\varphi} = \chi r_1$, înlocuim pe N_φ, N_θ cu valorile date de (13.4) și efectuăm toate operațiile, rezultă prima ecuație:

$$\frac{r_2}{r_1^2}\cdot\frac{d^2U}{d\varphi^2} + \frac{1}{r_1}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{r_2}{r_1}\cot\varphi\right]\cdot\frac{dU}{d\varphi} - \frac{1}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\cot^2\varphi - \mu\right)U - E\delta\chi = F(\varphi) \tag{13.6}$$

în care s'a notat:

$$F(\varphi) = \frac{P}{r_1 \sin^2\varphi}\left[\left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1}\right)\cot\varphi + \frac{1}{r_1}\left(\frac{dr_2}{d\varphi} - \frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{dr_1}{d\varphi}\right)\right] + Y r_2\left(\mu + \frac{r_2}{r_1}\right) - 2 Z r_2 \frac{dr_2}{d\varphi} - \frac{dZ}{d\varphi} r_2^2$$

Pentru a obține a doua ecuație, din (10.8) și (12.13) se scrie:

$$\left.\begin{aligned} M_\varphi &= -K\left(\frac{1}{r_1}\cdot\frac{d\chi}{d\varphi} + \frac{\mu}{r_2}\chi\cot\varphi\right) \\ M_\theta &= -K\left(\frac{\chi}{r_2}\cot\varphi + \frac{\mu}{r_1}\cdot\frac{d\chi}{d\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Ducând aceste relații în (13.3) rezultă:

$$\frac{r_2}{r_1^2}\cdot\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}+\frac{1}{r_1}\cdot\left[\frac{1}{d\varphi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)+\frac{r_2}{r_1}\cot\varphi\right]\frac{d\chi}{d\varphi}-\frac{1}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\cot^2\varphi+\mu\right)\chi+\frac{U}{K}=0 \quad (13.8)$$

Ecuațiile diferențiale (13.6) și (13.8) constitue ecuațiile de bază ale suprafețelor subțiri de rotație din teoria încovoierii simetrice.

14. Integrarea ecuațiilor diferențiale (13.6) și (13.8). Soluția omogenă. Ecuațiile diferențiale (13.6) și (13.8) sunt lineare și neomogene de ordinul al doilea. Soluția totală se compune dintr'o soluție particulară, care să verifice partea dreaptă și o soluție a sistemului omogen. Aceasta se obține considerând în (13.6) $F(\varphi)\equiv 0$.

Observând că coeficienții funcțiilor necunoscute și ai derivatelor lor sunt aceiași în ambele ecuații, introducem operatorul:

$$L(\ldots)=\frac{r_2}{r_1^2}\cdot\frac{d^2(\ldots)}{d\varphi^2}+\frac{1}{r_1}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)+\frac{r_2}{r_1}\cot\varphi\right]\cdot\frac{d(\ldots)}{d\varphi}-\frac{\cot^2\varphi}{r_2}(\ldots) \quad (14.1)$$

Cele două ecuații diferențiale se scriu simbolic:

$$\left.\begin{aligned} L(\chi)-\mu\frac{\chi}{r_1}&=-\frac{U}{K}\\ L(U)+\mu\frac{U}{r_1}&=E\delta\chi\end{aligned}\right\} \quad (14.2)$$

Aplicând încă odată operatorul (14.1) celor două ecuații, se poate elimina una din funcțiile necunoscute, ajungându-se la ecuația diferențială de ordinul al patrulea, sub forma simbolică:

$$LL(U)+\mu L\left(\frac{U}{r_1}\right)-\frac{\mu}{r_1}L(U)-\frac{\mu^2}{r_1^2}U=-\frac{E\delta}{K}U \quad (14.3)$$

sau

$$LL(\chi)-\mu L\left(\frac{\chi}{r_1}\right)+\frac{\mu}{r_1}L(\chi)-\frac{\mu^2}{r_1^2}\chi=-\frac{E\delta}{K}\chi \quad (14.4)$$

Relațiile (14.3) și (14.4) se mai pot simplifica dacă $r_1=\text{const.}$ (cupola sferică, conică, cilindrică) deoarece $L\left(\frac{U}{r_1}\right)=\frac{1}{r_1}L(U)$, sau dacă $\mu=0$.

In aceste ipoteze, notând:

$$\rho^4=\frac{E\delta}{K}-\frac{\mu^2}{r_1^2}=\frac{12(1-\mu^2)}{\delta^2}-\frac{\mu^2}{r_1^2} \quad (14.5)$$

ecuația (14.3) se scrie:

$$LL(U)+\rho^4U=0 \quad (14.6)$$

și se poate pune sub una din formele:

$$L[L(U)+i\rho^2U]-i\rho^2[L(U)+i\rho^2U]=0$$
$$L[L(U)-i\rho^2U]+i\rho^2[L(U)-i\rho^2U]=0$$

care arată că soluțiile ecuațiilor de ordinul al doilea:

$$L(U) + i\rho^2 U = 0 \; ; \quad L(U) - i\rho^2 U = 0, \tag{14.7}$$

sunt și soluțiile ecuației (14.6).

Soluția exactă a ecuației (14.7) nu se cunoaște decât în cazul particular al rezervorului cilindric (§ 15).

In toate celelalte cazuri va trebui să se recurgă la desvoltări în serie. Astfel, în cazul suprafețelor conice se ajunge la funcții Bessel, iar la cupole sferice la serii hipergeometrice.

15. Integrarea ecuațiilor diferențiale (13.6) și (13.8). Soluția particulară. In cazul general nu se poate obține o soluție particulară sub formă explicită a celor două ecuații diferențiale. Putem totuși să ne facem o idee, studiind câteva cazuri simple de încărcări și forme ale suprafeței.

Astfel, în cazul cupolei sferice supusă greutății proprii, revenind la variabila Q, ecuațiile diferențiale (13.6) și, (13.8) se scriu:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \frac{dQ}{d\varphi}\cot\varphi - (\cot^2\varphi - \mu)Q - E\delta\chi = ga(2+\mu)\sin\varphi \\ &\frac{d^2\chi}{d\varphi^2} + \frac{d\chi}{d\varphi}\cot\varphi - (\cot^2\varphi + \mu)\chi + \frac{Qa^2}{K} = 0 \end{aligned} \tag{15.1}$$

Căutând soluții de forma:

$$\overline{\chi} = A_1 \sin\varphi, \quad \overline{Q} = A_2 \sin\varphi \qquad (A_1, A_2 = \text{const.})$$

și exprimând că aceste valori satisfac ecuațiile de mai sus, se obține:

$$A_1 = -\frac{2+\mu}{E\delta}\cdot\frac{ga}{1+\dfrac{1}{k}}\; ; \quad A_2 = -\frac{2+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{ga}{1+\dfrac{1}{k}}. \tag{15.2}$$

Formăm expresia:

$$\frac{dP}{d\varphi} = a^2\sin\varphi\,(g\sin^2\varphi + g\cos^2\varphi)\,; \; P = ga^2(\cos\varphi_s - \cos\varphi).$$

Cu acestea se pot scrie eforturile și momentele:

$$\begin{aligned} \overline{N}_\varphi &= -A_2\cos\varphi - \frac{ga}{\sin^2\varphi}(\cos\varphi_s - \cos\varphi) \\ \overline{N}_\theta &= -A_2\cos\varphi - ga\left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi_s - \cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right) \\ \overline{M}_\varphi &= \overline{M}_\theta = -A_1\frac{K}{a}(1+\mu)\cos\varphi \end{aligned} \tag{15.3}$$

Comparând pe $\overline{N}_\varphi$, $\overline{N}_\theta$ cu eforturile corespunzătoare de membrană, se observă că li s'a adăugat termenul ($-A_2 \cdot \cos\varphi$).

Practic, cantitățile A_1, A_2 sunt cu totul neglijabile, încât soluțiile particulare se reduc la soluțiile de membrană pentru $\overline{N}_\varphi$, $\overline{N}_\theta$ și $\overline{M}_\varphi = \overline{M}_\theta = 0$, $\overline{Q} = 0$, $\overline{\chi} = 0$.

★

In cazul rezervoarelor cilindrice cele două soluții concordă riguros, rezultând $\bar{Q} \equiv 0$, $\bar{\chi} \equiv 0$.

Problema se poate trata mai ușor considerând deplasările w.

16. Integrarea exactă în cazul cilindrului. In cazul suprafeței cilindrice $r_1 \to \infty$ și în locul variabilei unghiulare φ se alege noua variabilă liniară x definită prin relația $dx = r_1 d\varphi$.

Vom trata cazul unui rezervor cu lichid până la marginea superioară. Originea ordonatelor x este la fundul rezervorului, înălțimea pereților l.

Componentele încărcării: $X = Y \equiv 0$; $Z = -\gamma (l - x)$.

Ecuația de proiecție pe generatoare arată că efortul N_x este nul. Din proiecțiile pe normală, respectiv ecuația de momente în raport cu tangenta la cercul paralel, rezultă:

$$\frac{1}{a} N_\theta + \frac{dQ}{dx} + Z = 0 \quad ; \quad \frac{dM_x}{dx} - Q = 0 \tag{16.1}$$

Din (10.8) și (12.13) se mai deduc relațiile de deformații:

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{a} = \frac{N_\theta}{E\delta} \quad ; \quad M_x = K \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \tag{16.2}$$

Din eliminarea lui N_θ, Q, M_x rezultă ecuația diferențială:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E\delta}{Ka^2} w = -\frac{Z}{K} = -\frac{1}{K} \gamma (l - x) \tag{16.3}$$

Notând

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{E\delta}{4Ka^2}} = \frac{\sqrt[4]{3(1 - \mu^2)}}{\sqrt{a\delta}}$$

ecuația diferențială (16.3) se scrie:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = -\frac{12(1 - \mu^2)}{E\delta^3} \gamma (l - x) \tag{16.4}$$

cu soluția generală:

$$w = \frac{a^2}{E\delta} \gamma (l - x) + e^{-\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) +$$

$$+ e^{\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) \tag{16.5}$$

Condițiile la marginea superioară ($x = l$) sunt satisfăcute considerând $C_3 = C_4 = 0$, deoarece altfel factorul $e^{\lambda x}$ crește odată cu x, ceea ce nu corespunde amortizării rapide a solicitărilor și deformațiilor.

In această ipoteză, se obține mai departe:

$$N_\theta = \frac{E\delta}{a} w = \gamma a (l - x) + \frac{E\delta}{a} e^{-\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \tag{16.6}$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{a^2 \gamma}{E\delta} - \lambda e^{-\lambda x} [(C_1 - C_2) \cos \lambda x + (C_1 + C_2) \sin \lambda x] \tag{16.7}$$

$$M_x = K\frac{d^2w}{dx^2} = 2K\lambda^2 e^{-\lambda x}(C_1 \sin \lambda x - C_2 \cos \lambda x) \tag{16.8}$$

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = 2K\lambda^3 e^{-\lambda x}[(C_1+C_2)\cos \lambda x - (C_1-C_2)\sin \lambda x] \tag{16.9}$$

Constantele C_1 și C_2 se determină după modul de îmbinare al pereților cu fundul.

In cazul articulației, se pun condițiile $w = 0$ și $M_x = 0$ $(x = 0)$.

Rezultă $C_1 = -\frac{a^2}{E\delta}\gamma l$; $C_2 = 0$.

In cazul încastrării perfecte, din condițiile $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$ $(x = 0)$ rezultă

$$C_1 = -\frac{a^2}{E\delta}\gamma l \quad ; \quad C_2 = -\frac{a^2}{E\delta}\gamma l\left(1 - \frac{1}{\lambda l}\right).$$

Soluție corespunzătoare celor două feluri de rezemări sunt redate mai jos:

Articulație

$$\left.\begin{aligned} N_\theta &= \gamma a(l-x) - \gamma\, al\, e^{-\lambda x}.\cos \lambda x \\ M_x &= -\frac{\gamma l}{2\lambda^2}\cdot e^{-\lambda x}.\sin \lambda x \\ Q &= -\frac{\gamma l}{2\lambda}\cdot e^{-\lambda x}(\cos \lambda x - \sin \lambda x) \end{aligned}\right\} \tag{16.10}$$

Incastrare perfectă

$$\left.\begin{aligned} N_\theta &= \gamma a(l-x) - \gamma al\, e^{-\lambda x}\left[\cos \lambda x + \left(1 - \frac{1}{\lambda l}\right)\sin \lambda x\right] \\ M_x &= \frac{\gamma l}{2\lambda^2}e^{-\lambda x}\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda l}\right)\cos \lambda x - \sin \lambda x\right] \\ Q &= \frac{\gamma l}{2\lambda}e^{-\lambda x}\left[\left(-2 + \frac{1}{\lambda l}\right)\cos \lambda x + \frac{1}{\lambda l}\sin \lambda x\right] \end{aligned}\right\} \tag{16.11}$$

17. Integrarea aproximativă în cazul cupolei sferice. Integrarea exactă prin serii hipergeometrice, în cazul cupolei sferice, prezintă mari greutăți din cauza convergenței slabe. In această metodă intervine cantitatea:

$$\beta_1 = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)\frac{a^2}{\delta^2} - \frac{\mu^2}{4}} \simeq 1{,}31\sqrt{\frac{a}{\delta}}$$

Convergența seriilor hipergeometrice este satisfăcătoare dacă $\beta_1 < 9$ $\left(\text{sau aproximativ } \frac{a}{\delta} < 50\right)$. Pentru $\frac{a}{\delta} = 30$ este necesar să se considere cel puțin 10 termeni, iar pentru $\frac{a}{\delta} = 62{,}2$ cel puțin 18 termeni.

In cazurile obișnuite în construcții, avem $\beta_1 > 13\left(\frac{a}{\delta} > 100\right)$, încât se folosesc metode aproximative a căror soluție să concorde cât mai bine cu cea exactă.

Scriem din nou ecuațiile diferențiale omogene ale cupolelor sferice:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\chi}{d\varphi^2} + \frac{d\chi}{d\varphi}\cot\varphi - (\cot^2\varphi + \mu)\chi + Q\frac{a^2}{K} = 0 \\ &\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \frac{dQ}{d\varphi}\cot\varphi - (\cot^2\varphi - \mu)\,Q - E\delta\chi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17.1}$$

In cazul pânzelor foarte subțiri și când unghiul φ nu este mic, cantitățile Q și χ au un caracter oscilator și se pierd repede dela margine. Se constată și vom verifica prin calcul că derivata fiecărei funcțiuni este mare în comparație cu însăși funcțiunea, iar derivata secundă este mare în comparație cu derivata întâia.

Aceasta ne conduce să neglijăm pe χ și $\frac{d\chi}{d\varphi}$ față de $\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}$, iar pe Q și $\frac{dQ}{d\varphi}$ față de $\frac{d^2Q}{d\varphi^2}$. Sistemul (17.1) se reduce la următorul:

$$\frac{d^2\chi}{d\varphi^2} + Q\frac{a^2}{K} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2Q}{d\varphi^2} - E\delta\chi = 0 \tag{17.2}$$

din care se obține ecuația diferențială:

$$\frac{d^4Q}{d\varphi^4} + \frac{E\delta a^2}{K}Q = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d^4Q}{d\varphi^4} + 4\beta^4 Q = 0 \tag{17.3}$$

în care s'a notat *coeficientul de amortizare*

$$\beta = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\cdot\sqrt{\frac{a}{\delta}} \tag{17.4}$$

Soluția generală a acestei ecuații lineare cu coeficienți constanți, în funcție de patru constante arbitrare, este:

$$Q = e^{\beta\varphi}(C_1\cos\beta\varphi + C_2\sin\beta\varphi) + e^{-\beta\varphi}(C_3\cos\beta\varphi + C_4\sin\beta\varphi)$$

Observând că primii doi termeni descresc, în timp ce ceilalți doi cresc, când unghiul φ descrește, în cazul cupolei închise va trebui să neglijăm ultimii doi termeni, deoarece eforturile la creștet trebue să rămână finite.

Astfel, două condiții marginale sunt satisfăcute și soluția se reduce la următoarea:

$$Q = e^{\beta\varphi}(C_1\cos\beta\varphi + C_2\sin\beta\varphi) \tag{17.5}$$

Pentru cupola deschisă se pot prezenta două cazuri. In primul caz, când marginile sunt destul de depărtate, vom putea presupune că funcția se amortizează destul de repede dela o margine, pentru a nu influența cealaltă margine. Soluția va fi (17.5) pentru marginea inferioară și

$$Q = e^{-\beta\varphi}(C_3\cos\beta\varphi + C_4\sin\beta\varphi) \tag{17.6}$$

pentru marginea superioară. Constantele se vor determina separat câte două pentru marginea respectivă. In al doilea caz, când marginile se influențează reciproc, constantele se vor determina împreună, considerând simultan condițiile la cele două margini.

Vom trata cazul curent când cupola este închisă. Facem schimbarea de unghiu variabil (fig. 15):

$$\omega = \varphi_k - \varphi \tag{17.7}$$

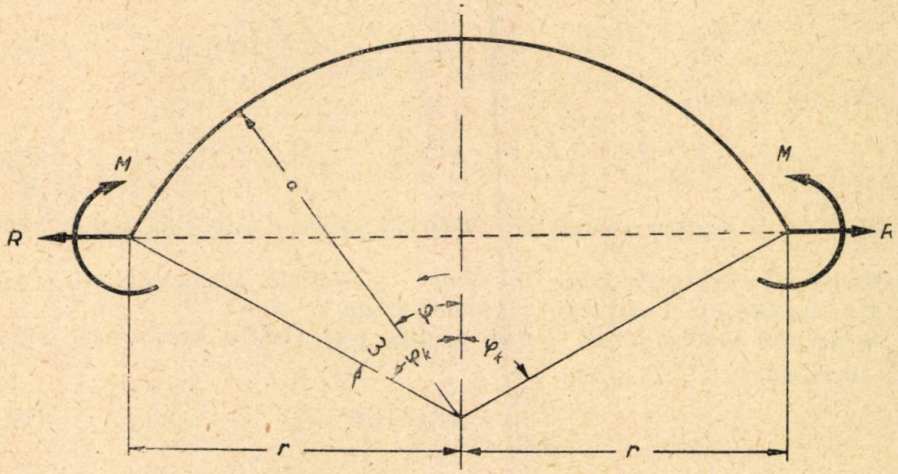


Fig. 15

pentru a pune în evidență marginile, și de constante de integrare în (17.5):

$$Q = Ce^{-\beta\omega}. \cos(\beta\omega + \psi) \tag{17.8}$$

Prin derivări succesive și unele operații simple, se obține:

$$\chi = \frac{2C\beta^2}{E\delta} e^{-\beta\omega}. \sin(\beta\omega + \psi) \tag{17.9}$$

$$N_\varphi = -C. e^{-\beta\omega}. \cot\varphi. \cos(\beta\omega + \psi) \tag{17.10}$$

$$N_\theta = -\sqrt{2}. C\beta e^{-\beta\omega}. \sin\left(\beta\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right) \tag{17.11}$$

$$M_\varphi \simeq \frac{K}{a} \cdot \frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{Ca}{\beta\sqrt{2}} e^{-\beta\omega}. \cos\left(\beta\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right) \tag{17.12}$$

$$M_\theta = -\frac{K}{a}\chi\cot\varphi + \mu M_\varphi = -\frac{Ca}{2\beta^2} \cdot e^{-\beta\omega}\cot\varphi. \sin(\beta\omega + \psi) + \mu M_\varphi . \tag{17.13}$$

* * *

Se pot obține soluții mai exacte prin alte două metode aproximative, care după cum vom arăta dau aceleași rezultate, diferența constând în expresia coeficientului de amortizare.

Pornind dela relaţia (14.6), care în cazul cupolei sferice devine $LL(Q) + \rho^4 Q = 0$, vom face substituţia:

$$Q = \frac{Q'}{\sqrt{\sin\varphi}} \tag{17.14}$$

Se obţine astfel ecuaţia diferenţială care determină pe Q':

$$\frac{d^4Q'}{d\varphi^4} + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2\sin^2\varphi}\right)\frac{d^2Q'}{d\varphi^2} + \frac{3\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\cdot\frac{dQ'}{d\varphi} + \\ + \left(4\beta_2^4 - \frac{63}{16\sin\varphi} + \frac{9}{8\sin^2\varphi} + \frac{9}{16}\right)Q' = 0 \tag{17.15}$$

în care s'a notat:

$$\beta_2 = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)\frac{a^2}{\delta^2} - \frac{\mu^2}{4} + \frac{1}{4}} \tag{17.16}$$

Se vede că pentru suprafeţele subţiri la care $\frac{a}{\delta}$ este un număr mare, cantitatea β_2^4 este foarte mare în raport cu ceilalţi coeficienţi ai ecuaţiei (17.15), aceasta cu condiţia ca unghiul φ să nu fie mic.

In această ipoteză, vom putea neglija toţi ceilalţi coeficienţi faţă de $4\beta_2^4$ obţinând:

$$\frac{d^4Q'}{d\varphi^4} + 4\beta_2^4 Q' = 0 \tag{17.17}$$

Această ecuaţie are aceeaşi formă şi soluţii ca şi ecuaţia (17.3) stabilită în prima metodă.

Separat de această metodă, denumită asimptotică, se poate ajunge la rezultate asemănătoare, plecând dela ecuaţia (17.1) şi făcând substituţiile:

$$Q = \frac{Q'}{\sqrt{\sin\varphi}}\,; \quad \chi = \frac{V}{\sqrt{\sin\varphi}} \tag{17.18}$$

Ecuaţiile diferenţiale (17.1) se transformă în următoarele:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cot^2\varphi - \mu\right)V = -Q'\frac{a^2}{K} \\ &\frac{d^2Q'}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cot^2\varphi + \mu\right)Q' = E\delta V \end{aligned}\right\} \tag{17.19}$$

Vom face acum o aproximaţie mai mică decât în prima metodă, dacă neglijăm numai funcţia faţă de derivata secundă respectivă.

Astfel vom avea de integrat sistemul:

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} + Q'\frac{a^2}{K} = 0\,; \quad \frac{d^2Q'}{d\varphi^2} - E\delta V = 0$$

care prin eliminarea lui V, se reduce la:

$$\frac{d^4Q'}{d\varphi^4} + 4\beta^4 Q' = 0$$

identică cu (17.17), însă în care β are semnificaţia (17.4).

Pentru valorile obișnuite ale raportului $\frac{a}{\delta}$, diferența maximă între coeficienții β, β_1, β_2 este de 0,03%, deci absolut neglijabilă. De aceea vom putea considera în cele ce urmează drept coeficient de amortizare valoarea β dată de (17.4).

Așa dar, rezultă că ultimile două metode sunt identice. Se obțin destul de ușor următoarele expresii pentru solicitări și deformări, în ipoteza cupolei sferice închise:

$$Q = \frac{Ce^{-\beta\omega}}{\sqrt{\sin\varphi}} \cdot \cos(\beta\omega + \psi) \tag{17.20}$$

$$\chi \cong \frac{2C\beta^2}{E\delta} \cdot \frac{e^{-\beta\omega}}{\sqrt{\sin\varphi}} \cdot \sin(\beta\omega + \psi) \tag{17.21}$$

$$N_\varphi = -\frac{Ce^{-\beta\omega}}{\sqrt{\sin\varphi}} \cdot \cot\varphi \cdot \cos(\beta\omega + \psi) \tag{17.22}$$

$$N_\theta = -\frac{C\beta\sqrt{2}e^{-\beta\omega}}{\sqrt{\sin\varphi}} \left[\sin\left(\beta\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\cot\varphi}{2\sqrt{2\beta}} \cdot \cos(\beta\omega + \psi)\right] \tag{17.23}$$

$$M_\varphi = \frac{Ca}{\beta\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{-\beta\omega}}{\sqrt{\sin\varphi}} \cdot \left[\cos\left(\beta\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\cot\varphi}{\beta\sqrt{2}} \sin(\beta\omega + \psi)\right] \tag{17.24}$$

$$M_\theta = -\frac{Ca}{2\beta^2} \cdot \frac{e^{-\beta\omega}\cot\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}} \sin(\beta\omega + \psi) + \mu M_\varphi. \tag{17.25}$$

Observând că termenii conținând pe $\frac{\cot\varphi}{\beta\sqrt{2}}$ în factor pot fi neglijați față de ceilalți și comparând cu rezultatele (17.8)... (17.13) date la prima metodă, putem conchide că expresiile eforturilor și momentelor date de a doua metodă se deduc din relațiile corespunzătoare aflate cu prima metodă, prin împărțirea cu $\sqrt{\sin\varphi}$ (exclusiv determinarea constantelor din condiții marginale).

18. Integrarea aproximativă în cazul suprafețelor de rotație oarecare. O integrare aproximativă în cazul general se poate obține admițând ca și până acum că funcția și derivata întâia sunt neglijabile față de derivata secundă. Cu aceasta obținem din (13.6) și (13.8):

$$\frac{r_2}{r_1^2} \cdot \frac{d^2\chi}{d\varphi^2} + \frac{U}{K} = 0 \tag{18.1}$$

$$\frac{r_2}{r_1^2} \cdot \frac{d^2U}{d\varphi^2} - E\delta\chi = 0 \tag{18.2}$$

Diferențiind de două ori ecuația (18.2) și neglijând mai departe derivatele de ordin mai mic față de derivata de ordinul al patrulea, obținem:

$$\frac{d^4U}{d\varphi^4} + 4\beta^4 U = 0 \tag{18.3}$$

în care coeficientul de amortizare β este variabil:

$$\beta = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \cdot \sqrt{\frac{r_1^2}{r_2\delta}} \tag{18.4}$$

Soluția ecuației omogene (18.3) nu se poate determina în cazul general. Deoarece, însă, solicitările date de sistemul omogen au un caracter local și se pierd rapid cu cât ne depărtăm de margine, vom putea obține o soluție satisfăcătoare a ecuației aproximative (18.3), dând lui β o valoare medie constantă. In acest caz se va putea aplica direct soluția dată în cazul sferei. Se vor obține rezultate mai satisfăcătoare dacă împărțim suprafața în tronsoane, admițând pentru fiecare tronson câte o valoare β constantă.

Constantele corespunzătoare tronsoanelor intermediare se vor determina astfel ca în rosturile create, deformațiile să fie aceleași.

O a treia soluție aproximativă a ecuației (23.5) se obține dacă β se poate reprezenta sub forma:

$$\beta = \frac{a}{b+\varphi} \qquad (a \text{ și } b \text{ constante}) \qquad (18.5)$$

In acest caz, (18.3) admite soluții de forma:

$$U = (b+\varphi)^p$$

în care p are valorile:

$$p_i = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm 2ia^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Sub radical avem o cantitate foarte puțin diferită de un număr imaginar pur; β fiind mare, rezultă mare și a.

Vom putea deci scrie aproximativ:

$$p_i = \frac{1}{2} \pm (1 \pm i)\, a \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (18.6)$$

Integrala generală a ecuației (18.3) este atunci:

$$U = (b+\varphi)^{a+\frac{1}{2}}\left[C_1(b+\varphi)^{ia} + C_2(b+\varphi)^{-ia}\right] + (b+\varphi)^{-a+\frac{1}{2}}\left[C_3(b+\varphi)^{ia} + C_4(b+\varphi)^{-ia}\right]$$

sau trecând la forma reală și schimbând constantele de integrare C_1, C_2, C_3, C_4:

$$U = C_k\,(b+\varphi)^{\frac{1}{2}+a}\cos\left[a\ln\frac{b+\varphi}{b+\varphi_k} + \psi_k\right] + C_s\,(b+\varphi)^{\frac{1}{2}-a}\cos\left[a\ln\frac{b+\varphi}{b+\varphi_s} + \psi_s\right] \qquad (18.7)$$

Cunoscând pe U, prin împărțirea cu r_2 rezultă Q.

Rezultate mai exacte se pot obține, ca și în cazul sferei, dacă în ecuația (13.6) și (13.8) se fac schimbările de funcții:

$$\chi = \frac{V}{\sqrt{\sin\varphi}} \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \quad ; \qquad U = \frac{\overline{U}}{\sqrt{\sin\varphi}} \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

Făcând aceleași neglijări ca mai sus, se ajunge la ecuația:

$$\frac{d^4\overline{U}}{d\varphi^4} + 4\beta^4\,\overline{U} = 0$$

similară cu ecuația (18.3).

Formulele care rezultă sunt însă foarte complicate și, față de șirul de aproximații făcut, este preferabil a se considera primele două ipoteze.

19. Condiții marginale. Am arătat în capitolele precedente că eforturile și momentele se determină după integrarea unei ecuații diferențiale lineare neomogene de ordinul al patrulea. Soluția generală constă dintr'o soluție particulară care verifică partea dreaptă (neomogenă) și o soluție a ecuației omogene, care introduce patru constante arbitrare.

Incărcarea exterioară intervine numai în partea dreaptă, ceea ce arată că soluția particulară corespunde *suprafeței încărcate.*

Ecuația omogenă se obține suprimând partea dreaptă, adică considerând *suprafața neîncărcată.* Eforturile și momentele datorite acestei situații au o formă oscilatorie rapid amortizată, ceea ce demonstrează că ele se datoresc unor *perturbări marginale.*

Constantele se determină corespunzător rezemării pânzei și anume:

1) Simplă rezemare: $Q_k = 0$; $M_{\varphi k} = 0$

2) Articulație: $\Delta r_{0k} = 0$; $M_{\varphi k} = 0$

3) Incastrare perfectă: $\Delta r_{0k} = 0$; $\chi_k = 0$

4) Incastrare elastică: alungirile și rotirile reciproce în suprafața de contact să fie egale, la legătura pânzei cu alte elemente de construcție.

Indicele k înseamnă valoarea pentru $\varphi = \varphi_k$ ($\omega = 0$).

Cele două condiții sunt valabile pentru fiecare margine.

In cazul simplei rezemări, toate cele patru constante sunt nule și soluția particulară este soluția generală. Practic, soluțiile pentru Q, χ, M_φ și M_θ sunt absolut neglijabile, iar N_φ și N_θ concordă cu mare exactitate cu soluțiile de membrană. De aici va reieși întru cât este exactă teoria de membrană, precum și zona ei de aplicabilitate.

In cele ce urmează, vom studia celelalte condiții marginale în cazul cupolei sferice, studiul făcându-se absolut analog în cazul general.

20. Condiții marginale la cupola sferică

A. ARTICULAȚIE

In cele ce urmează vom nota barat soluțiile sistemului omogen; mai introducem următoarele notații:

$r_{sk} = r$ raza cercului paralel de centură

$\Delta r_{0k} = \Delta r$ lungirea razei.

Cele două condiții marginale se scriu:

$$\Delta r + \Delta \bar{r} = 0 \tag{20.1}$$

$$\overline{M}_{\varphi k} = 0 \qquad (M_{\varphi k} \simeq 0) \tag{20.2}$$

Cunoscând alungirile specifice ε_θ, se obține:

$$\left.\begin{aligned} \Delta r &= r.\varepsilon_{\theta k} = \frac{r}{E\delta}(N_{\theta k} - \mu N_{\varphi k}) \\ \Delta \bar{r} &= r.\bar{\varepsilon}_{\theta k} = \frac{r}{E\delta}(\overline{N}_{\theta k} - \mu \overline{N}_{\varphi k}) \end{aligned}\right\} \tag{20.3}$$

In cazul primei metode aproximative [relaţiile (17.8)... (17.13)], condiţiile (20.1), (20.2) se scriu:

$$\left.\begin{aligned}&(N_{\theta k}-\mu N_{\varphi k})-C\left[\beta\sqrt{2}.\sin\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right)+\mu\cot\varphi_k\,.\,\cos\psi\right]=0\\&C.\cos\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right)=0\end{aligned}\right\}\qquad(20.4)$$

de unde rezultă constantele de integrare:

$$\psi=\frac{\pi}{4}\;;\quad C\simeq\frac{N_{\theta k}-\mu N_{\varphi k}}{\beta\sqrt{2}}\qquad(20.5)$$

$N_{\theta k}$ şi $N_{\varphi k}$ reprezintă soluţiile teoriei de membrană. Introducând notaţia:

$$N_{\theta k}-\mu N_{\varphi k}=A\qquad(20.6)$$

expresiile pentru eforturi şi momente se scriu:

Metoda I

$$Q=\frac{A}{2\beta}\cdot e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega-\sin\beta\omega)\qquad(20.7)$$

$$N_\varphi=-\frac{A}{2\beta}\cot\varphi.\,e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega-\sin\beta\omega)\qquad(20.8)$$

$$N_\theta=-Ae^{-\beta\omega}.\cos\beta\omega\qquad(20.9)$$

$$M_\varphi=\frac{Aa}{2\beta^2}e^{-\beta\omega}.\sin\beta\omega\qquad(20.10)$$

$$M_\theta=-\frac{Aa}{4\beta^3}\cot\varphi.\,e^{-\beta\omega}.(\cos\beta\omega+\sin\beta\omega)+\mu M_\varphi\qquad(20.11)$$

In cazul metodei aproximative secunde [relaţiile (17.20)... (17.25)], se obţin constantele:

$$\psi\simeq\frac{\pi}{4}\;;\quad C\simeq\frac{N_{\theta k}-\mu N_{\varphi k}}{\beta\sqrt{2}}\sqrt{\sin\varphi_k}=\frac{A}{\beta\sqrt{2}}\sqrt{\sin\varphi_k}\qquad(20.12)$$

şi soluţiile pentru eforturi şi momente:

Metoda II

$$Q=\frac{A}{2\beta}\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}}\cdot e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega-\sin\beta\omega)\qquad(20.13)$$

$$N_\varphi=-\frac{A}{2\beta}\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}}\cdot\cot\varphi.\,e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega-\sin\beta\omega)\qquad(20.14)$$

$$N_\theta=-A\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}}\cdot e^{-\beta\omega}.\cos\beta\omega\qquad(20.15)$$

$$M_\varphi = \frac{Aa}{2\beta^2}\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}} \cdot e^{-\beta\omega}. \sin\beta\omega \tag{20.16}$$

$$M_\theta = -\frac{Aa}{4\beta^3} \cdot \sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}} \cdot \cot\varphi. e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega + \sin\beta\omega) + \mu M_\varphi \tag{20.17}$$

B. INCASTRARE PERFECTĂ

Cele două condiții marginale se scriu:

$$\Delta r + \Delta\bar{r} = 0 \tag{20.18}$$

$$\chi_k + \bar{\chi}_k = 0 \tag{20.19}$$

Prima condiție a fost stabilită precedent — prima relație (20.4). Pentru determinarea lui χ_k, din (13.6) deducem, neglijând pe U:

$$\chi_k = -\frac{F(\varphi)}{E\delta} = \frac{a}{E\delta}\left[\frac{dZ}{d\varphi} - (1+\mu)\,Y\right]_{\varphi=\varphi_k} \tag{20.20}$$

χ_k se deduce din (17.9) sau (17.21) pentru $\omega = 0$.

Deoarece χ_k are valori mici față de $\bar{\chi}_k$, îl putem neglija. In acest caz, constantele de integrare au următoarele valori (Metoda I):

$$\psi = 0 \;;\quad C = \frac{N_{\theta k} - \mu N_{\varphi k}}{\beta} = \frac{A}{\beta} \tag{20.21}$$

Soluția pentru eforturi și momente este:

Metoda I

$$Q = \frac{A}{\beta} e^{-\beta\omega}. \cos\beta\omega \tag{20.22}$$

$$N_\varphi = -\frac{A}{\beta}\cot\varphi. e^{-\beta\omega}\cos\beta\omega \tag{20.23}$$

$$N_\theta = -A. e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega + \sin\beta\omega) \tag{20.24}$$

$$M_\varphi = -\frac{Aa}{2\beta^2} \cdot e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega - \sin\beta\omega) \tag{20.25}$$

$$M_\theta = -\frac{Aa}{2\beta^3}\cot\varphi. e^{-\beta\omega}\sin\beta\omega + \mu M_\varphi \tag{20.26}$$

In cazul metodei secunde, constantele au valoarea:

$$\psi = 0 \;;\quad C = \frac{A}{\beta}\sqrt{\sin\varphi_k} \tag{20.27}$$

și soluția pentru eforturi și momente este:

Metoda II

$$Q = \frac{A}{\beta}\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}}\cdot e^{-\beta\omega}\cos\beta\omega, \tag{20.28}$$

$$N_\varphi = -\frac{A}{\beta}\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}}\cdot\cot\varphi\cdot e^{-\beta\omega}\cos\beta\omega, \tag{20.29}$$

$$N_\theta = -A\cdot\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}}\cdot e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega+\sin\beta\omega), \tag{20.30}$$

$$M_\varphi = -\frac{Aa}{2\beta^2}\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}}\cdot e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega-\sin\beta\omega), \tag{20.31}$$

$$M_\theta = -\frac{Aa}{2\beta^3}\sqrt{\frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi}}\cdot\cot\varphi\cdot e^{-\beta\omega}\sin\beta\omega+\mu M_\varphi. \tag{20.32}$$

Se poate obține și o soluție exactă, ținând seama de χ_k.

Sistemul de ecuații care determină constantele C și ψ se scrie:

$$\left.\begin{aligned} &\chi_k-\frac{2C\beta^2}{E\delta}\sin\psi=0 && \text{(Metoda I)}\\ \text{sau}\quad &\chi_k-\frac{2C\beta^2}{E\delta}\cdot\frac{\sin\psi}{\sqrt{\sin\varphi_k}}=0 && \text{(Metoda II)}\\ \text{și}\quad &C\left[\sin\psi+\left(1-\frac{\mu\cot\varphi_k}{\beta}\right)\cos\psi\right]=\frac{N_{\theta k}-\mu N_{\varphi k}}{\beta} \end{aligned}\right\} \tag{20.33}$$

Este interesant de observat că momentul M_φ la încastrare variază ca semn după deschiderea unghiulară φ_k, fiind negativ pentru φ_k mic și pozitiv pentru φ_k mare; aceasta rezultă imediat, studiind variația lui A cu unghiul φ.

C. INCASTRARE ELASTICĂ

In cazul încărcărilor simetrice, cupola transmite la margine numai eforturi orizontale dirijate după raza r și momente încovoietoare după meridian. Notăm aceste solicitări necunoscute cu R și M, urmând a le determina apoi pe baza de deformații egale ale pânzei și grinzii de centură (fig. 15).

Vom presupune că R și M acționează separat, urmând apoi să suprapunem efectele.

In primul caz, vom determina constantele C și ψ din condițiile

$$N_{\varphi k} = R\cos\varphi_k \quad ; \quad Q_k = -R\sin\varphi_k \quad ; \quad M_{\varphi k}\equiv 0.$$

De aici rezultă:

$$\left.\begin{aligned} &\psi=\frac{\pi}{4}\ ;\quad C=-R\sqrt{2}\cdot\sin\varphi_k && \text{(Metoda I)}\\ &\psi\cong\frac{\pi}{4}\ ;\quad C\cong-R\sqrt{2}\sin\varphi_k\sqrt{\sin\varphi_k} && \text{(Metoda II)} \end{aligned}\right\} \tag{20.34}$$

In al doilea caz vom determina constantele C și ψ din condițiile:

$$N_{\varphi k} = Q_k \cong 0 \; ; \quad M_{\varphi k} = M$$

De aici rezultă:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{\pi}{2} \; ; \quad C = 2\beta \frac{M}{a} && \text{(Metoda I)} \\ \psi &= \frac{\pi}{2} \; ; \quad C = 2\beta \frac{M}{a} \sqrt{\sin \varphi_k} && \text{(Metoda II)} \end{aligned}\right\} \tag{20.35}$$

Ținând seama de valorile constantelor și suprapunând efectele se obțin pentru eforturi, momente și deformații, următoarele expresii:

Metoda I

$$Q = \frac{e^{-\beta\omega}}{a} \cdot [(Rr - 2\beta M) \sin \beta\omega - Rr \cos \beta\omega] \tag{20.36}$$

$$N_\varphi = -\frac{\cot \varphi}{a} \cdot e^{-\beta\omega} [(Rr - 2\beta M) \sin \beta\omega - Rr \cos \beta\omega] \tag{20.37}$$

$$N_\theta = \frac{2\beta}{a} e^{-\beta\omega} [-(\beta M \sin \beta\omega + (Rr + \beta M) \cos \beta\omega] \tag{20.38}$$

$$M_\varphi = M. e^{-\beta\omega} \left[\left(1 + \frac{Rr}{\beta M}\right) \sin \beta\omega + \cos \beta\omega \right] \tag{20.39}$$

$$M_\theta = \frac{\cot \varphi}{\beta^2} \cdot e^{-\beta\omega} \left[\frac{Rr}{2} \sin \beta\omega + \left(\beta M + \frac{Rr}{2}\right) \cos \beta\omega \right] + \mu M\varphi \tag{20.40}$$

$$\chi = -\frac{e^{-\beta\omega}}{E\delta} \cdot \left[2\beta^2 \sin \varphi_k . R \sin \beta\omega + \left(2\beta \sin \varphi_k R + 4\beta^3 \frac{M}{a}\right) \cos \beta\omega \right] \tag{20.41}$$

$$\Delta r = \frac{2\beta \sin \varphi_k}{E\delta} (Rr + M\beta) \tag{20.42}$$

Metoda II

Expresiile eforturilor și momentelor sunt cele dela prima metodă, multiplicate cu raportul $\sqrt{\frac{\sin \varphi_k}{\sin \varphi}}$.

Făcând succesiv $R = 0$ sau $M = 0$, se vor obține cazurile când câte o solicitare acționează separat.

Determinarea lui R și M este indicată în capitolul următor.

21. Deformațiile pânzei și ale grinzii de centură. Deformațiile pânzei se obțin ușor din relațiile (20.3), (20.20), (20.40) și (20.42). Făcând succesiv $M = 0$, $R = 0$, și introducând indici R, M corespunzător solicitării care acționează, se obțin deformațiile marginale ale pânzei, trecute în tabela Nr. 4.

Vom stabili deformațiile grinzii de centură în cazul secțiunii dreptunghiulare $b \times d$ (fig. 16). Introducem notațiile:

$A = bd$ secțiunea grinzii; la secțiuni neomogene se va considera secțiunea ideală;

$I = \frac{b\,d^3}{12}$ momentul de inerție al secțiunii;

$W = \frac{b\,d^2}{6}$ modulul de rezistență;

$s \simeq \frac{b}{2}$, $t \simeq \frac{d}{2}$ distanțele marginii pânzei la centrul de greutate al secțiunii grinzii (fig. 16).

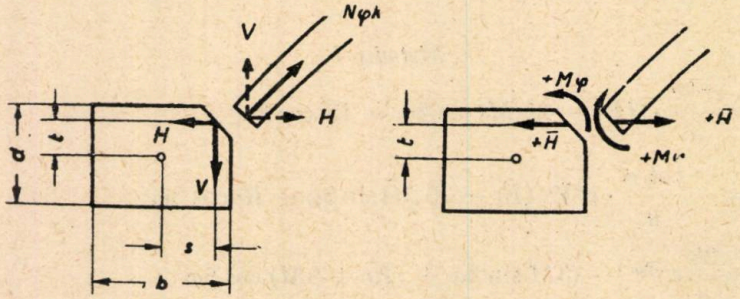


Fig. 16 — Grinda de centură.

Deformațiile grinzii vor fi notate cu *.

Solicitări de membrană.

Componentele orizontală (H) și verticală (V) ale efortului marginal $N_{\varphi k}$ sunt:

$$H = N_{\varphi k} \cdot \cos \varphi_k \; ; \quad V = N_{\varphi k} \cdot \sin \varphi_k \tag{21.1}$$

Forța de întindere în centură rezultă: $S = -H\left(r + \frac{b}{2}\right) \cong -Hr$ și produce lungirea specifică, respectiv deformația razei:

$$\overset{*}{\varepsilon}_{\theta k} = \frac{S}{EA} = -\frac{Hr}{EA} \; ; \quad \Delta r^* = r\,\overset{*}{\varepsilon}_{\theta k} = -\frac{Hr^2}{EA} \tag{21.2}$$

Rotirea grinzii se pune sub forma:

$$\overset{*}{\chi}_k = (Ht - Vs)\,\mathfrak{T} = (Ht - Vs)\frac{r^2}{EI}, \tag{21.3}$$

în care ($\mathfrak{T}$) este unghiul de rotire al grinzii, datorit momentului $M = +1$, luat conform relației (21.7).

Eforturile static nedeterminate R.

Modul de acționare este indicat în figura 17 *a*. Inlocuim eforturile excentrice R prin eforturile centrice R și momentele de răsucire $Rt \cong \frac{1}{2} Rd$.

Eforturile centrice R produc alungirea $\Delta r' = -\frac{Rr^2}{EA}$.

Momentele $\frac{1}{2} Rd$ pot fi înlocuite prin cupluri de forțe distribuite linear pe înălțimea grinzii (fig. 17 *a*); valoarea maximă rezultă din relația:

$$p_1 \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{3} = \frac{p_1 d^2}{6} = \pm \frac{1}{2} Rd \quad \text{sau} \quad p_1 = \pm \frac{3R}{d}$$

Efortul unitar maxim se deduce din formula cazanului:

$$\sigma = - p_1 \frac{r}{d} = - \frac{3Rr}{A}$$

și produce deformația razei:

$$\Delta r'' = r \frac{\sigma}{E} = - \frac{3 Rr^2}{EA}$$

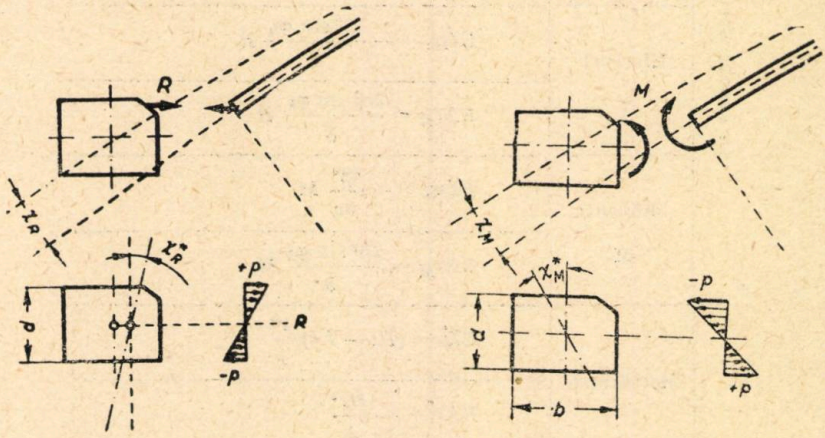


Fig. 17 *a*, *b*.— Acțiunea lui R, M asupra grinzii.

Deformația totală Δr^*_R este atunci

$$\Delta r^*_R = \Delta r' + \Delta r'' = - \frac{4Rr^2}{EA} \tag{21.4}$$

Deoarece $\Delta r''$ este variabil cu înălțimea grinzii și este nul la mijloc, se produce rotirea:

$$\chi^*_{Rk} = \frac{\Delta r''}{t} \cong - \frac{Rr^2}{EW} \tag{21.5}$$

Momentele static nedeterminate M.

In mod analog înlocuim momentele marginale M prin cupluri de forțe p_2 distribuite linear pe înălțimea grinzii (fig. 17 *b*).

Se obține: $p_2 = \pm \frac{6M}{d^2}$ și deformația razei:

$$\Delta r^*_M = \frac{Mr^2}{EW} \cdot \tag{21.6}$$

Corespunzător lungirii Δr_M^* se obține rotirea secțiunii:

$$\chi_{Mk}^* = \frac{\Delta r_M^*}{t} \cong \frac{Mr^2}{EI} \tag{21.7}$$

Deformările grinzii de centură sunt astfel determinate în întregime. Se va observa că ele sunt valabile pentru orice formă a curbei meridiane. In tabloul Nr. 4 sunt trecute deformațiile grinzii și ale pânzei.

TABLOUL Nr. 4

In cupola sferică	Membrană	$E\chi_k = \frac{a}{\delta}\left[\frac{dZ}{d\varphi} - (1+\mu)\,Y\right]_{\varphi=\varphi_k}$
		$E\Delta r = \frac{r}{\delta}(N_{\theta k} - \mu N_{\varphi k})$
	Eforturi R	$E\chi_{Rk} = -\frac{2\beta^2 \sin\varphi_k}{\delta} R$
		$E\Delta r_R = \frac{2r\beta \sin\varphi_k}{\delta} R$
	Momente M	$E\chi_{Mk} = -\frac{4\beta^2}{\delta a} M$
		$E\Delta r_M = \frac{2\beta^2 \sin\varphi_k}{\delta} M$
In grindă	Membrană	$E\chi_k^* = (Ht - Vs)\frac{r^2}{I}$
		$E\Delta r^* = -\frac{Hr^2}{A}$
	Eforturi R	$E\chi_{Rk}^* = -\frac{r^2}{W} R$
		$E.\Delta r_R^* = -\frac{r^2}{A} R$
	Momente M	$E\chi_{Mk}^* = \frac{r^2}{I} M$
		$E\Delta r_M^* = \frac{r^2}{W} \cdot M$

Condițiile ca pânza și grinda să lucreze împreună sunt ca și deformațiile să fie aceleași:

$$\left.\begin{aligned} \chi_k + \chi_{Rk} + \chi_{Mk} &= \chi_R^* + \chi_{Rk}^* + \chi_{Mk}^* \\ \Delta r + \Delta r_R + \Delta r_M &= \Delta r^* + \Delta r_R^* + \Delta r_M^* \end{aligned}\right\} \tag{21.8}$$

Din sistemul de două ecuații lineare (21.8) se determină R și M.

22. Flambajul simetric al cupolelor sferice. Vom presupune că cupola sferică este supusă unei presiuni uniforme radiale, dirijată din spre exterior către interior.

Componentele încărcării sunt în acest caz:

$$X = Y \equiv 0 \; ; \quad Z = p \; (= \text{const.})$$

Din (4.14) și (4.15) se obține:

$$N_{\varphi 1} = N_{\theta 1} = -\frac{pa}{2}. \tag{22.1}$$

Dacă presiunea p depășește o anumită valoare critică, forma sferică de echilibru poate deveni nestabilă și se produce flambajul. Deoarece încărcările sunt simetrice, vom presupune că suprafața deformată este de asemenea simetrică.

Pentru determinarea încărcărilor critice va trebui să studiem echilibrul suprafeței *deformate* (fig. 18).

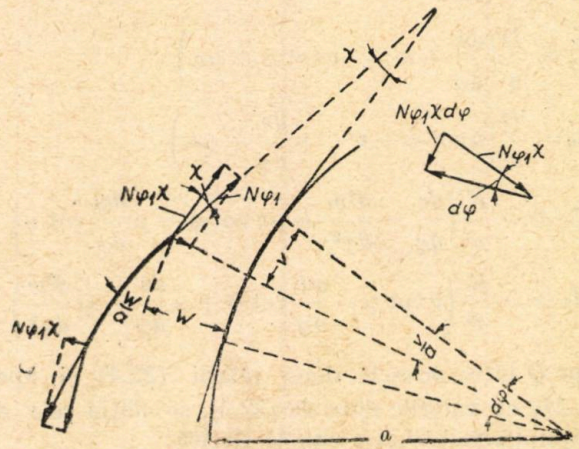


Fig. 18. — Eforturile acționând asupra unui element al suprafeței deformate.

Eforturile N_φ și N_θ, care acționează în suprafața deformată, diferă de cele date de relațiile (22. 1) cu cantități mici N'_φ și N'_θ.

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= N_{\varphi 1} + N'_\varphi = -\frac{pa}{2} + N'_\varphi \\ N_\theta &= N_{\theta 1} + N'_\theta = -\frac{pa}{2} + N'_\theta \end{aligned}\right\} \tag{22.2}$$

Deformațiile v, w ale cupolei produc lungirile specifice și variația pantei tangentei:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{a}\left(\frac{dv}{d\varphi} + w\right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{a}\left(v \cot \varphi + w\right) \\ \chi &= \frac{1}{a}\left(v - \frac{dw}{d\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{22.3}$$

Ţinând seama de aceste deformaţii, ecuaţiile de echilibru se scriu, după toate simplificările:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dN'_\varphi}{d\varphi} + (N'_\varphi - N'_\theta)\cot\varphi - Q - \frac{pa\chi}{2} = 0\\
&N'_\varphi + N'_\theta + \frac{dQ}{d\varphi} + Q\cot\varphi + pa(\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta) + N_{\varphi 1}\left(\frac{d\chi}{d\varphi} + \chi\cot\varphi\right) = 0\\
&\frac{dM_\varphi}{d\varphi} + (M_\varphi - M_\theta)\cot\varphi - Q_a = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (22.4)$$

Eforturile şi momentele se pot exprima în funcţie de deplasări cu ajutorul relaţiilor (12.13) şi (10.8):

$$\left.\begin{aligned}
N'_\varphi &= \frac{D}{a}\left(\frac{dv}{d\varphi} + w + \mu v\cot\varphi + \mu w\right)\\
N'_\theta &= \frac{D}{a}\left(v\cot\varphi + w + \mu\frac{dv}{d\varphi} + \mu w\right)\\
M_\varphi &= -\frac{K}{a^2}\left(\frac{dv}{d\varphi} - \frac{d^2w}{d\varphi^2} + \mu v\cot\varphi - \mu\frac{dw}{d\varphi}\cot\varphi\right)\\
M_\theta &= -\frac{K}{a^2}\left(v\cot\varphi - \frac{dw}{d\varphi}\cot\varphi + \mu\frac{dv}{d\varphi} - \mu\frac{d^2w}{d\varphi^2}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (22.5)$$

Eliminând pe Q între primele două relaţii (22.4) şi apoi înlocuind pe N'_φ, N'_θ, M_φ, M_θ cu valorile date de (22.5), se obţin cele două ecuaţii de bază ale flambajului simetric la o cupolă sferică:

$$(1+k)\cdot\left[\frac{d^2v}{d\varphi^2} + \frac{dv}{d\varphi}\cdot\cot\varphi - v(\mu + \cot^2\varphi) + (1+\mu)\cdot\frac{dw}{d\varphi}\right] -$$

$$- k\left[\frac{d^3w}{d\varphi^3} + \frac{d^2w}{d\varphi^2}\cot\varphi - \frac{dw}{d\varphi}(\mu + \cot^2\varphi)\right] - q\left(v - \frac{dw}{d\varphi}\right) = 0 \qquad (22.6)$$

$$(1+\mu)\cdot\left(\frac{dv}{d\varphi} + v\cot\varphi + 2w\right) + k\left[-\frac{d^3v}{d\varphi^3} - 2\frac{d^2v}{d\varphi^2}\cot\varphi + \right.$$

$$+ \frac{dv}{d\varphi}(1 + \mu + \cot^2\varphi) - v(2 - \mu + \cot^2\varphi).\cot\varphi + \frac{d^4w}{d\varphi^4} +$$

$$+ 2\frac{d^3w}{d\varphi^3}\cot\varphi - \frac{d^2w}{d\varphi^2}(1 + \mu + \cot^2\varphi) + \qquad (22.7)$$

$$+ \frac{dw}{d\varphi}(2 - \mu + \cot^2\varphi).\cot\varphi + 2\left(\frac{dw}{d\varphi} + v\cot\varphi + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{d^2w}{d\varphi^2} + \frac{dw}{d\varphi}\cot\varphi + 4w\right)\right] = 0$$

In (22.6) și (22.7) sunt introduse notațiile:

$$k = \frac{D}{Ka^2} \quad \text{și} \quad q = \frac{pa}{2D}. \tag{22.8}$$

Observând că expresiile din parantezele drepte nu se schimbă dacă înlocuim pe v prin $\left(-\frac{dw}{d\varphi}\right)$, suntem conduși să introducem noua variabilă:

$$v = -\frac{dV}{d\varphi}. \tag{22.9}$$

Introducând operatorul:

$$H(\ldots) = \frac{d^2(\ldots)}{d\varphi^2} + \frac{d(\ldots)}{d\varphi}\cot\varphi + 2(\ldots) \tag{22.10}$$

și neglijând pe k față de unitate, relația (22.6) devine:

$$\frac{d}{d\varphi}\left[H(V) + k\,H(w) - (1+\mu)(V+w) - k(1+\mu)w - q(V+w)\right] = 0$$

Putem neglija termenul al patrulea față de al treilea, ca fiind foarte mic, și apoi integrăm direct. Deoarece adăugarea unei constante la V nu modifică valoarea lui v, vom considera nulă constanta de integrare.

Astfel se obține:

$$H(V) + k\,H(w) - (1+\mu)(V+w) - q(V+w) = 0 \tag{22.11}$$

A doua ecuație se transformă mai laborios și final se obține:

$$k\,H\,H(V+w) - (1+\mu)\cdot H(V) - (3+\mu)\cdot kH(w) + 2(1+\mu)\cdot(V+w) + \\ + q\left[-H(V) + H(w) + 2(V+w)\right] = 0 \tag{22.12}$$

Problema s'a redus deci la integrarea ecuațiilor (22.11) și (22.12). Pentru aceasta introducem funcțiile sferice care satisfac ecuația diferențială

$$\frac{d^2P_n}{d\varphi^2} + \frac{dP_n}{d\varphi}\cot\varphi + n(n+1)P_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{22.13}$$

Introducând notația:

$$\lambda_n = n(n+1) - 2 \tag{22.14}$$

și ținând seama de (22.10) și (22.13), se obține:

$$H(P_n) = -\lambda_n \cdot P_n \quad \text{și} \quad H\,H(P_n) = -\lambda_n \cdot H(P_n) = \lambda_n^2 \cdot P_n \tag{22.15}$$

Revenind la ecuațiile diferențiale (22.11) și (22.12), acestea vor fi satisfăcute dacă luăm:

$$\left.\begin{aligned} V &= \Sigma A_n \cdot P_n \\ w &= \Sigma B_n \cdot P_n \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{aligned} &n = 0, 1, 2, \ldots \\ &A_n, B_n \text{ constante de integrare} \end{aligned}\right) \tag{22.16}$$

Seriile (22.16) satisfac ecuațiile diferențiale dacă fiecare termen (coeficient al lui P_n) se anulează separat. Va rezulta pentru fiecare rang n, câte un sistem de două ecuații omogene în A_n și B_n. Soluțiile vor fi diferite de zero dacă determinantul sistemului este nul. Determinantul desvoltat dă condiția:

$$(1-\mu^2)\lambda_n + k\,\lambda_n\left[\lambda_n^2 + 2\lambda_n + (1+\mu)^2\right] - q\lambda_n(\lambda_n + 1 + 3\mu) = 0. \tag{22.17}$$

Indepărtând soluția $\lambda_n = 0$, care corespunde deplasării cupolei ca corp rigid în direcția axei, se obține:

$$q = \frac{1 - \mu^2 + k\left[\lambda_n^2 + \lambda_n (1 + \mu)^2\right]}{\lambda_n + 1 + 3\,\mu} \tag{22.18}$$

Cea mai mică sarcină critică se deduce din condiția:

$$\frac{dq}{d\lambda_n} = 0$$

și are loc pentru

$$\lambda_n = -(1 + 3\,\mu) + \sqrt{(1 + 3\,\mu)^2 + \frac{1-\mu^2}{k}}$$

Inlocuind în (22.18), se obține:

$$q_{\min} \cong 2\sqrt{k(1 - \mu^2)} \tag{22.19}$$

Sarcina critică p_{cr} rezultă din (22.8) și se pune sub una din formele;

$$p_{cr} = \frac{4\,D\sqrt{k(1-\mu^2)}}{a} = 8\,E\,k\sqrt{3(1-\mu^2)} = \frac{2E\delta}{a\beta^2} = \frac{2\,E\delta^2}{a^2\sqrt{3(1-\mu^2)}} \tag{22.20}$$

Rezistențele critice se obțin împărțind eforturile $\left(-\frac{pa}{2}\right)$ la grosimea δ:

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{\delta}{a} = \frac{E}{\beta^2} \tag{22.21}$$

Aceste rezultate au fost obținute în ipoteza că λ_n variază cotinuu. In realitate λ_n este întreg și în (22.18) va trebui să introducem două valori întregi succesive ale lui λ_n, apropiate de valoarea stabilită mai sus; fiind însă vorba de valori mari, calculul exact va diferi foarte puțin de rezultatele de mai sus.

Mai trebue observat că la materialele având limită de elasticitate, teoria de mai sus este valabilă atât timp cât $\sigma_{cr} < \sigma_e$.

ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Работа является синтезом наиболее важных вопросов в теории оболочек вращения, представленных в унитарной форме. В нее включены также результаты, достигнутые лично автором относительно теории мембраны в случае несимметричных нагрузок и установление наиболее общих деформаций.

Работа состоит из 4 частей : Общие уравнения. Теория мембран. Изучение деформаций. Теория изгиба при симметричных нагрузках.

Для практической стороны проблемы, были приведены результаты в форме пригодной для немедленного применения ; равным образом приводятся примеры вычислений, из числа которых упоминаем вычисление гиперболической башни.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Геометрические элементы оболочки.
Рис. 2. — Унитарное сопротивление в оболочке.
Рис. 3. — Усилия, действующие на часть поверхности.
Рис. 4. — Моменты, действующие на часть поверхности.
Рис. 5. — Соотношение между $N\varphi$ и P_φ.
Рис. 6. — Изменение унитарных усилий гиперболической башни.
Рис. 7. — Сферический купол с нагрузкой собственного веса.
Рис. 8. — Усилия, вызванное ветром.
Рис. 9. — Купол на изолированных столбах.
Рис. 10. — Полусферический резервуар.
Рис. 11. — Деформации средней поверхности.
Рис. 12. — Удлинения средней поверхности.
Рис. 13. — Разрез θ *const*. Деформации в z.
Рис. 14. — Разрез φ = *const*. Деформация в z.
Рис. 15. — Экспликация в тексте.
Рис. 16. — Поясная балка.
Рис. 17. *a*, *b*. — Действие R, M на балку.
Рис. 18. — Усилия, действующие на часть деформированной оболочки.

LA THÉORIE DES VOILES MINCES DE ROTATION

(RÉSUMÉ)

Ce travail constitue une synthèse des plus importants problèmes de la théorie des voiles minces de rotation, présentée de façon unitaire. Il comprend également les résultats personnels obtenus par l'Auteur, relatifs à la théorie de membrane, dans le cas des charges non symétriques et l'on y établit les déformations les plus générales. Le travail se compose de quatre parties: les Equations générales, la Théorie de membrane, l'Etude des déformations, la Théorie de la flexion à des charges symétriques.

Poursuivant également le côté pratique des problèmes, l'Auteur a ramené les résultats à une forme d'application imédiate. Il a également donné quelques exemples de calcul, en particulier celui d'une tour hyperbolique.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Eléments géométriques de la voile mince.
Fig. 2. — Efforts unitaires dans la voile.
Fig. 3. — Les efforts agissant sur un élément.
Fig. 4. — Les moments agissant sur un élément.
Fig. 5. — La relation entre $N\varphi$ et $P\varphi$
Fig. 6. — Variation des efforts unitaires dans une tour hyperbolique.
Fig. 7. — Coupole sphérique chargée de son propre poids.
Fig. 8. — Efforts provenant du vent.
Fig. 9. — Coupole sur piliers isolés.
Fig. 10. — Réservoir hémisphérique.
Fig. 11. — Les déformations de la surface médiane.
Fig. 12. — Les allongements de la surface médiane.
Fig. 13. — La section θ = const. Déformations z.
Fig. 14. — La section φ = const. Déformations z.
Fig. 16. — Poutre de ceinture.
Fig. 17. — *a*, *b*. L'action du R, M sur la poutre.
Fig. 18. — Les efforts agissant sur un élément de la voile déformée.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Z. Vlasov, *Teoria generală a membranelor şi aplicarea ei în tehnică*. Moscova, Ed. de Stat pentru Literatura Tehnică Teoretică, 1949.
2. St. Timoshenko, *Teoria plăcilor şi suprafeţelor subţiri*. Mg. Graw-Hill Book Company, New-York, Londra, 1940, v. I.
3. — *Stabilitatea elastică*. Paris, 1947.
4. W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1934.
5. K. Girkmann, *Flächentragwerke*. Wien, Springer Verlag, 1948.
5. K. Beyer, *Statik im Eisenbetonbau*. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1934, v. II

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

METALURGIE

METODA DE EXTRAGERE A ZINCULUI PUR PE CALE USCATĂ

DE

GR. SOCOLESCU

A. STUDIUL TEORETIC AL CENTRIFUGĂRII ALIAJELOR IN STARE TOPITĂ IN VEDEREA ACCENTUĂRII FENOMENULUI DE LICUAŢIE

Zincul este un metal de prim ordin. Fabricaţia lui în Europa a început în secolul al XVIII-lea.

Datorită numeroaselor sale întrebuinţări — atât singur, dar mai ales ca participant principal la diferite aliaje — metalurgia zincului s'a desvoltat rapid, iar producţia mondială de zinc a trecut de 2.000.000 de tone pe an.

In ţara noastră, zincul a început să fie fabricat în anul 1938. Producţia indigenă a acestui metal este în continuă creştere, cererea fiind tot mai mare.

Gradul de puritate a zincului este de cea mai mare importanţă pentru majoritatea produselor laminate. Electro-tehnica şi industria tipografică pretind de asemenea un zinc cât mai curat.

Fabricarea aliajelor de zinc cere şi ea ca metalele ce intră în aliaj să fie pure, pentru a se putea efectua dozarea exactă a constituenţilor.

Produsele fabricate pe bază de zinc de calitate inferioară nu pot întruni condiţiile minime necesare pentru turnare corectă, nu rezistă mecanic şi mai ales se distrug repede sub acţiunea corozivă a agenţilor atmosferici. Apariţia zincului pur pe piaţă şi studiile îndelungate întreprinse de diferiţi cercetători au dus la prepararea unor aliaje, mai ales aliaje ternare (Zn Al Cu), care astăzi sunt baza materiei prime a 80% din obiectele turnate sub presiune. Procedeul de turnare sub presiune permite obţinerea de obiecte cât de complicate, în mare serie, cu mare precizie şi cu minimă prelucrare de finisaj. Debuşeul nelimitat al acestor obiecte sunt industriile de automobile, aviaţie, obiecte casnice, etc. Gama de aliaje cu bază de zinc este foarte largă dacă amintim: alama, tombacul, metalul Delta, alpacaua, bronzurile, zamacul, etc. Toate însă se bazează pe condiţia de a avea iniţial metalele componente în stare cât mai curată.

Zincul chimic pur (99,988%) supus unor distilări fracţionate în vid, la temperatură joasă, duce la un zinc spectrografic pur cu 99,9999% Zn. Metalul astfel obţinut este cristalin, strălucitor şi foarte rezistent faţă de acţiunea oxigenului şi chiar a acizilor. El se comportă admirabil la laminare şi trefilare şi pare, datorită proprietăţilor sale, că este un alt metal.

In industrie, zincul cel mai pur este cel obţinut pe cale umedă, prin electroliză. Zincul obţinut pe cale termică este impur şi uneori trebue să fie rafinat.

In ţara noastră zincul se fabrică numai pe cale termică, iar standardul prevede două calităţi STAS 646/49 Z cu o puritate de 98% (de primă fuziune) şi 646/49 R, cu o puritate de 98,8% (rafinat).

Zincul se fabrică azi aproximativ 70% pe cale electrolitică şi restul pe cale termică.

In general, impurităţile zincului termic sunt plumbul şi cadmiul şi, foarte rar, staniul. Pentru purificarea lui s'au pus la punct diferite metode, dintre care sunt cunoscute şi aplicate următoarele:

1. Distilarea fracţionată a zincului impur într'o instalaţie cu coloane de distilare. Se foloseşte diferenţa de punct de fierbere dintre zinc (907°C) şi impurităţile conţinute — cadmiu (767°C) şi plumb (1740°C). Instalaţia funcţionează cu rezultate foarte bune, dar are desavantajul că este construită din material refractar scump (carborundum).

2. Filtrarea vaporilor de zinc la degajarea lor din creuzetele cuptorului de reducere, printr'o membrană poroasă din material refractar, care permite obţinerea unui zinc cu 0,2—0,4% impurităţi, dar care prezintă desavantajul că reduce producţia şi măreşte pierderile în zinc.

3. Purificarea electrolitică (anozi solubili). Procedeul este costisitor şi dacă se dispune de o astfel de instalaţie nu mai are rost extragerea termică a zincului, ci se alege calea hidrometalurgică.

4. Segregarea sau licuaţia, adică separarea prin decantare a două metale care au greutatea specifică diferită şi care îndeplinesc anumite condiţii de miscibilitate.

Prin menţinerea timp îndelungat a zincului în stare topită la o temperatură cât mai apropiată de temperatura de solidificare, se separă din massa topită elementul cu greutate specifică mai mare, în straturile inferioare, iar din straturile superioare se scoate cu lingura un zinc al cărui conţinut în plumb scade la cca 1,2%.

Compoziţia zincului luat în considerare în cercetările noastre este arătată în tabloul Nr. 1.

TABLOUL Nr. 1

Calitatea	STAS 646 Z				STAS 646 R		
Proba	I	II	III	IV	I	II	III
Pb	1,76	1,96	2,10	1,49	1,07	1,05	1,11
Cd	0,18						
Fe	0,09				0,04		0,02
Sn	0,02	0,012					

In căutarea unei metode mai simple şi mai ieftine care să dea posibilitatea de a se purifica zincul de primă fuziune până la o calitate satisfăcătoare pentru nevoile industriei noastre, s'au studiat relaţiile de echilibru în sistemul binar zinc-plumb, impuritatea lui principală fiind plumbul.

Diagrama acestui sistem, pe care o reprezintă figura 1, este rezultatul studiilor făcute de o seamă de cercetători printre care cităm pe: Matthiessen,

von Bose, Spring, Romanof, Thomson, Hodge, Jellinek, etc.

Diagrama de echilibru a sistemului Zn Pb a fost trasată de cercetătorii menţionaţi mai sus, fără ca asupra aliajului să se exercite vreo acţiune exterioară alta decât răcirea înceată a sistemului şi presiunea atmosferică normală.

Din examinarea diagramei se observă că aceste două metale au o lacună de miscibilitate în stare lichidă, iar studiul microscopic al aliajelor bogate în zinc arată că solubilitatea solidă a plumbului în zinc este mai mică de 0,0019%.

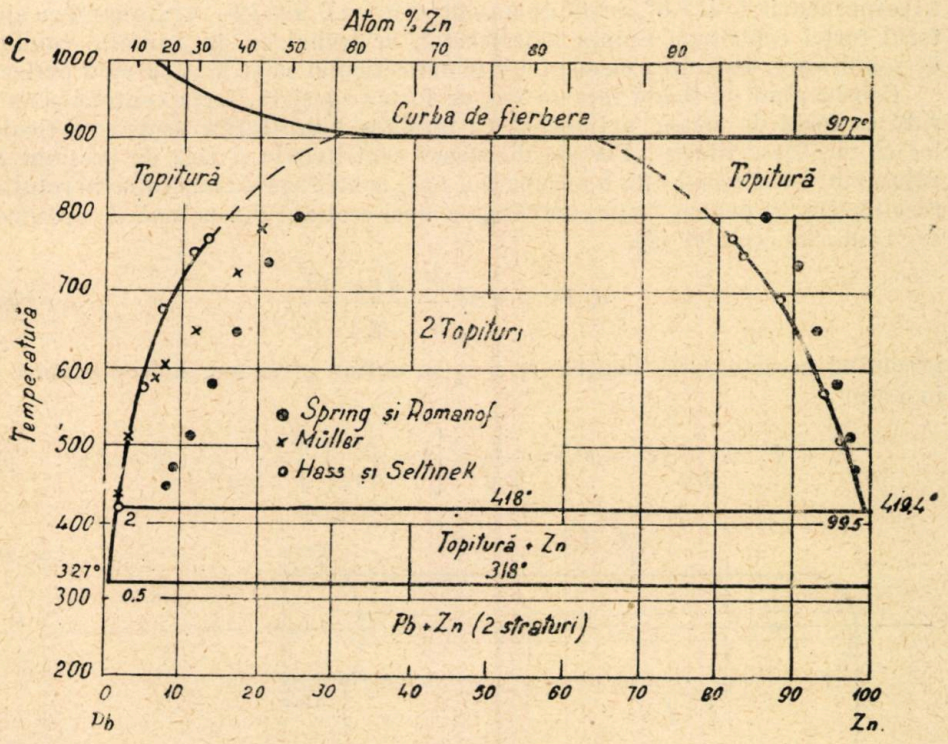


Fig. 1

Aceasta înseamnă că, în stare solidă, plumbul poate fi socotit practic insolubil şi că rezultatele obţinute prin rafinarea uscată în care plumbul a fost coborît la 1,1% pot fi ameliorate.

In lucrarea de faţă sunt expuse rezultatele încercărilor făcute în acest scop, supunându-se metalul, în timpul solidificării, acţiunii unei forţe exterioare.

Forţa aleasă a fost forţa centrifugă. Aceasta fiind proporţională cu massa, particulele cu greutate specifică mai mare vor aluneca spre periferie, deplasând spre centru particulele cu massă mai mică. Astfel, fenomenul de licuaţie, folosit în rafinarea uscată va fi mult accentuat.

Ecuaţia ce exprimă forţa centrifugă este

$$Fc = Mr\,\omega^2 \qquad (1)$$

sau

$$Fc = M = \frac{v^2}{r} \tag{2}$$

în care ω este iuţeala unghiulară sau lungimea parcursă într'o secundă de un mobil pe un arc a cărui rază este de 1 cm. Orice forţă de massă poate fi considerată ca acţionând în centrul de greutate al massei fiecărei particule de substanţă.

In sistemul binar Zn Pb aflat în stare lichidă, fără acţiuni exterioare, topitura este formată din două faze distincte care, în apropierea zincului curat şi a temperaturii de 417,8°, arată un monotectic cu 0,9% Pb. Acţionând cu ajutorul forţei centrifuge asupra amestecului, ar trebui ca, în anumite condiţii de solidificare, separarea elementelor monotecticului să se facă în mod perfect.

Considerând un lichid într'un vas de formă specială, forţa centrifugă apărută ca forţă de massă acţionează ca presiune hidrostatică asupra particulelor ce alcătuesc fluidul. Forţele de massă centrifugale şi cele de presiune se suprapun. Dacă vasul este o eprubetă a unei centrifugé de laborator în rotaţie, rezultă (fig. 2) pentru forţa centrifugă a unei secţiuni din prisma de grosimea dr, conform ecuaţiei (2),

$$d.\ Pc = d\,M \frac{v^2}{r} \frac{dr\gamma}{g} \frac{v^2}{r} \tag{3}$$

integrând aceasta între limitele r_1 şi r_2 se obţine presiunea hidrodinamică P în kg/m².

$$P_2 - P_1 = \frac{\gamma}{2g}(V_2^2 - v^2,) = \frac{\gamma}{2g} v_2^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] = \frac{\gamma}{2g} \omega^2 (r_2^2 - r_1^2). \tag{4}$$

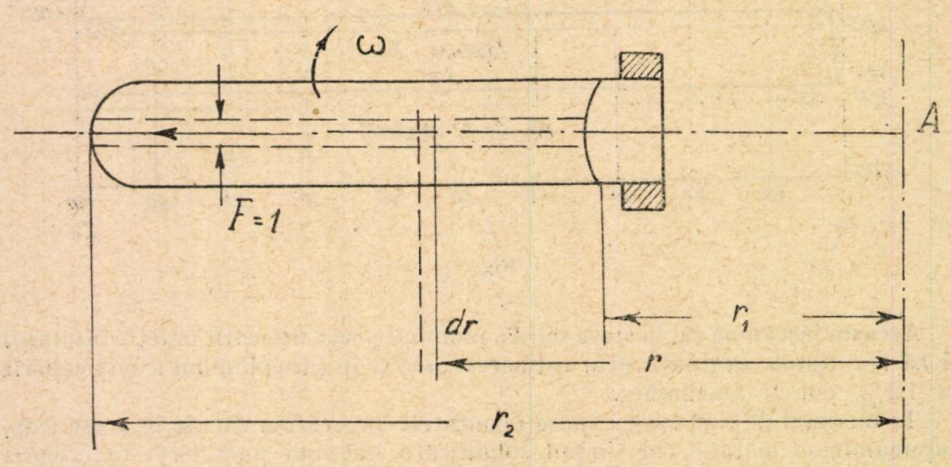


Fig. 2

Aplicând calculul de mai sus, cazul aliajelor de Pb Zn în apropierea zincului curat şi ţinând seama că sub temperatura de 418° cele două elemente în contact au densităţi vecine cu cele ale metalelor pure, cele două puncte materiale vor fi unul de zinc cu massă 6,86 şi altul de plumb cu massă 11,38 care se învârtesc

în jurul unui ax la distanță $r = 10$ cm cu o iuțeală de 50 rotații/sec. (3000 rotații/minut).

Pentru zinc vom avea:

Fc zinc $= 6{,}86 \times 98496 \times 10 = 6.763.685$ dyne, iar pentru plumb:

Fc plumb $= 11{,}38 \times 98596 \times 10 = 11.220.224$ dyne.

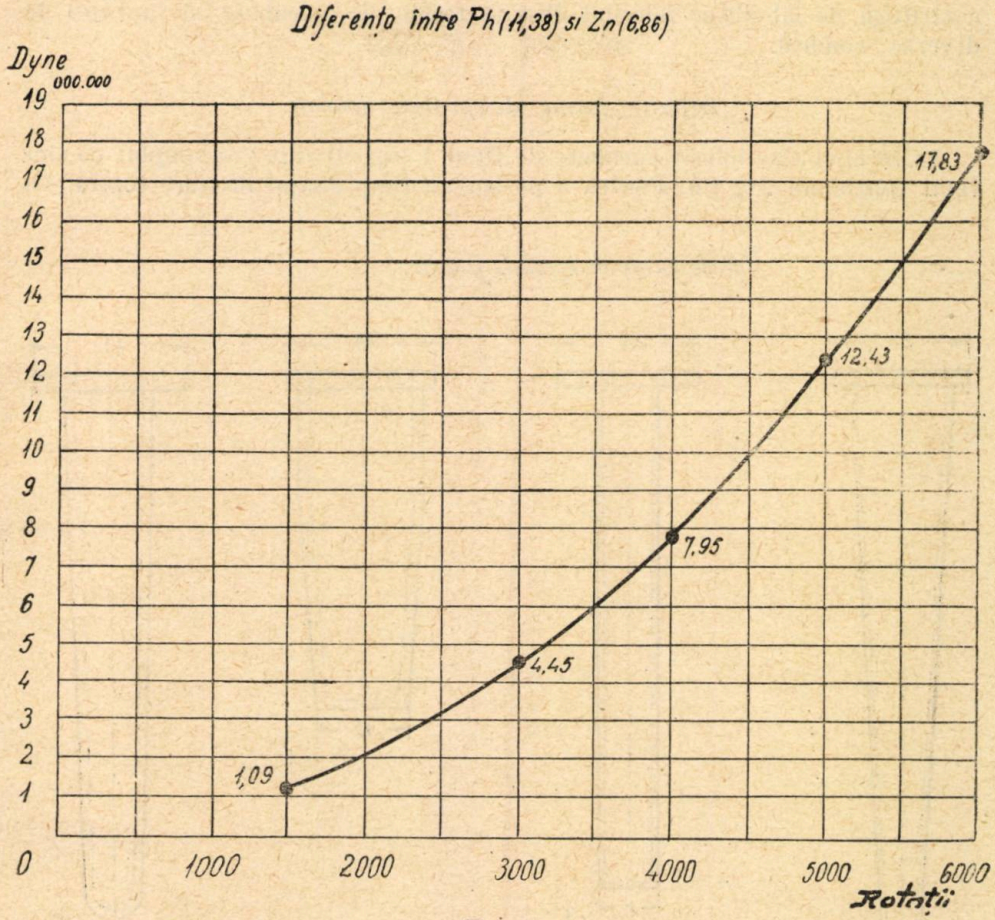


Fig. 3

Diferența este $11.220.224 - 6.763.685 = 4.456.539$ dyne.

$$1 \text{ kg} = 981.000 \text{ dyne}$$

$$4.456.539 \text{ dyne} = \frac{4.456.539}{981.000} \text{ kg} = 4{,}520 \text{ kg}$$

Aceasta înseamnă că dacă se iau în considerare două elemente de masse corespunzătoare greutăților specifice ale plumbului și respectiv ale zincului,

elemente de cca 10 cm^3 fiecare, forța care smulge plumbul din zinc, pentru 300 rotații/minut și rază de 10 cm, este de 4,5 kg.

In graficul din figura 3 este redată, calculată în dyne, diferența dintre plumb și zinc pentru rotații între 1000 și 6000/minut.

B. REZULTATE EXPERIMENTALE

Incercările practice pentru verificarea celor de mai sus au fost făcute cu o centrifugă de laborator folosind diferite forme de eprubete și lucrând în diverse condiții.

Diferite forme de eprubete folosite

La început s'au folosit eprubete de tipul 1 (fig. 4) care s'au umplut cu zinc topit conținând 2% Pb. Pentru a păstra un timp aliajul în stare topită, s'a

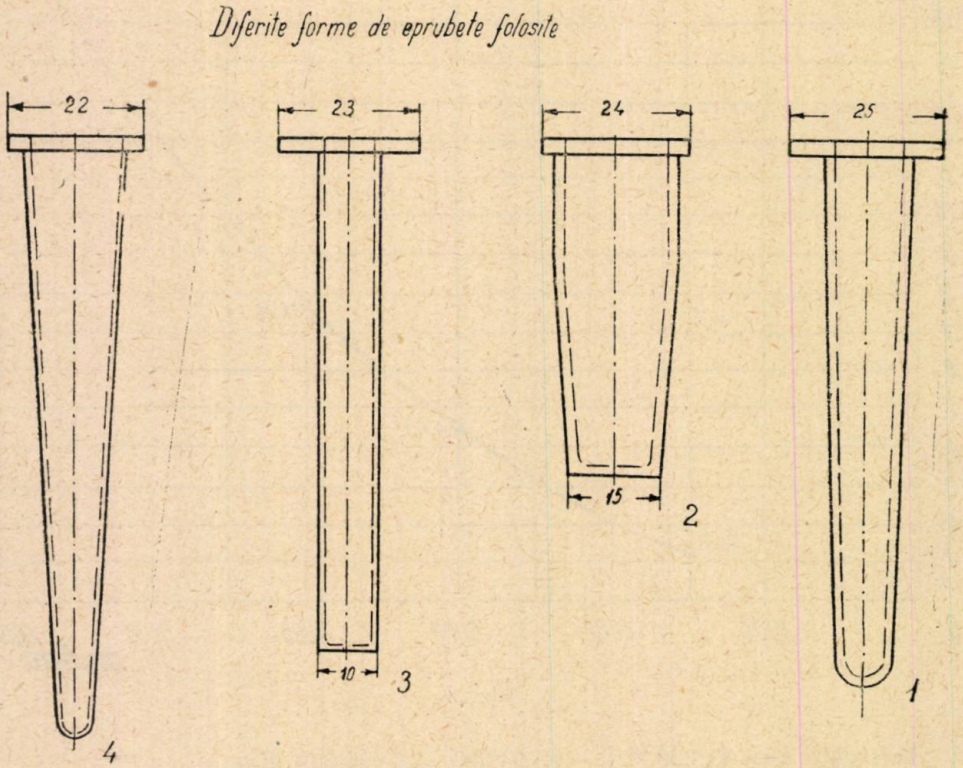


Fig. 4

îmbrăcat eprubeta în asbest. Analizând rezultatele obținute s'a constatat la o eprubetă centrifugată la 2500 ture un conținut de 0,51% Pb.

Altă serie de încercări a fost făcută cu eprubete de tipul 2, tamburul centrifugii fiind izolat spre exterior, iar în interior amenajându-se un dispozitiv electric capabil să încălzească interiorul centrifugii până la 450°C.

Variind iuţeala între 2000—5000 rotaţii/minut, conţinutul final de plumb s'a menţinut, totuşi, între 0,68—0,9%.

Eprubetele de tipul 3 au fost îmbrăcate într'o rezistenţă electrică, încălzită printr'un dispozitiv cu colector. Zincul a fost topit chiar în eprubeta aparatului şi după 2—3 minute de mers curentul a fost întrerupt, iar centrifuga a continuat să se învârtească până la completa solidificare a aliajului.

Rezultatele nu au fost mai bune decât cele precedente, conţinutul de plumb al zincului rămânând în jurul lui 0,9%.

Analizând felul de lucru, respectiv rezultatele obţinute până aici, şi legându-le de fenomenele ce se desprind din cercetarea diagramei de echilibru a sistemului, condiţiile cele mai favorabile unei reduceri a conţinutului de plumb sunt legate de modul cum se face răcirea în intervalul 418°—317°, în timpul centrifugării. O separare perfectă cere în acest interval o răcire înceată, iar solidificarea să pornească dela capătul lingoului spre baza lui.

Condiţiile acestea au fost obţinute cu o lingotieră de tipul 4, aşezată într'un simplu înveliş izolant din punct de vedere termic.

In felul acesta s'a realizat o răcire mijlocie pe întreaga eprubetă, iar din cauza presiunii născute în topitură, prin forţa centrifugă, punctul de topire al metalului scade progresiv către baza lingoului şi, respectiv, solidificarea se va face în condiţiile favorabile separării.

Intr'adevăr, încercările făcute cu acest tip de eprubetă au dat rezultate mulţumitoare, conţinutul de plumb al metalului centrifugat fiind, pe toată lungimea eprubetei, în jurul lui 0,21%. La capătul de jos al eprubetei s'a adunat plumbul, care poate fi desprins cu uşurinţă şi eliminat.

Procedeul acesta de purificare poate fi aplicat şi altor sisteme de aliaje pe care studiul diagramei de echilibru le poate prevedea dinainte.

МЕТОД ИЗВЛЕЧЕНИЯ ЧИСТОГО ЦИНКА СУХИМ ПУТЕМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Извлечение цинка сухим путем стало возможным благодаря изучению возможностей усиления явления ликвации и в связи с центробежными экспериментальными исследованиями при различных условиях некоторых расплавленных сплавов цинков, содержащих свинец.

Проведенные в небольшом масштабе опыты дали цинк, гарантирующий 99,8% чистоты, исходя от цинка, полученного термическим путем ГОСТ 646 Z., и содержащим приблизительно 2,1% свинца.

MÉTHODE D'EXTRACTION DU ZINC PUR PAR VOIE SÈCHE

(RÉSUMÉ)

L'extraction du zinc pur par voie sèche est rendue possible par l'étude des possibilités d'accentuation du phénomène de liquation et à la suite des recherches expérimentales centrifuges à différentes conditions de certains alliages fondus de zinc, contenant du plomb.

Les expériences faites à petite échelle ont fourni un zinc à 99,8% de pureté garantie, en partant du zinc obtenu par voie thermique STAS 646 Z, qui contient approximativement 2,1% de plomb.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Muraci, *Sprosvocinic metallurghia po tvetnam.* Moscova, 1949.
2. J. D. Anès, *Chemisch - technische Untersuch ungsmethoden.* Berlin, 1939.
3. Em. Prost, *Métallurgie autre que le fer.* Paris, 1932.
4. E. A. Anderson a. J. L. Rodda, *Constitution of zinc lead alloys.* New-York, 1939.
5. M. Hansen, *Der Aufbau der Zweistofelegierungen.* Berlin, 1941.
6. *Metal Handbook,* Cleveland Ohio, 1939.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

STUDIU ASUPRA DEFECTELOR PISTOANELOR DIN ALIAJE UŞOARE ŞI AMELIORAREA LOR PRIN TRATAMENT TERMIC

DE

GEORGETA DAN

Intrebuinţarea aliajelor uşoare în construcţia diverselor piese de maşini a fost introdusă de multă vreme în industria noastră metalurgică. Piesele fabricate, în cea mai mare parte însă, prezintă defecte uneori destul de grave.

Faptul se datoreşte fie nerespectării condiţiilor de elaborare ori prelucrare mecanică, fie lipsei sau aplicării defectuoase a tratamentelor termice, tratamente care în cazul aliajelor uşoare sunt deosebit de importante.

Ţinând seama de aceste considerente, în cadrul problemei *Metode pentru fabricarea şi ameliorarea aliajelor de aluminiu de turnătorie* dată în studiu de Academia R.P.R., s'au cercetat defectele pistoanelor.

De foarte multe ori, în condiţiile normale de lucru, aceste pistoane se gripează şi se rup în motor pricinuind grave perturbări în exploatare, perturbări care pot merge până la distrugerea completă a motorului.

Aliajul întrebuinţat pentru turnarea pistoanelor este un aliaj uşor, de mare rezistenţă, standardizat sub denumirea AAT 2/1 în STAS 201 şi A L 1 în GOST 2685/44, şi cunoscut în literatură sub denumirea de « aliaj Y ».

Acest aliaj, caracterizat prin păstrarea unor valori ridicate ale rezistenţei şi durităţii la temperaturi înalte, a dat rezultate remarcabile la fabricarea pistoanelor.

Defecte întâlnite la pistoane

In figura 1 se poate observa un piston accidentat şi care prezintă urmele unei gripări puternice cu segmenţii îngropaţi în şanţurile lor. Ruptura s'a produs în dreptul urechilor bolţului. Structura suprafeţei de rupere prezintă un grăunte grosolan.

Materialul turnat este plin de pori vizibili atât cu ochiul liber cât şi la microscop (fig. 2 şi 3).

In figura 5 se pot observa retasuri în fundul interior al pistonului ; în regiunea bolţului, datorită contracţiei într'o regiune insuficient alimentată cu material lichid, structura piesei apare rărită, poroasă, grăuntele pe secţiunea atacată este grosolan.

Porozităţi apar şi în alte regiuni. Astfel, pe suprafaţa eboşată a pistonului se găsesc pori de dimensiuni până la 10 mm.

Aspectul microstructurii se vede în figurile 4, 6 şi 7. Fazele intermediare formează o reţea dendritică aproape continuă, cu aspect de material brut de turnare. Structurile sunt grosolane, prezintă pori şi filamente de oxizi.

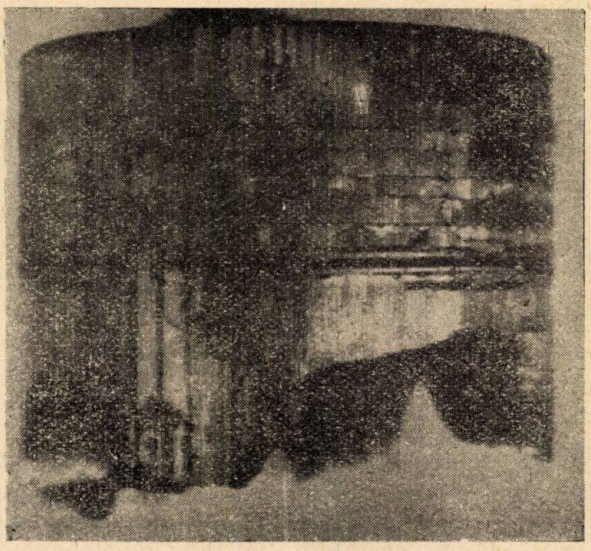


Fig. 1. — Piston gripat. Redus $^1/_4$.

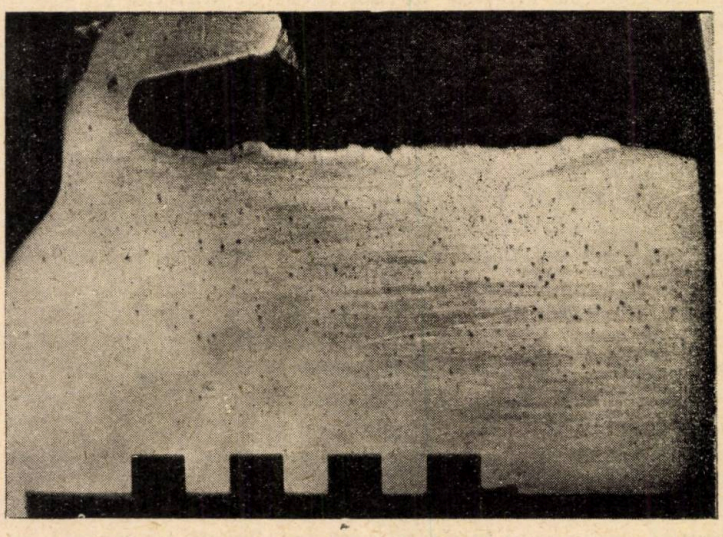


Fig. 2. — Secţiune prin piston. Pori. Mărime naturală.

Structura grosolană face ca proprietăţile mecanice, chiar după un tratament termic bine condus, să nu fie cele care s'ar fi putut obţine dintr'o structură

inițială de turnare fină. Această structură grosolană nu poate fi transformată într'una mai fină printr'o recristalizare ulterioară, fiind vorba de un material turnat și care nu prezintă transformări alotropice.

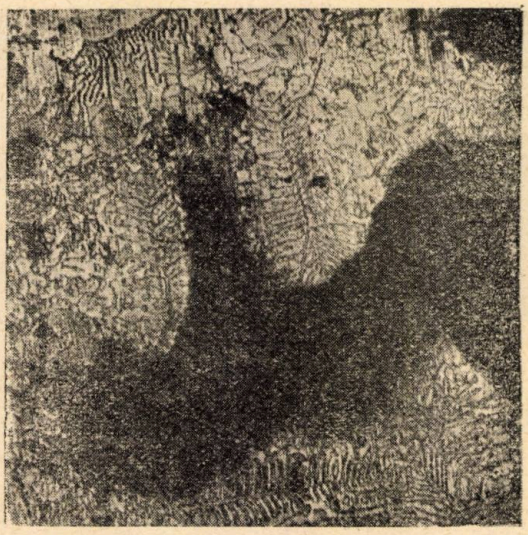


Fig. 3. — Regiunea porilor. Compus definit fragil. × 125.

Fig. 4. — Aspectul general al structurii. Structură grosolană. × 125.

Inafară de mărimea grăuntelui, aspectul fazelor intermediare este caracteristic pentru un tratament insuficient — după cum se va arăta mai departe.

In figura 2 care arată structura în regiunea porilor, se observă o importantă segregaţie de $Fe\,Al_3$, ceea ce demonstrează că structura în acea regiune prezintă caractere de fragilitate deosebită.

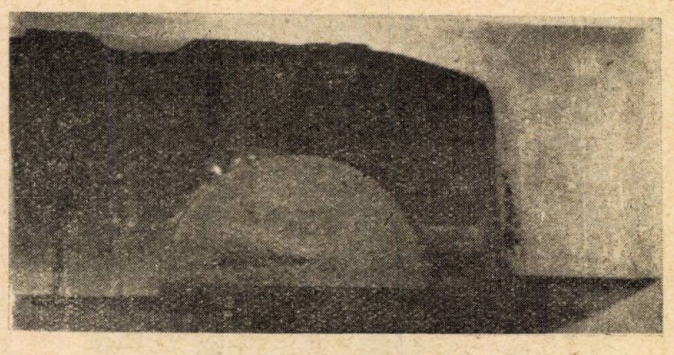


Fig. 5. — Secţiune prin piston. Redus 1/4.

Verificând analiza chimică, s'a constatat că ea nu intră în limitele prescrise pentru aliajul Y.

Cu	8,90%	Mg	0,40%
Ni	1,28%	Si	1,3%
Fe	1,20%	Al	rest.

Conţinutul ridicat de cupru măreşte fragilitatea materialului. Conţinutul scăzut de magneziu influenţează defavorabil proprietăţile de tratament termic

Fig. 6. — Microstructura într'o regiune sănătoasă. Structura grosolană de turnare. × 85.

şi micşorează caracteristicile mecanice ale aliajului la temperaturi ridicate. Siliciul, găsindu-se în proporţie mai mare decât cea corespunzătoare compusului M_{g2} Si (adică, pentru 63,5% Mg, 36,5% Si), va mări fragilitatea aliajului. Conţi-

nutul ridicat în fier este în general dăunător, atât prin faptul că dă loc la formarea compusului Fe Al_3 fragil, cât mai ales datorită faptului că favorizează formarea unui complex care în cantitate mică îngreuează, iar în cantitate mai mare împiedecă obţinerea prin tratament termic a rezultatelor dorite.

In concluzie, în cazul acestor pistoane, nu a fost respectată compoziţia chimică a aliajului; din cauza aceasta, precum şi a condiţiilor de turnare, structura este grosolană şi plină de pori; structura grosolană nu putea, chiar după

Fig. 7. — Microstructura în regiunea bolţului.
Pori şi filamente de oxizi. × 85.

un tratament termic bine condus, să dea caracteristicile mecanice care erau de aşteptat; pe de altă parte, compoziţia chimică nerespectată a dat o structură fragilă asupra căreia tratamentul termic nu putea să aibă influenţe favorabile.

De altfel, în structură (fig. 4 şi 6) nu se observă influenţa tratamentului termic.

Din cele expuse până aci rezultă că pistoanele prezintă o serie de defecte.

Unele defecte provin din procesul de turnare: compoziţie chimică nerespectată, porozităţi, material oxidat, grăunte grosolan. Aceste defecte nu pot fi corectate prin tratament termic, ci numai prin respectarea unor condiţii judicios stabilite pentru turnare.

Alte defecte însă, ca fragilitate, datorită materialului neomogen şi a distribuţiei dendritice în reţea continuă a fazelor intermediare, duritate mică şi în general caracteristice mecanice slabe, lipsă de stabilitate de dimensiuni, pot fi corectate printr'un tratament termic bine condus.

Stabilirea condiţiilor optime de tratament termic constitue obiectul lucrării de faţă.

Aliajul utilizat pentru fabricarea pistoanelor este un aliaj cu bază de aluminiu şi cupru îmbunătăţit, aşa numitul aliaj Y.

Elementele de îmbunătăţire sunt nichelul şi magneziul.

Nichelul adăugat în cantitate mică, 0,5—2%, favorizând formarea unei structuri cu grăunte mic, mărește rezistența la uzură a aliajului, ameliorează rezistența mecanică și ușurează turnarea, împiedecând formarea crăpăturilor.

Adause în cantități mici de magneziu îmbunătățesc calitățile de rezistență și duritate la temperaturi ridicate, și capacitatea de ameliorare a caracteristicilor mecanice prin tratament termic.

Astfel s'a creat o serie de aliaje conținând aluminiu, cupru, nichel și magneziu cu proprietăți mecanice excelente.

Din aceste aliaje, s'a ales, pentrucă întrunește o asociație optimă de proprietăți, aliajul cu următoarea compoziție:

Al	92,5
Cu	4,0
Ni	2,0
Mg	1,5
	100

Acest aliaj are următoarele proprietăți mecanice:

TABLOUL Nr. 1

Caracteristicile mecanice ale aliajului Y

	Netratat		Tratat	
	nisip	formă metalică	nisip	formă metalică
R kg/mm²	15—19	19—23	23—27	24—30
R kg/mm²	14—18	16—18	17—19	20—23
A %	0,3—0,6	0,3—1	0,3—1	0,5—1
Δ Brinell	80—90	90—100	85—100	95—105

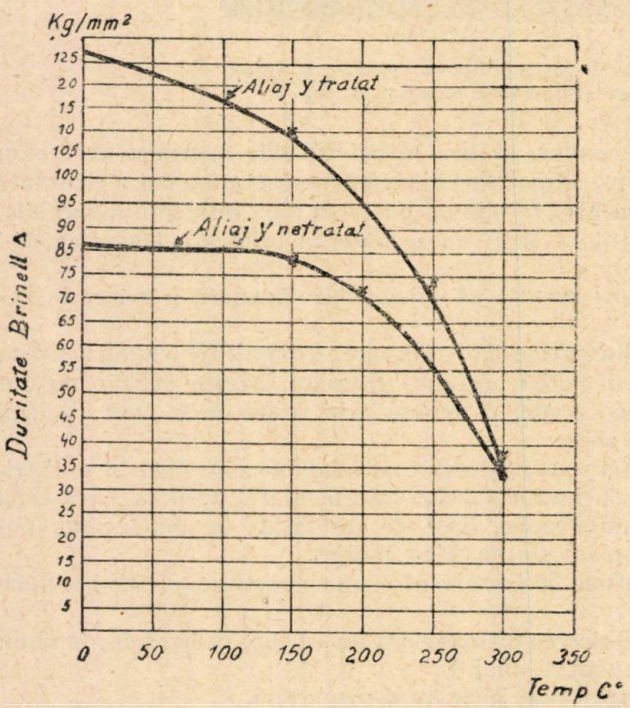


Fig. 8.— Variația durității în funcție de temperatură pentru aliajul Y tratat și netratat.

Caracteristica principală a aliajului Y este comportarea sa deosebit de bună la cald, după cum reiese din diagramele din figurile 8 și 9, care arată influența temperaturii asupra durității Brinell și asupra rezistenței la întindere.

O altă proprietate importantă este rezistența ridicată la oboseală la temperaturi înalte.

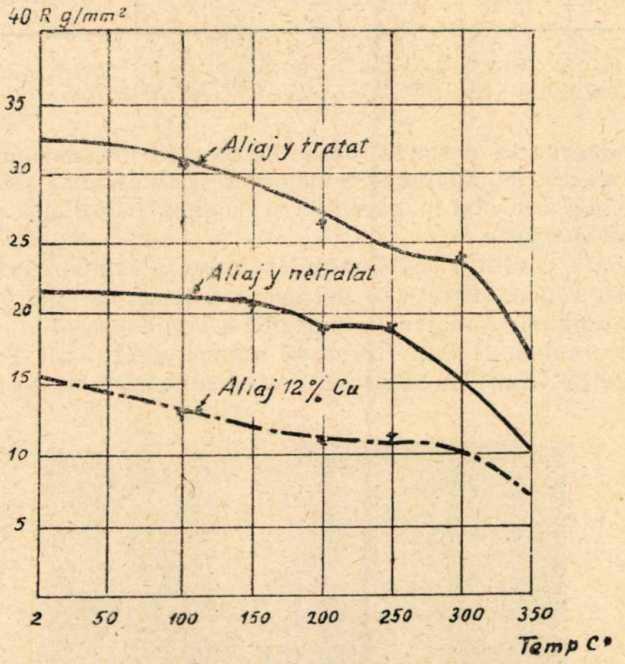


Fig. 9. — Variația rezistenței în funcție de temperatură pentru aliajul Y tratat și netratat.

Din aceste cauze, aliajul se întrebuințează pentru piese care lucrează la temperaturi înalte și în special pentru pistoane, capete de cilindru, culase de motoare, etc.

Aliajul se fabrică pornind dela aluminiu și prealiaje cu bază de aluminiu conținând, respectiv 50% Cu și 20% Ni. Magneziul este introdus în ultimul moment, înainte de turnare. Temperatura băii nu trebue să treacă de 750 °C.

TABLOUL Nr. 2

Proprietățile fizice ale aliajului Y

Greutatea specifică kg/dm³	2,80	(max)
Interval de solidificare °C	635—545	
Conductibilitate termică, unități CGS 100—300°C	0,4	
Coeficient de dilatare termică pe °C	0,000022	
Contracție la turnare, procente	1,29	

Turnarea nu este ușoară și cere oarecare precauții. Alimentarea formei trebue să fie liniștită. De asemenea, din cauza contracției mari de solidificare, maselotele trebue să fie suficient dimensionate.

Aliajul poate fi « îmbătrânit » după tratament termic potrivit, astfel fiind posibilă îmbunătățirea considerabilă a proprietăților mecanice ale pieselor turnate.

In privința compoziției aliajului, normele românești și cele sovietice prevăd următoarele:

TABLOUL Nr. 3

Compoziția aliajului după normele românești și sovietice

	Al%	Cu%	Ni%	Mg%	Si%	Fe %	Zn %	Ti %	Mn%
STAS 201	rest	3—4,2	1,5—2,5	0—1.8	⩽0,6	⩽0,75	⩽0,5	⩽0,15	⩽0,3
GOST 2685	rest	3,75—4,5	1,75—2,75	1,25—1,75	⩽0,7	⩽0,8	—	—	—

Se poate observa că normele românești prevăd un conținut de magneziu dela 0—1,5. In acest fel, aliajul fără magneziu este un aliaj acceptat.

S'a arătat mai sus rolul magneziului și de sigur în stabilirea valorilor date în STAS a fost o scăpare.

Se mai poate constata că toleranțele admise la compoziție sunt mult mai largi la normele românești față de normele sovietice, de unde posibilitatea de a avea spre întrebuințare aliaje de compoziții destul de variate.

In normele românești este trecut ca impuritate titanul Ti $\leqslant$ 0,15. Este știut că adause de titan dau aliajului o structură deosebit de fină, așa încât,

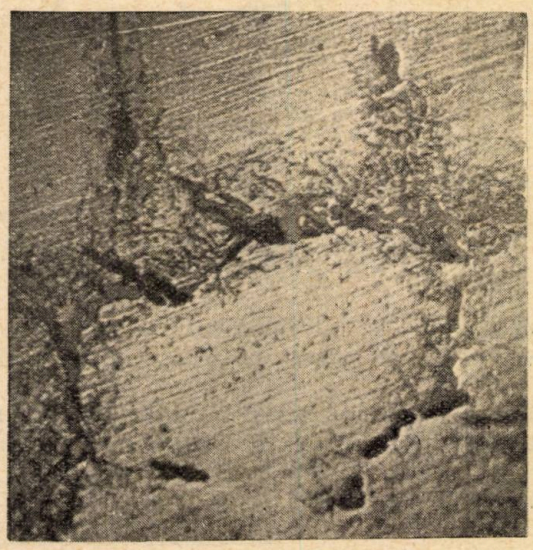


Fig. 10. — Microstructura aliajului Y.
Atac HF 0,5. × 580.

dacă acest element este adăugat, trebue socotit ca un factor de îmbunătățire al aliajului Y.

In *structura aliajului Y* apar o serie de faze intermediare complexe. Compusul definit Cu Al_2 nu există, în schimb în locul lui apare un compus mai complex, de aluminiu cu nichel și cupru, împreună cu compusul Ni Al_3. Compusul Mg_2 Si există însă, și joacă și aici un rol important.

Proprietăţile mecanice superioare ale aliajului Y la temperaturi înalte sunt fără îndoială datorite absenţei compusului Cu Al_2, care formează cu aluminiu un entectic cu punct de topire relativ scăzut, 546°C.

Structura aliajului brut de turnare se vede în figura 15, diverşii compuşi formează o reţea dendritică, aproape continuă cu cantităţi mici de entectic.

La măriri mai puternice (fig. 10 şi 11) se observă compusul complex de aluminiu, cupru şi nichel în semiton, şi compusul Mg_2Si închis pe un fond de aluminiu aproape pur.

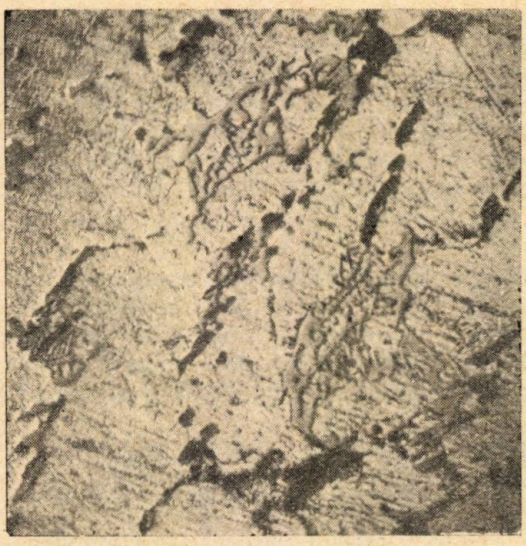


Fig. 11. — Microstructura aliajului Y.
Atac HF 0,5. × 580.

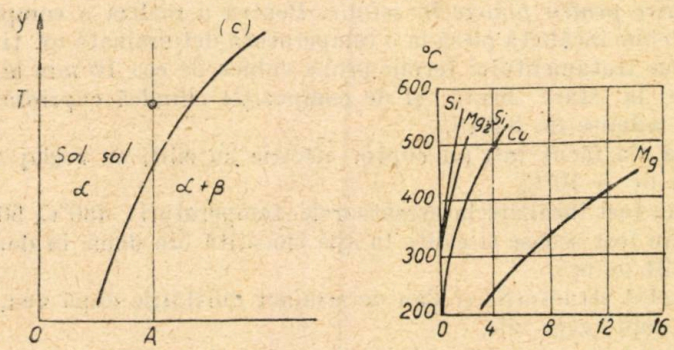


Fig. 12.— Variaţia solubilităţii cu temperatura diverselor metale în aluminiu

Tratamentul termic. Aliajele de aluminiu fie că sunt turnate, fie că sunt prelucrate mecanic, sunt moi şi slabe din punctul de vedere al rezistenţei.

Ele pot fi utilizate în piese supuse la solicitări mai importante numai după un tratament termic.

Tratamentul diferă de cel aplicat oţelurilor. Aluminiul formează soluţii solide cu diverse metale. Astfel, cuprul, magneziul, Mg_2 Si se disolvă în proporţii mici în aluminiu.

Posibilitatea de tratament termic este datorită variaţiei solubilităţii cu temperatura, sau existenţei unei curbe de felul curbei *C* din figura 12.

In prima etapă, prin încălzirea aliajului la temperatură ridicată, diversele elemente sau constituenţi care produc duritatea mărită sunt disolvaţi în stare solidă şi apoi sunt menţinuţi sub această formă prin călire sau răcire rapidă. Acesta este procesul de punere în soluţie.

Contrar celor ce se întâmplă în cazul oţelurilor, prin călire, aliajele de aluminiu se obţin într'o stare relativ moale, existând o tendinţă naturală ca din soluţia solidă suprasaturată să precipite fazele disolvate.

Fenomenul de precipitare se produce încet la temperatura ordinară; dacă temperatura este uşor ridicată, acest fenomen are loc mai repede.

Prin precipitare, aliajele devin mai dure şi mai rezistente.

Duritatea mărită şi proprietăţile fizice ale aliajului îmbunătăţite prin tratament, dacă sunt căpătate la temperatura ordinară, constituesc o îmbătrânire naturală.

Dacă aliajul călit este supus apoi unui tratament la o temperatură uşor ridicată, operaţia este numită îmbătrânire artificială sau revenire.

Nu ne vom ocupa de explicarea fenomenelor de durificare a aliajelor de aluminiu, care este încă mai mult sau mai puţin în stadiu teoretic. Diversele teorii diferă mult una de alta. De altfel, aceasta nici nu intră în cadrul obiectului lucrării de faţă.

Tratamentul termic al aliajului comportă deci:

A) O încălzire pentru punere în soluţie.
B) O răcire rapidă.
C) O evoluţie spontană sau provocată.

Metodele de cercetare întrebuinţate în urmărirea tratamentului termic au fost: microanaliza structurală, duritatea şi pentru probe în care au fost întrunite caracteristici optime, încercări mecanice la întindere.

A. *Incălzire pentru punere în soluţie.* Pentru a realiza o completă punere în soluţie, trebue încălzită piesa la o temperatură determinată un timp anumit.

S'au supus tratamentului termic probe cubice de cca 10 mm latură, tăiate din pistoane în stare brută şi de compoziţie chimică cuprinsă în limitele de toleranţă admise de STAS.

Incălzirea s'a făcut într'un cuptor electric cu silit, cu reglaj automat de temperatură de $\pm$ 10°C.

Probele au fost încălzite la următoarele temperaturi: 480°C, 500°C, 520°C şi 540°C şi au fost scoase şi călite în apă clocotită din două în două ore, dela două ore la 24 de ore.

S'au cercetat structurile şi s'au determinat durităţile după una, două, trei, patru, cinci, opt, zece zile.

S'a constatat că după cinci zile, indiferent de temperatura la care s'a făcut punerea în soluţie, duritatea nu a mai crescut.

Probele supuse tratamentelor au avut durităţi cuprinse între 75—92 unităţi Brinell, determinate cu aparatul Brinell sub sarcina de 500 kg cu bila de 10 mm timp de 15 secunde.

O serie de încercări s'au făcut cu probe cu duritatea cuprinsă între 88—92 unităţi Brinell.

Pentru aceste probe, după călire și îmbătrânire, durităţile maxime în funcţie de temperatură au fost cele reprezentate în diagrama din figura 13.

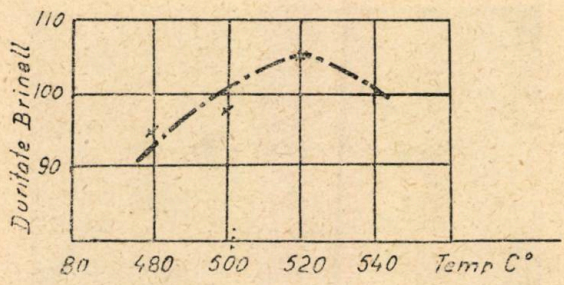


Fig. 13. — Variaţia durităţii după călire şi îmbătrânire naturală în funcţie de temperatura de punere în soluţie.

Aceste valori maxime au fost atinse la diversele temperaturi după durate de încălzire variabile.

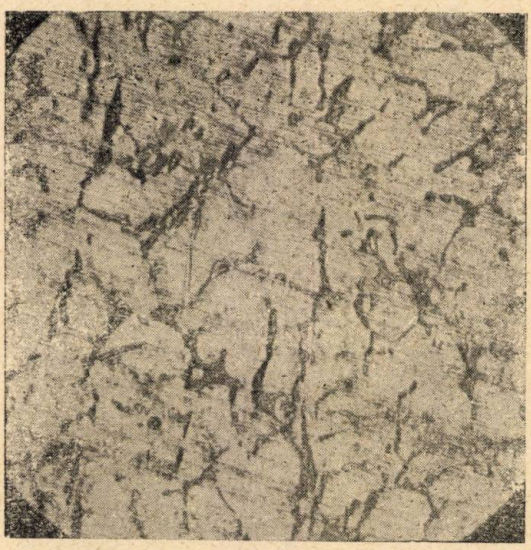


Fig. 14. — Microstructura aliajului turnat. × 100.

Se observă că s'au obţinut valorile maxime pentru încălzirea făcută la 520°. Deci, la acea temperatură, punerea în soluţie a fost cea mai avansată.

TABLOUL Nr. 4

Timpul de încălzire la diverse temperaturi pentru valorile maxime ale durităţii

Temperatura °C.	480°	500°	520	540
Timp ore	24	20	6	2
Duritate Brinell kg/mm²	94	97	104	90

Valorile mai mici obținute pentru temperaturi mai joase rezultă dintr'o incompletă punere în soluție a constituenților activi. Panta acestei curbe nu face decât să traducă alura curbelor de solubilitate.

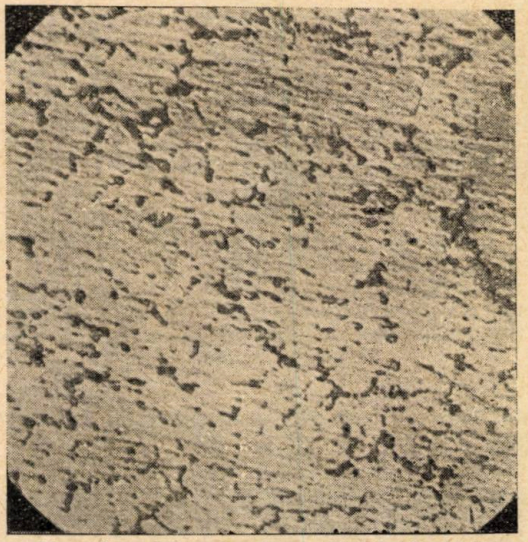


Fig. 15. — Microstructura aliajului încălzit timp de 4 ore la 520° și răcit în apă.

La temperaturi mai înalte scăderea se datorește fuziunii entecticelor complexe care se găsesc la limita dintre grăunți. Se zice că metalul este ars.

Fig. 16. — Microstructura aliajului încălzit 6 ore la 520° și răcit în apă. × 100.

La piesa turnată arsura modifică puțin textura și aspectul produsului. Dar răcirea brutală, impusă de călire unui produs parțial topit, produce foarte multe crăpături micro. copice, care fac ca piesa să fie rebutată.

Incercări de retratare a probelor călite inițial la o temperatură prea joasă, au permis obținerea de valori maxime ale durității și structurii corespunzătoare unui tratament just.

Pe de altă parte, încercări de retratare de probe tratate la temperaturi prea înalte, cu început de fuziune, nu au dat vreun rezultat pozitiv.

Din încercările de mai sus, rezultă că durata optimă de încălzire depinde de temperatură.

Pistoanele care se supun tratamentului, fiind în stare brută de turnare, au o structură neomogenă, prezentând microsegregații dendritice, datorită procesului de solidificare. Pentru aceasta este necesară o încălzire de durată suficient de mare, care să permită difuziunea în stare solidă a elementelor mai fuzibile spre centrul grăunților. Difuziunea se face cu atât mai repede, cu cât grăunții sunt mai mici. De aici rezultă interesul unei răciri rapide în cursul solidificării.

Pe de altă parte, mărimea grăuntelui va determina durata de încălzire.

Repetând încercările de punere în soluție la temperatura pentru care s'au obținut rezultatele optime cu probe de grăunte mai grosolan, respectiv cu durități medii 82 și 75, s'a constatat că valorile optime s'au obținut pentru durate de încălzire mai lungi, după cum se vede în tabloul Nr. 5.

TABLOUL Nr. 5

Valorile durității pentru alte mărimi de grăunte

Duritate Brinell kg/mm² înainte	Timpul ore (optim)	Duritate Brinell kg/mm² după
82	8	88
75	12	83

Din aceste încercări se vede influența mărimii grăuntelui pentru obținere de rezultate optime.

Pe de altă parte, printr'o încălzire mai lungă decât aceea necesară obținerii proprietăților optime, nu s'a observat o micșorare a acestor valori. Acest lucru este ușor de explicat datorită faptului că, fiind vorba de piese turnate, grăuntele piesei nu este modificat apreciabil prin încălzire; după călire, el păstrează dimensiunile de după solidificare.

Rezultatele obținute prin măsurători de duritate sunt confirmate prin studiul micrografic.

Schimbările în microstructură care au loc în timpul procesului de încălzire se văd în figurile 14, 15, 16, 17 și 18.

Microfotografia din figura 14 arată structura piesei turnate la mărimea 100, corespunzând unei durități Brinell de 90 kg/mm². Rețeaua compușilor este clar vizibilă.

După o perioadă de încălzire de 4 ore la 520°, microstructura s'a schimbat, după cum se vede în figura 15, la aceeași mărire ca în cazul precedent. Se poate observa că rețeaua netă și continuă din figura 14 a început să dispară și să se rupă din loc în loc. Această schimbare este încă mai vizibilă cu cât timpul de încălzire este mai mare.

Stadiul final, după 6 ore de încălzire, se vede în figura 16. Structura în reţea abia mai este vizibilă şi fazele intermediare prezente în aliaj s'au globulat în cea mai mare măsură.

Fig. 17. — Aceeaşi microstructură × 240.

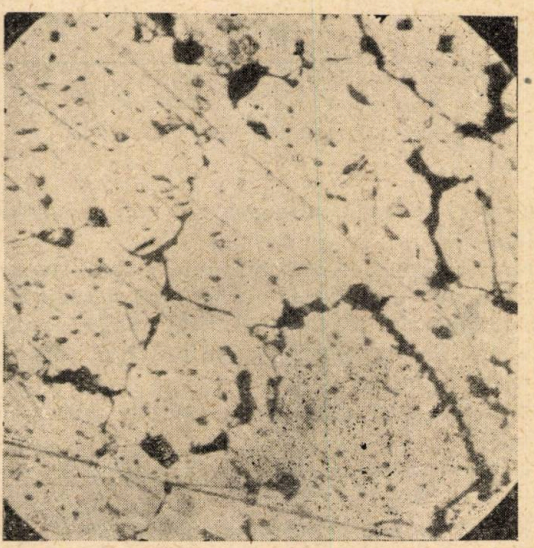


Fig. 18. — Microstructura aliajului încălzit 2 ore la 540° şi răcit apă . × 240.

Figura 17 reprezintă aceeaşi structură la × 240.

In figura 18 este arătată microstructura aliajului tratat la 540°. Se observă că materialul a fost supraîncălzit; liniile curbe la limita dintre grăunţi arată începutul topirii.

B. *Răcirea.* Soluția solidă în cursul răcirii nu trebue să lase să se precipite nimic din constituenții puși în soluție prin încălzire. In acest caz, efectul ar fi analog celui menționat mai sus al unei puneri în soluție incomplete și caracteristicile mecanice rezultate ar fi mai slabe.

In cazul pistoanelor — piesa fiind de dimensiuni mari și cu secțiuni variabile — răcirea trebue făcută în apă clocotită pentru a reduce la minimum tensiunile reziduale.

Piesa încălzită la 520°, introdusă în apă, dă naștere fenomenului de calefacție. Calefacția trebue redusă la minimum prin agitare puternică, lovindu-se piesa de pereții bacului de răcire. Piesa nu se scoate până nu atinge temperatura băii.

Este evident faptul că răcirea în apă rece corespunde unei păstrări mai complete a constituenților activi în soluție. Intr'adevăr, prin călirea în apă rece a unei probe cubice s'a realizat o înmuiere corespunzătoare la 70 unități Brinell, dar piesa a crăpat.

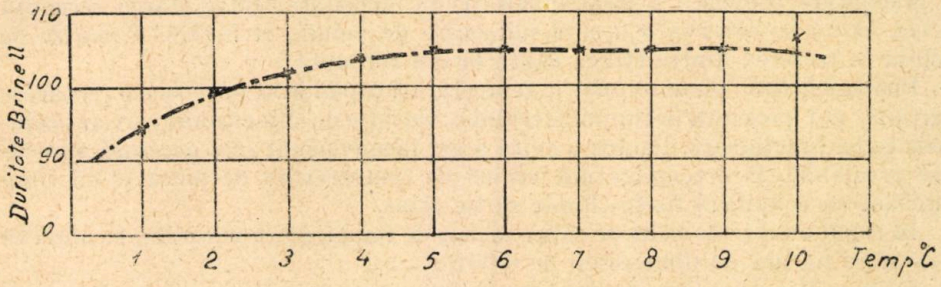


Fig. 19. — Curba de îmbătrânire a aliajului după încălzire la 250° timp de 6 ore în apă clocotită.

Cu atât mai mult pistoanele nu pot fi răcite în apă rece.

Manipularea între cuptor și bacul de răcire trebue să se facă repede. Maximul de timp care nu produce scăderi în caracteristicile mecanice este 20 de secunde.

C. *Revenirea.* Proprietățile mecanice depind de tratamentul de după călire.

Probele de aliaj Y călite, după depozitare timp de cinci zile la temperatura ordinară, ating valorile maxime pentru proprietățile mecanice.

Evoluția spre starea de echilibru este cu atât mai rapidă, cu cât temperatura este mai ridicată. Dar spre deosebire de temperatura ordinară unde nu riscăm să scadă valorile diverselor proprietăți mecanice, la temperaturi ridicate — după un timp mai lung — se poate produce o recoacere, deci o scădere a proprietăților mecanice.

Incercări de revenire făcute la temperaturi ridicate au dat următoarele valori maxime ale durității.

TABLOUL Nr. 6

Duritatea în funcție de temperatura de revenire și timp

Temperatura °C	Timp ore	Duritate Brinell kg/mm²
100	72	105
150	24	110
200	12	115
225	3	115
250	1	118

Incercările s'au făcut pe probe cubice de 10 mm latură, încălzite în etuve cu reglaj automat de ± 10°C.

Pentru valori mai mari ale timpului decât cele din tabloul Nr. 6, duritatea scade.

Din datele de mai sus reiese că valorile optime sunt obţinute printr'un tratament de 12 ore la 200°C.

La această temperatură, nici după o încălzire de 50 de ore, duritatea nu a scăzut.

Temperatura de 200° este uşor de realizat practic într'o baie de ulei, iar durata operaţiei este sensibil mai scăzută decât la 150°C.

Schimbările structurale care au loc în timpul îmbătrânirii nu au putut fi observate la microscop.

Mărimea efectivă a particulelor precipitate a fost pusă în evidenţă la microscopul electronic.

Revenire pentru stabilitate de dimensiuni. Fenomenul de punere în soluţie şi precipitare provoacă o uşoară variaţie de densitate. Intre starea recoaptă şi cea călită se observă o uşoară micşorare de volum, şi invers, o mărire de volum în trecerea dintre starea călită la cea recoaptă.

Pistoanele fiind piese expuse la temperaturi capabile să provoace o recoacere parţială, pot prezenta în timpul lucrului o variaţie de dimensiuni care ar prejudicia buna funcţionare. Pentru a evita acest inconvenient este necesară o încălzire prealabilă, la o temperatură vecină de temperatura de lucru şi un timp suficient ca echilibrul fizico-chimic să fie atins.

In cazul unui tratament de călire urmat de îmbătrânire naturală, se observă o creştere lineară de dimensiuni de 0,06%.

Probe călite şi revenite la 200° timp de 12 ore, nu au arătat creştere de volum.

CONCLUZIUNI

Din cele arătate mai sus, rezultă diagrama corectă de tratament termic. (fig. 20).

Pistoanele trebue încălzite timp de 8 ore la 520°, răcite în apă clocotită şi revenite la 200° timp de 12 ore.

Timpul de încălzire la temperatura de 520° este suficient pentru o punere în soluţie chiar în structuri grosolane.

Răcirea în apă clocotită produce tensiuni mici în piesă, tensiuni ce nu pot produce crăpături.

Revenirea este suficientă ca să asigure stabilitate de dimensiuni fără o scădere apreciabilă a durităţii.

Structura pieselor astfel tratate este cea din figurile 16 şi 17.

Caracteristicile mecanice sunt:

Duritate = 104 unităţi Brinell;

Rezistenţa la rupere = 29 kg/mm²;

Alungire = 0,9%.

In efectuarea operaţiilor de tratament termic în atelier trebue acordată o deosebită atenţie echipamentului necesar, aceasta mai ales pentrucă temperaturile întrebuinţate sunt joase şi nu este uşor să se asigure uniformitatea absolută. Pe de altă parte, trebue să se ţină seama că tratamentul în prima fază la temperaturi mai ridicate are loc cu cca 20°C sub punctul de început de fuziune al aliajului. Supraîncălzirea deci, poate fi evitată numai prin precizia de control a temperaturilor.

De primordială importanţă pentru obţinerea efectelor dorite prin tratamentul termic în aliajele de aluminiu sunt: respectarea compoziţiei chimice a aliajului, macroomogeneitatea şi piese sănătoase.

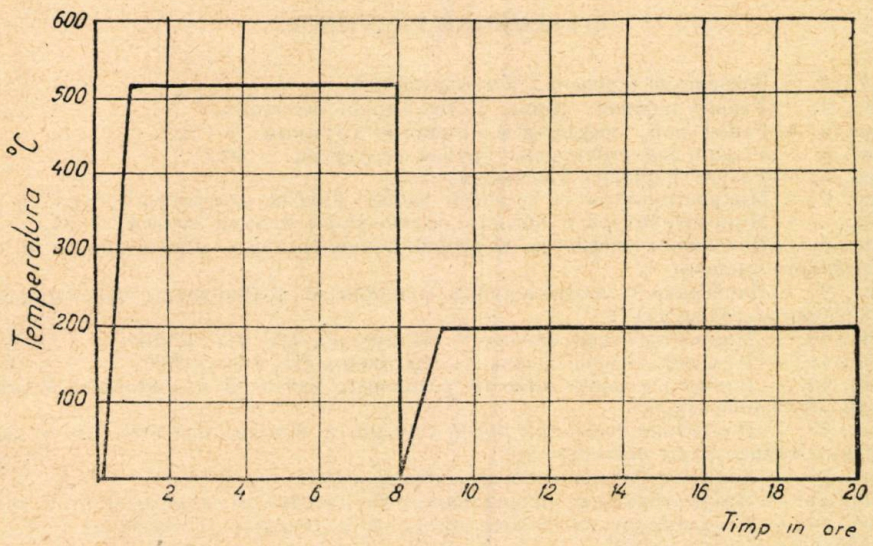


Fig. 20. — Diagramă de tratament termic pentru pistoane de automotoare turnate din aliaj Y.

Inafară de aceasta, mărimea grăuntelui influenţează durata diverselor etape ale tratamentului termic pentru obţinerea de proprietăţi optime, iar proprietăţile optime posibile într'un aliaj de compoziţie justă, omogen şi sănătos sunt legate de un grăunte fin.

ИЗУЧЕНИЕ ПОРОКОВ ПОРШНЕЙ ИЗ ЛЕГКИХ СПЛАВОВ И ИХ УЛУЧШЕНИЕ ПОСРЕДСТВОМ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исследование дефектов поршней изготовленных из алюминиевых сплавов типа Y (4% Cu, 2% Ni, 1,5% Mg) показало, что путем применения соответствующих термических обработок можно избегнуть неоднородность и распределение промежуточных фаз в дендритной решетке, снижение твердости и вообще механические свойства, а также нестабильность размеров.

Установлены оптимальные условия термической обработки микрографическим исследованием, пополненным измерениями твердости и для конечных проб механическим испытанием на растяжение.

Диаграмма термической обработки состоит в нагревании до 520° в течение 8 часов для гомогенеизации структуры и перевода в раствор активных компонентов с последующей закалкой в горячей воде. Отпуск

осуществляется при 200° в течение 12 часов ; таким образом обеспечивается стабильность размеров поршней без значительного снижения твердости.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Заеденный поршень. Уменьшено 1/4.
Рис. 2. — Разрез поршня. Поры. Естественная величина.
Рис. 3. — Район пор, соединение признано хрупким. × 125.
Рис. 4. — Общий вид структуры. Грубая структура. × 85.
Рис. 5. — Разрез поршня. Уменьшено 1/4.
Рис. 6. — Микроструктура в здоровой части. Грубая структура чугуна. × 85.
Рис. 7. — Микроструктура в области болта. Поры и нити окисей. × 85.
Рис. 8. — Изменения твердости в функции температуры обработанного и необработанного сплава Y.
Рис. 9. — Изменение сопротивления в функции от температуры обработанного и необработанного сплава Y.
Рис. 10. — Микроструктура сплава Y. Протравка HF 0,5. × 580.
Рис. 11. — Микроструктура сплава Y. Протравка HF 0,5. × 580.
Рис. 12. — Изменение растворимости различных металлов в алюминии в зависимости от температуры.
Рис. 13. — Изменение твердости после закалки и естественное старение в зависимости от температуры растворения.
Рис. 14. — Микроструктура отлитого сплава. × 100.
Рис. 15. — Микроструктура сплава нагретого до 520° и охлажденного в воде.
Рис. 16. — Микроструктура сплава нагретого в течение 6 часов до 520° и охлажденного в воде. × 100.
Рис. 17. — Та же микроструктура. × 240.
Рис. 18. — Микроструктура сплава нагретого в течение 2 часов до 540° и охлажденного в воде. × 240.
Рис. 19. — Кривая старения сплава после нагрева до 250° в течение 6 часов в кипятке.
Рис. 20 — Диаграмма термической обработки поршней отлитых из сплавов для автомоторов.

ÉTUDE SUR LES DÉFAUTS DES PISTONS EN ALLIAGES LÉGERS ET LEUR AMÉLIORATION PAR TRAITEMENT THERMIQUE

(RÉSUMÉ)

L'étude des défauts des pistons en alliages légers à base d'aluminium (type Y Cu 4%, Ni 2%, Mg 2,5%) montre que la structure hétérogène, les formes dendritiques des phases intermédiaires, la diminution de la dureté et d'une manière générale celle des proprietés mécaniques, aussi bien que l'instabilité des dimensions, peuvent être évitées par des traitements thermiques appropriés.

Les conditions optimes du traitement thermique ont été établies par des études micrographiques, complétées par des mesures de la dureté et, pour le contrôle final, à l'aide d'essais mécaniques de traction.

Le diagramme de traitement thermique implique un recuit de 8 heures à 520°C, qui réalise l'homogénéisation structurale et la mise en solution des constituants actifs. Ce recuit est suivi d'une trempe à l'eau chaude et d'un revenu de 12 heures à 200°C. Cette dernière opération assure la stabilité des dimensions sans diminution sensible de la dureté.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Piston grippé. Réduit 1/4.
Fig. 2. — Section à travers le piston. Pores. Grandeur nature.
Fig. 3. — Région des pores, composé défini fragile. × 125.
Fig. 4. — Aspect général de la structure. Structure grossière. × 85.
Fig. 5. — Section à travers le piston. Réduit 1/4.
Fig. 6. — Microstructure d'une région saine. Grossière structure de coulée. × 85.
Fig. 7. — Microstructure dans la région de l'axe (du boulon). Pores et filaments d'oxydes. × 85.
Fig. 8. — La variation de la dureté en fonction de la température pour l'alliage Y traité et non traité.
Fig. 9. — La variation de la résistance en fonction de la température pour l'alliage Y traité et non traité.
Fig. 10. — Microstructure de l'alliage Y. Attaque au H F 0,5. × 580.
Fig. 11. — Microstructure de l'alliage Y. Attaque au H F 0,5. × 580.
Fig. 12. — La variation de la solubilité avec la température pour les divers métaux, dans l'aluminium.
Fig. 13.—La variation de la dureté après la trempe et le vieillissement naturel en fonction de la température de la mise en solution.
Fig. 14. — La microstructure de l'alliage coulé. × 100.
Fig. 15. — La microstructure de l'alliage chauffé pendant 4 heures à 520° et refroidi dans l'eau.
Fig. 16. — La microstructure de l'alliage chauffé pendant 6 heures à 520° et refroidi dans l'eau. × 100.
Fig. 17. — La même microstructure. × 240.
Fig. 18. — La microstructure de l'alliage chauffé pendant 2 heures à 540° et refroidi dans l'eau. × 240.
Fig. 19. — Tracé du vieillissement de l'alliage après la chauffe pendant 6 heures à 520° et rafraîchissement dans l'eau bouillante.
Fig. 20. — Diagramme du traitement thermique pour les pistons pour automoteurs en alliage Y coulé.

BIBLIOGRAFIE

1. G. A. Caşenco, *Bazele metalografiei*. Metalurghizdat, Moscova, 1949.
2. Comitetul pentru turnarea metalelor neferoase, *Manual pentru turnarea aluminiului*. Oboronghiz, Moscova, 1940.
3. P. I. Baranov, *Rafinarea şi topirea aliajelor de aluminiu de turnătorie*, Oboronghiz Moscova, 1949.
4. I. E. Tutov, *Cercetări asupra efectului duratei de încălzire în tratamentul termic a aliajelor de aluminiu*. Metalurgist, Moscova, 1936, (6), p. 83—91.
5. W. O. Croenig şi A. S. Ball, *Tratamentul termic pentru pistoane de aeroplane turnate*. Trudî Vsesoiuznovo Naucino - Issledovatescovo Instituta Aviaţionic Materialov, 1935, (28), p. 60.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3–4, 1952

STUDIU ASUPRA TURNĂRII ÎN TIPAR METALIC A PISTOANELOR TIP AUTO

DE

ADRIAN HUBER

La noi în ţară au început, să se fabrice tot felul de piese de schimb pentru automobilele existente.

Astfel, pe lângă atelierele mari de reparaţii auto au luat naştere mici turnătorii cu utilaj improvizat şi în care folosindu-se experienţa foarte redusă a unui personal necalificat s'au fabricat piese cu totul necorespunzătoare.

Dintre aceste piese de schimb, pistoanele sunt organe importante; dat fiind modul lor de funcţionare, materialul din care sunt fabricate trebue să satisfacă unele prescripţiuni bine definite.

Cererea de pistoane fiind mare şi aliajele de aluminiu topindu-se cu uşurinţă, fabricanţi de ocazie, lacomi de un câştig uşor, au improvizat cuptoare simple în solul atelierelor, topind aliajul în diverse oale de fontă de analiză indiferentă.

In astfel de ateliere, asemănându-se turnarea aliajelor uşoare cu turnarea fontei, diversele condiţii, ca nisipul întrebuinţat, răcirea şi controlul de temperatură fiind necorespunzătoare, şi rezultatele obţinute nu au fost cele aşteptate.

Utilajul folosit chiar şi acum pentru turnarea pistoanelor este constituit dintr'o ţeavă de oţel de secţiune apropiată cu diametrul exterior al pistonului, montată pe o placă metalică în care se aşează un miez de nisip. Turnarea se face prin simpla vărsare a aliajului de aluminiu, dintr'o lingură de fier, peste miez, în interiorul tiparului, care în acest caz este ţeava. Atât gazele care se degajă din metalul topit cât şi gazele care se degajă din miezul de nisip, care are ca liant o substanţă organică, rămân în materialul lichid până la turnarea completă a pistonului. De abia atunci gazele încep să se ridice către partea superioară, ajungând în regiuni solidificate. Este firesc ca aceste gaze care nu părăsesc piesa să se găsească sub formă de sufluri răspândite în piston.

Acestor defecte, provenite dintr'un tipar necorespunzător, li se adaugă o serie întreagă de defecte ce se datoresc materialului — care, de cele mai multe ori, este necorespunzător ca analiză chimică — precum şi unei elaborări defectuoase, cu supraîncălziri de material, cuptoare nepotrivite, etc.

Materia primă este înlocuită din spirit de economie prost înţeles cu deşeuri găsite la întâmplare. Nu toată lumea este convinsă că pistoanele, spre deosebire

de alte piese obținute prin turnare, trebue turnate din materie primă nouă. Această necesitate este justificată de faptul că din material vechi se obține o granulație grosolană și că la aliajele ușoare, în general, după turnare, pot interveni fenomene de recoacere (îmbătrânire) etc. care nu se întâlnesc la alte aliaje.

Chiar dacă se toarnă pistoane din materie primă nouă, se pot face greșeli dacă se introduc elementele fără a se ține seama de folosirea prealiajelor și de ordinea punctelor de topire. Este deci necesară o încălzire de lungă durată la temperatură înaltă.

In lucrarea de față am căutat să înlăturăm toate aceste desavantaje.

I. ALIAJE UȘOARE PENTRU PISTOANE

Ținând seama de condițiile speciale în care lucrează un piston într'un motor, materialul trebue să îndeplinească tocmai condițiile necesare pentru a putea fi utilizat cu succes. Condițiile cerute în general pentru pistoane sunt: rezistență mare, duritate mare, coeficient de dilatație cât mai mic, coeficient de conductibilitate termic cât mai ridicat, pentru a putea transmite căldura din fundul camerei de explozie.

Din întreaga serie de aliaje ușoare pe bază de aluminiu, vom analiza pe cele mai caracteristice.

Aliajele de pistoane se pot grupa în două categorii, după elementul care se găsește în proporția cea mai mare în aliaj; deosebim aliaje cu procent ridicat de cupru și aliaje cu procent ridicat de siliciu.

Aliajele de aluminiu cu procent ridicat de cupru se prezintă ca aliaje cu proprietăți bune de turnare, având rezistențe foarte bune, alungiri sub 1%, duritate considerabilă depășind de regulă 100 HB. Aceste aliaje pot fi tratate termic îmbunătățindu-se proprietățile mecanice în mod considerabil. Desavantajul principal al acestor aliaje este că au coeficient de dilatare lineară ridicat (22.10^6). Ca valoare este dublu față de coeficientul de dilatație lineară al fontelor ($10—12.10^6$). Este cunoscută temperatura din fundul pistonului, care ajunge în jurul lui 300°. Dacă acest coeficient este ridicat, atunci pistonul se dilată prea mult, putând înțepeni în cilindru.

Aliajele de aluminiu cu procent ridicat de siliciu au proprietăți de turnare foarte bune, fiind aliaje excepțional de fluide în stare topită. Proprietățile mecanice sunt foarte bune. Au coeficienți de dilatare lineară foarte scăzuți, cuprinși în general în jurul lui 18.10^6. Aceste aliaje au luat o desvoltare foarte mare în ultimul timp, impunându-se ca aliajele cele mai bune pentru confecționarea pistoanelor.

Aliajele cu conținut de 13% Si sunt folosite în general ca material de pistoane pentru toate tipurile de motoare. Aceste aliaje se pretează foarte bine nu numai la turnare, dar și la presare, putându-se obține pistoane forjate sau presate pentru motoare de avion.

Aliajele care au un conținut de siliciu cuprins între 14—21% sunt numite hipersilicioase. Ele au coeficient foarte scăzut de dilatație, din care cauză sunt bune pentru motoare în doi timpi pentru tractoare și motoare Diesel.

Pentru lucrarea de față, am ales un aliaj cu procent ridicat de siliciu și anume de tipul « Lo-Ex ». Analiza chimică a acestui aliaj este următoarea:

$$Si = 12\%; Cu = 1\%; Mg = 1\%; Ni = 1\%; Al = rest$$

Este un aliaj cu proprietăţi mecanice foarte bune la temperatură. Acest aliaj este mult utilizat datorită faptului că are coeficient de dilataţie foarte redus (18.10^{-6}). Proprietăţile de turnare sunt foarte bune, fiind fluid şi fără tendinţe de porozităţi şi crăpături. Avantajul deosebit de important pe care-l prezintă acest aliaj, ca de altfel toate aliajele cu conţinut ridicat de siliciu, este evitarea tratamentului termic, care nu mai este necesar. Se reduce astfel procesul tehnologic de fabricare şi totodată eventualele greşeli ce ar putea surveni, din diferite motive, la acestă operaţie.

Se poate înlătura tratamentul termic ulterior turnării prin introducerea unei tratări a metalului în stare lichidă, operaţie care se numeşte îmbunătăţire. Pentru aceasta, se ridică temperatura la 850° şi se introduce 0,05% din cantitatea băii metalice, sodiu metalic. Deoarece pierderile prin ardere de sodiu sunt foarte mari, procentul care se introduce este mai ridicat. Această îmbunătăţire se aplică pentru ameliorarea proprietăţilor mecanice, pentru micşorarea granulaţiei, obţinând o structură fină a eutecticului.

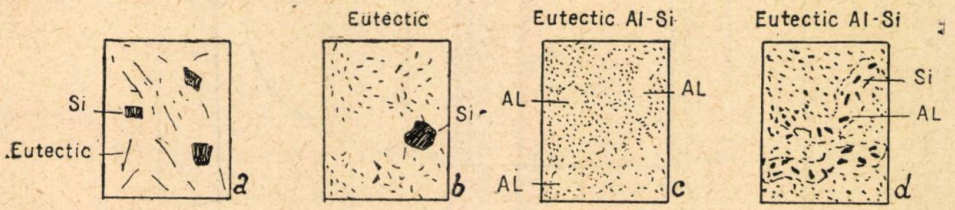


Fig. 1

a) Structură neîmbunătăţită; în massa de coloare deschisă a aluminiului sunt prinse cristale albastre-cenuşiu de siliciu. Eutecticul este acicular. *b)* Structură îmbunătăţită incomplet. Eutecticul este mult mai fin, dar mai găsim cristale mari izolate de siliciu. *c)* Structură îmbunătăţită corect. Eutecticul este foarte fin, grăunţi rotunziţi; cristale primare de aluminiu dentritice, multe şi bine conturate. *d)* Structură îmbunătăţită prea mult. Cristale de aluminiu de coloare deschisă în care cristalele de siliciu sunt mai mari decât în eutectic.

Datorită faptului că ferosiliciu cu un procent ridicat de siliciu (98%), nu se găseşte, încercările cu acest aliaj sau cu aliaje din această categorie nu s'au putut face.

Ferosiliciul utilizat a avut un conţinut de 76% Si, restul fiind fer.

S'au observat în structura aliajului cristale mari aciculare, caracteristice unui compus chimic ternar, Al—Si—Fe.

Am ales atunci ca material pentru experimentarea tiparului metalic aliaje cuprinse în grupa aliajelor cu conţinut de cupru şi anume, aliajul cunoscut şi întrebuinţat foarte mult în Uniunea Sovietică Al 1, care în literatura străină poartă numele de « Y ». Compoziţia chimică este:

$$Cu = 4\%; Ni = 2\%; Mg = 1{,}5\%; Al = rest.$$

Coeficientul de dilatare lineară este 23.10^{-6}. Proprietăţile de turnare ale acestui aliaj nu sunt din cele mai bune.

De asemenea, s'a mai ales pentru experimentare un aliaj, care în literatura sovietică se încadrează în grupa Al 12. Compoziţia chimică este:

$$Cu = 10\%; Mg = 0{,}3; Al = rest.$$

Coeficientul de dilataţie lineară este 22.10^{-6}. Acest aliaj se toarnă foarte bine.

II. CONSTRUCŢIA TIPARULUI METALIC

La proiectarea tiparului metalic s'a avut în vedere principiul turnării pe o culea, care are forma unui gât de lebădă, alimentarea piesei fiind asigurată în partea cea mai joasă.

Tiparul metalic este astfel construit încât să se toarne pistoanele cu miez de nisip. Acest principiu de turnare este cel mai răspândit astăzi la noi în ţară.

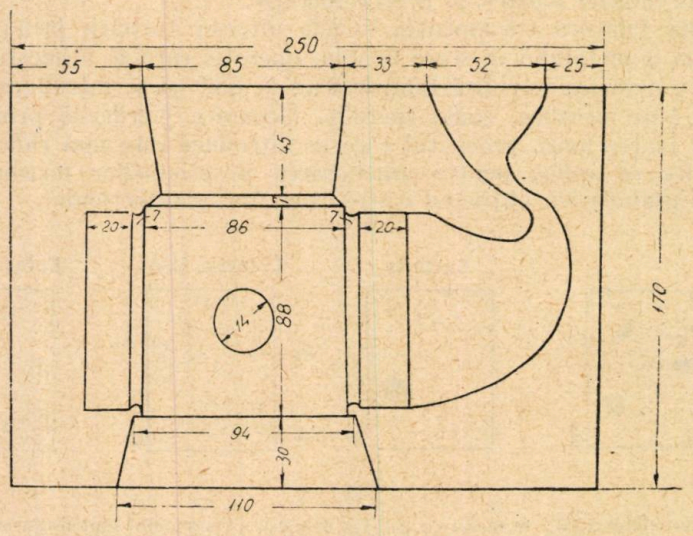


Fig. 2

Partea cea mai solicitată şi în acelaşi timp cea cu grosimea mai mare este capul pistonului. Acesta face compresia şi deci trebue să fie dintr'un material cât mai dens, fără porozităţi. Tot acest cap al pistonului lucrează la temperatura cea mai mare.

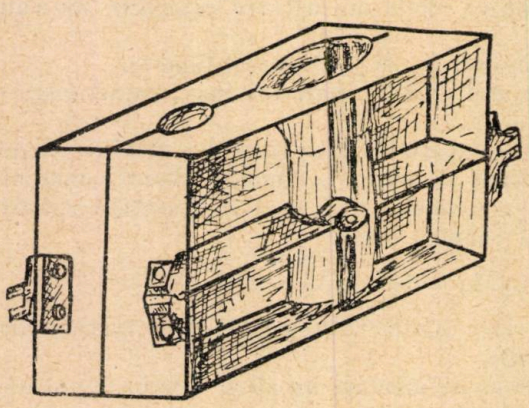


Fig. 3

Faţă de celelalte părţi ale pistonului, capul pistonului este cu secţiunea cea mai groasă, făcând legătura cu corpul pistonului, care are o secţiune mult mai mică. Datorită acestui fapt, această zonă de trecere este foarte periculoasă, aici localizându-se crăpături datorită contracţiei.

Pentru asigurarea unei porţiuni compacte s'a plasat deasupra lui o maselotă puternică, cu un volum de material mai mare decât volumul capului de piston, asigurând astfel o răcire normală şi o alimentare continuă cu material cald a pistonului care se solidifică.

Gâtul de lebădă prin care se toarnă metalul este aşezat pentru a împiedeca eventuala bolboroseală, cu pericolul formării peliculei de oxizi şi antrenarea ei în piesă, ce s'ar produce la turnarea aluminiului.

Intrările la piston atât la partea din spre culea, cât şi la partea din spre maselota oarbă sunt de 7 mm, suficient pentru a nu permite o îngheţare a acesteia şi o funcţionare anormală a celor două maselote laterale, maselota oarbă şi îngroşarea în formă de maselotă dela culea având rolul de a alimenta cu material cald secţiunile subţiri în timpul solidificării şi de a împiedeca crăparea acolo unde secţiunile dela fustă la capul pistonului sunt diferite.

Secţiunea acestor două maselote laterale este hexagonală, pentru a permite o mai bună evacuare a pistonului turnat din tiparul metalic.

Sub tiparul pistonului propriu zis, tiparul metalic este prevăzut cu o marcă necesară fixării miezului în tiparul metalic, pentru a asigura menţinerea miezului tot timpul turnării în poziţie corectă.

Materialul din care este turnat tiparul metalic este o fontă cu următoarea analiză chimică:

C grafit = 2,76%	Si = 2,0%;	P = 0,8%
C combinat = 0,89%	Mn = 0,3%;	S = 0,7%

Pământul de miez folosit la turnarea pistoanelor are următoarea analiză:

95% nisip de cuarţ Văleni
2% argilă
2% ulei de in
2% dextrină

Permeabilitatea la crud şi uscat este foarte mare, ajungând la 100. Rezistenţa la compresiune şi forfecare este importantă.

Pistonul care a fost ales pentru lucrarea de faţă este un piston de motor Ford de 95 C. P. care are următoarele cifre de control: duritatea 100—120 kg/mm², rezistenţa la tracţiune 20 kg/mm² iar alungirea, 0,5%.

III. ELABORAREA ŞI TURNAREA ALIAJULUI

In general, problema aliajelor de aluminiu prezintă ca dificultate obţinerea unui aliaj sănătos, care să nu fie oxidat sau gazat.

Cuptoarele care se recomandă pentru topirea aliajelor de aluminiu pentru pistoane sunt cele basculante cu creuzet de capacitate cca 60—100 kg maximum, pentru a nu fi obligaţi să menţinem metalul mult timp în stare lichidă. Se pune tot mai mult accentul pe cuptoare basculante, pentru a se putea turna direct lichidul în tiparul metalic, evitându-se de a-l mai agita cu diferite linguri de oţel pentru a-l scoate din creuzet. Totodată, pelicula de oxizi care se formează la suprafaţa metalului şi care în timpul topirii protejează baia, poate fi ruptă de lingură şi apoi introdusă în presă, fapt care nu se poate întâmpla la turnarea directă din cuptor în tiparul metalic. Creuzetele care se recomandă sunt cele din grafit, iar când acestea nu sunt accesibile, se pot face din fontă, care trebue să fie însă refractară. Se recomandă ca analiză pentru fonte de creuzet:

C total = 3,5%	Mn = 0,8%	Cr = 2%	S max = 0,15%
C combinat = 0,4%	Si = 2,25%	P max = 0,5%	

Nu se vor folosi oale de fontă, pentru topirea şi elaborarea aliajelor de aluminiu, cu conţinut de siliciu, cum este siluminul, deoarece acestea atacă fonta.

Dacă se folosește oala din fontă, trebue supraveghiată tot timpul temperatura, deoarece la temperatură ridicată fonta permite trecerea gazelor, putând astfel gaza baia, fapt care se observă cu ușurință datorită apariției «piqurilor» la suprafața unei mici probe ce se ia din material. Aceste piquri au forma unor băşicuțe mici, sparte, după solidificare.

Pentru introducerea elementelor aliajului care sunt de obicei cu puncte de topire mult superioare aluminiului, pentru a se evita supraîncălzirea aliajului se folosesc aliaje primare. Acestea sunt eutectice ale aluminiului cu acel element. Aceste aliaje primare au temperaturi de topire destul de ridicate și nu sunt prea solubile în aluminiu. Din acest motiv este recomandată topirea prealabilă a prealiajelor cu o cantitate de aluminiu, de obicei jumătate din întreaga cantitate ce este necesară șarjei, iar restul se adaugă la topirea completă a aliajului primar. Adăugarea acestei cantități de aluminiu are ca scop răcirea băii metalice, în așa fel încât la sfârșitul elaborării, temperatura să fie cât mai apropiată de cea de turnare.

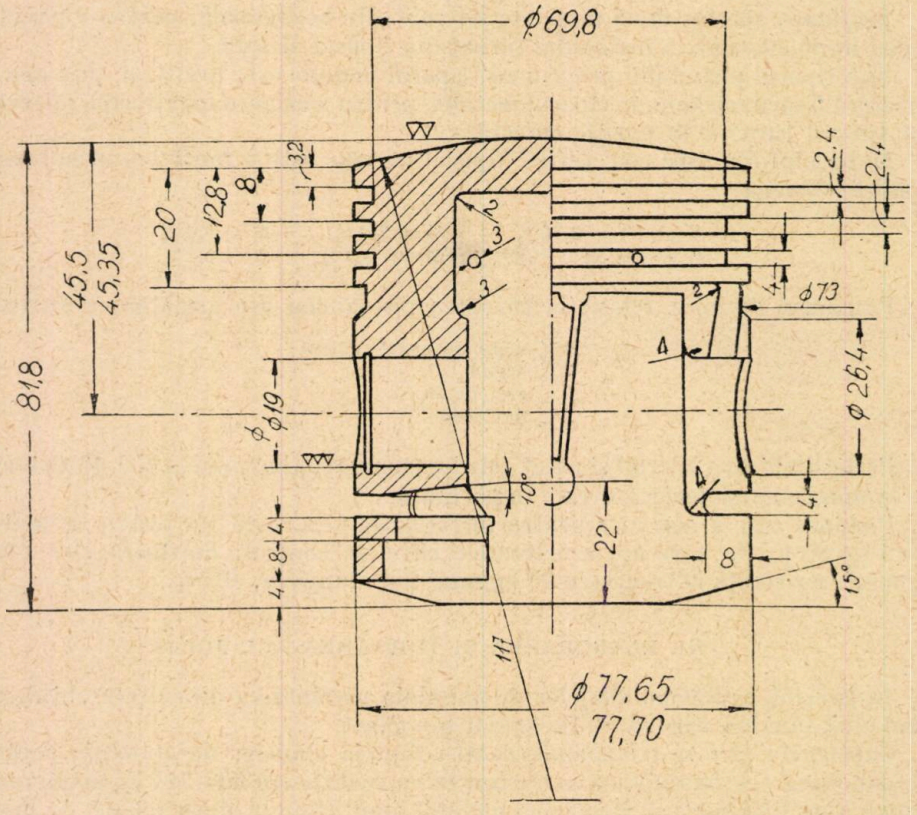


Fig. 4

Dacă în timpul topirii temperatura a atins cifre mari, este bine ca materialul să fie lingotat, deoarece această solidificare suplimentară face posibilă ieșirea gazelor, urmând ca acest material să fie retopit și turnat.

Temperatura de gazare pentru aliajele cu conținut ridicat de cupru este 750°, iar pentru cele cu conținut ridicat de siliciu este 900°. Curba solubilității gazelor în aliajele de aluminiu în funcție de temperatură este dată în figura 5.

S'a observat că atunci când se prepară o cantitate de aliaj mai mare, se obține o calitate superioară a aliajului; acest fapt se datorește probabil duratei mai mari de topire, ceea ce permite disolvarea completă a aliajului primar.

In timpul elaborării se pot folosi diferite săruri care au drept scop obținerea unui aliaj de calitate superioară. Astfel, vom folosi *săruri protectoare*, care micșorează arderea de material în timpul topirii și împiedecă acțiunea

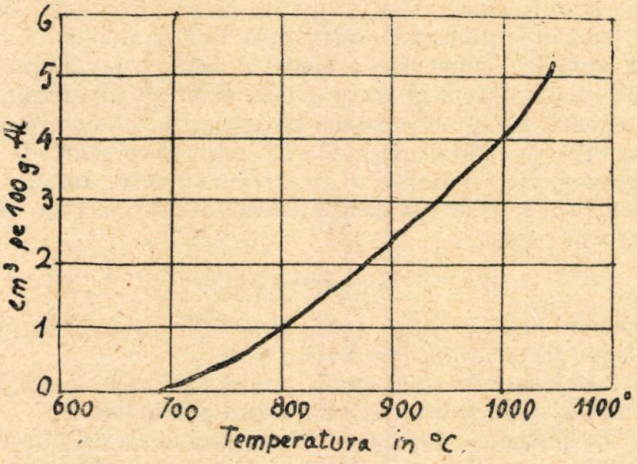


Fig. 5

oxidantă a gazelor de ardere în timpul topirii asupra băii metalice. Aceste săruri sunt introduse la început, când materialul este în stare solidă. Sunt folosite ca săruri amestecuri de cloruri de potasiu și cloruri de sodiu, cu adaus de carbonat de sodiu și florură de calciu.

Atunci când baia este topită se introduc *săruri desoxidante*, care au o acțiune de rafinare și de colectare în sgură a pojghițelor de oxizi ce se găsesc în baia metalică. Din aceste săruri cele mai des folosite sunt următoarele:

I 15% Sarea Desalit
85% Clorură de sodiu

II 15% Criolit
60% Clorură de sodiu
25% Clorură de potasiu

III 50% Criolit
15% « Apex » (sodă)
35% Clorură de sodiu

IV 13% Florură de potasiu
17% Sodă
30% Clorură de sodiu
40% Clorură de potasiu

V 20% Criolit
40% Clorură de sodiu
40% Clorură de potasiu

Solidificarea la turnarea în tiparul metalic se face într'un timp foarte scurt și gazele care sunt în baie și provin dintr'o gazare, nu au timp să părăsească metalul; de cele mai multe ori le găsim în piesa solidificată sub formă de pori. Pentru eliminarea lor se folosesc *săruri degazificatoare*. Acestea se introduc în baia lichidă, după desoxidanți și înainte de turnarea metalului.

Cele mai folosite săruri au următoarele analize:

I 85% Florură de siliciu şi sodiu	II 20% Florură de siliciu şi sodiu
5% Clorit	10% Florură de potasiu
5% Clorură de sodiu	40% Clorură de sodiu
5% Clorură de potasiu	30% Clorură de potasiu

Pentru aliajul Y folosit s'au respectat întocmai cerinţele de mai sus. In oala de grafit înroşită s'au introdus 10,5 kg de aliaj primar şi 44 kg aluminiu, câte sunt necesare pentru o şarjă de 100 kg. Aliajul primar are compoziţia chimică: 40% aluminiu, 40% cupru, 20% nichel.

S'a adăugat şi sarea protectoare, dând foc intens cuptorului pentru topire. Supravegherea temperaturii a fost asigurată de un pirometru. In timpul topirii s'a controlat dacă aliajul primar a fost topit, înlăturând astfel o supraîncălzire inutilă a băii metalice. După ce s'a observat topirea prealiajului, s'a adăugat restul cantităţii de aluminiu necesară şarjei, adică 44 kg aluminiu, continuând cu focul foarte încet. Apoi s'au introdus 1,5 kg magneziu, cu ajutorul unui clopot din oţel inoxiterm, la fundul oalei. S'a lăsat un timp scurt de câteva minute pentru omogenizare şi s'a introdus sarea desoxidantă. Inainte de turnare se ia o probă pentru a se controla dacă materialul conţine gaze sau nu, aşa cum am arătat în altă parte.

IV. REZULTATE

S'au turnat din ambele aliaje amintite anterior o serie de pistoane, asupra cărora s'au făcut încercări şi observaţii.

Unele au fost lăsate în stare brută, adică aşa cum se obţin din turnare, cu maselota oarbă, culea şi maselota din capul pistonului.

Altă serie de pistoane, după ce au fost prelucrate la diferite secţiuni, au fost secţionate în zona bolţului. Aceste pistoane nu prezentau niciun fel de crăpături, nici porozităţi, materialul fiind omogen.

De asemenea nici pistonul care a fost strunjit la cota finală şi căruia i s'au tăiat şi canalele de segmenţi nu a prezentat porozităţi în zonele de intrare a materialului şi în zona maselotei oarbe.

Analiza chimică obţinută pentru aliajul Al (Y) este Ni = 2% Cu = 4%; Mc = 1,5; Al = rest. Celălalt aliaj, Al 12, a prezentat după elaborare analiza următoare:

$$Cu = 9{,}8;\ Mg = 0{,}2;\ Al = rest.$$

Incercările mecanice făcute asupra celor două aliaje au dat următoarele rezultate:

Pentru aliajul Y,
Rezistenţa = 21 kg/mm²; Alungirea 0,8; Duritatea =95.
Pentru Al 12,
Rezistenţa = 20 kg/mm²; Alungirea 0,6; Duritatea 90.

ИЗУЧЕНИЕ ОТЛИВКИ АВТОМОБИЛЬНЫХ ПОРШНЕЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФОРМАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Изучается отливка автомобильных поршней в металлических формах. В первой части изучаются сплавы, применяемые до сих пор для изготовления поршней.

Во второй части приводятся данные для изготовления и набросок металлической формы. В разработке проекта изготовления были учтены все современные принципы отливки поршней из сплавов алюминия а также необходимые условия для получения изделия лишенного пористости.

В третьей части даны указания изготовления сплава, обеспечивающего ударную отливку ; равным образом указаны предупредительные меры для избежания перегрева плавня и анализы предохранительных солей.

В четвертой части изложены результаты испытаний для проверки металлической формы.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — *a* — неулучшенная структура ; в массе алюминия светлой окраски включены сине-серые кристаллы кремния; эвтектика иглообразная. *b* — неполно улучшенная структура; эвтектика много тоньше но изолированные крупные кристаллы кремния еще встречаются. *c* — правильно улучшенная структура; эвтектика очень тонкая, округленные зерна; многочисленные и хорошо очерченные первичные дентритовые кристаллы алюминия. *d* — слишком улучшенная структура; кристаллы алюминия светлой окраски в которых кристаллы кремния больше чем в эвтектике.

ÉTUDE AU SUJET DE LA COULÉE DES PISTONS D'AUTOMOBILE DANS DES MOULES MÉTALLIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, on étudie la fonte des pistons d'automobile dans des moules métalliques.

La première partie comprend une étude sur les alliages utilisés aujourd'hui à la fabrication des pistons.

La deuxième partie expose les données de construction et l'esquisse du moule métallique. On tient compte, à l'élaboration du projet de construction, de tous les principes modernes de la fonte des pistons en alliages d'aluminium, ainsi que des conditions nécessaires pour obtenir une pièce dépourvue de porosités.

La troisième partie donne des indications sur l'élaboration de l'alliage, garantie de la réussite de la fonte; de même, on indique les précautions prises pour éviter un surchauffement du bain métallique, ainsi que les analyses des sels protecteurs.

La quatrième partie expose les résultats des essais faits pour vérifier le moule métallique.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — *a*) Structure non améliorée ; dans la masse de couleur claire de l'aluminium se trouvent pris des cristaux bleu-gris de silicium. L'eutectique est aciculaire. *b*) Structure incomplètement améliorée. L'eutectique est beaucoup plus fin, néanmoins on trouve encore de grands cristaux isolés dans le silicium. *c*) Structure correctement améliorée. L'eutectique est très fin, les grains sont arrondis ; cristaux primaires dendritiques d'aluminium, fortement et bien contourés. *d*) Structure trop améliorée ; cristaux d'aluminium de couleur claire dans lesquels les cristaux de silicium sont plus grands que dans l'eutectique.

BIBLIOGRAFIE

1. *Metale neferoase.* Mașinostroenie, 1947, v. 4.
2. V. Zerleeder, *Technologie des Aluminiums.* Leipzig, 1948.
3. A. C. Lozenco și D. D. Pocrovschi, *Turnarea în cochilie și centrifugarea.* 1951.
4. L. P. Dubinin, *Turnaraa fontei în cochilie.* Trad. I. D. T.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

METALURGIE

SUDAREA FONTELOR NODULARE *)

DE

D. RAŞEEV

Ca urmare a punerii bazelor elaborării fontelor cu grafit nodular (1), (2) (3), (4), (5), (6) şi a tratamentului termic (7), a devenit actuală problema sudării acestor fonte, în vederea reparaţiei pieselor turnate.

In acest scop, Autorul a făcut o serie de încercări.

Se puteau încerca metodele cunoscute de sudură şi de lipire tare a fontei cenuşii sau a fontei maleabile, bineînţeles excluzându-se dela început acele metode care erau caracteristice numai pentru aceste materiale, cum ar fi sudura electrică sau sudura autogenă cu electrozi de fontă cenuşie, utilizată la fonte cenuşii, sau sudura cu electrozi de fontă albă, utilizată la fonta maleabilă netratată termic.

Cele mai potrivite metode care puteau fi deci încercate erau:

a) Lipitură tare cu bronz Tobin.

b) Lipitură tare cu metal Monol.

c) Lipitură tare cu electrozi de alamă acoperiţi sau neacoperiţi cu bandă de oţel.

d) Sudură cu electrozi de oţel.

Incercările făcute pentru folosirea acestor metode nu au dus la rezultate complet satisfăcătoare. Sudurile şi lipiturile tari nu aveau calităţi mecanice comparabile cu cele ale metalului de bază:

a) Lipitura tare cu bronz Tobin (59—60% Cu; 0,5 — 1,5% Sn; 1—2% Fe; 0,6—1,5% Mn rest Zn) care se poate executa autogen sau electric nu putea da rezultate mecanice satisfăcătoare, deoarece cifrele calitative mecanice ale lipiturii tari sunt inferioare materialului sudat ($\sigma_r = 42$ kg/mm^2, $\delta_5 = 1{,}5—3\%$). Deci, poate fi utilizată numai pentru locuri puţin solicitate.

b) Lipitura tare cu metal Monol (30% Cu; 68—69% Ni; 1—2% Fe + Ma) poate fi utilizată din aceleaşi motive numai drept umplutură sau pentru etanşare.

c) Lipitura tare cu electrozii de alamă acoperiţi sau neacoperiţi cu bandă de oţel a dat, la încercările mecanice, o rezistenţă de numai $\sigma_r = 20 — 25$ kg/mm^2, $\sigma_5 = 3\%$.

d) Sudurile electrice cu electrozi de oţel au dat până la $\sigma_r = 35$ kg/mm^2; $\delta_5 = 1\%$. Sudurile sunt aderente cu zona de trecere fragilă dela materialul

*) La realizarea încercărilor au dat concursul Marcel Marcu şi Radu Gheorghe.

de bază până la oţelul încărcat. In zona de trecere apare structura intermediară ledeburitică. Este o sudură bună numai pentru etanşeitate sau umplutură.

Deci, toate metodele de mai sus dau posibilitatea să se execute numai lipituri tari sau suduri de umplutură sau de etanşeitate. Ultima este cea mai raţională, deoarece dă rezultate optime, nu necesită utilizarea de neferoase şi se poate executa electric la rece. Nu poate fi folosită însă pentru suduri de rezistenţă.

In consecinţă, trebuiau găsite metode noi care să se bazeze pe caracteristicile şi proprietăţile fontei cu grafit nodular, obţinându-se în acelaşi timp şi sudură de rezistenţă.

Fonta cu grafit nodular, turnată după 10—20 de minute dela tratarea ei cu Mg păstrează încă grafit sub formă nodulară. Este logic deci ca şi în cazul unei retopiri rapide a fontei cu grafit nodular urmată de răcire rapidă, cum se întâmplă la sudură, să se obţină tot grafit nodular şi deci, să se păstreze calităţile mecanice ridicate ale fontei iniţiale. P. P. Petrosian şi S. E. Sou-Sahbudagian (8) au făcut o serie de încercări care confirmă acest fapt pentru cazul temperaturilor de retopire până la 1400° cu menţineri la această temperatură timp de 5 minute şi pe care le reproducem în cele ce urmează :

TABLOUL Nr. 1

Condiţii de turnare	Duritatea H_B	Magneziu %	Forma
Starea iniţială înainte de nodulizare	121	—	lamelar
Starea iniţială după nodulizare	264	0,056	100% nodular
Retopirea fontei cu grafit nodular la 1360° C fără menţinere la temperatură	233	0,039	100% nodular
Idem 1400° cu menţinere 5 minute la temperatură	197	0,013	30% nodular
Idem 1480° cu menţinere 5 minute la temperatură	144	urme	urme de nodulare

Ca să se poată realiza o sudare cu electrozi din fontă cu grafit nodular, trebue ca şi în cazul retopirii cu ajutorul arcului electric (temperatură mult mai ridicată) să se păstreze structura nodulară a grafitului.

Incercările făcute cu electrozi din fontă cu grafit nodular (vergele turnate) de compoziţie obişnuită nu au dat însă rezultate, obţinându-se în sudură grafit lamelar. Acest fapt se explică prin arderea magneziului din electrod în timpul sudării. Din încercările anterioare rezultă că în aliajele fier-carbon se disolvă un procent de magneziu cu atât mai ridicat, cu cât procentul de carbon şi siliciu din aliaj este mai mare. Pe această bază s'au elaborat electrozi speciali din fontă cu grafit nodular cu procent ridicat de carbon siliciu (cca 6% Si) şi magneziu (0,20% Mg faţă de 0,05—0,12% Mg din fontă nodulară obişnuită).

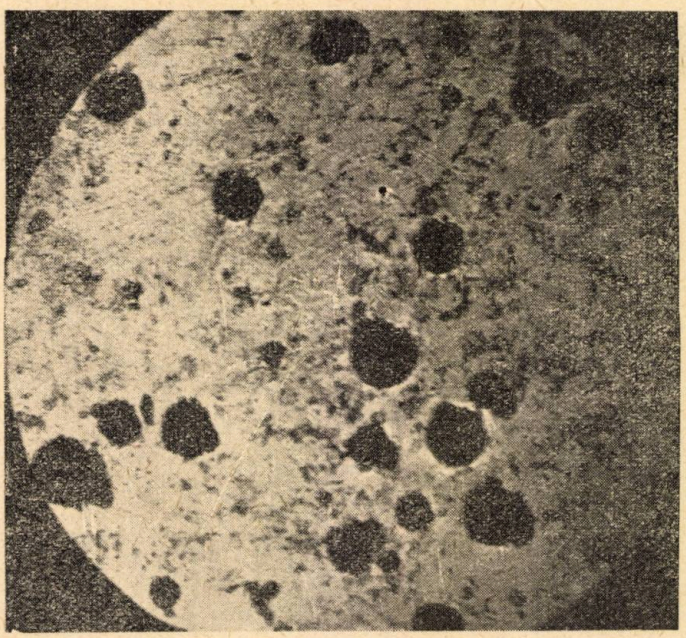


Fig. 1. — Microstructura materialului de bază. Atac 2% nital × 130.

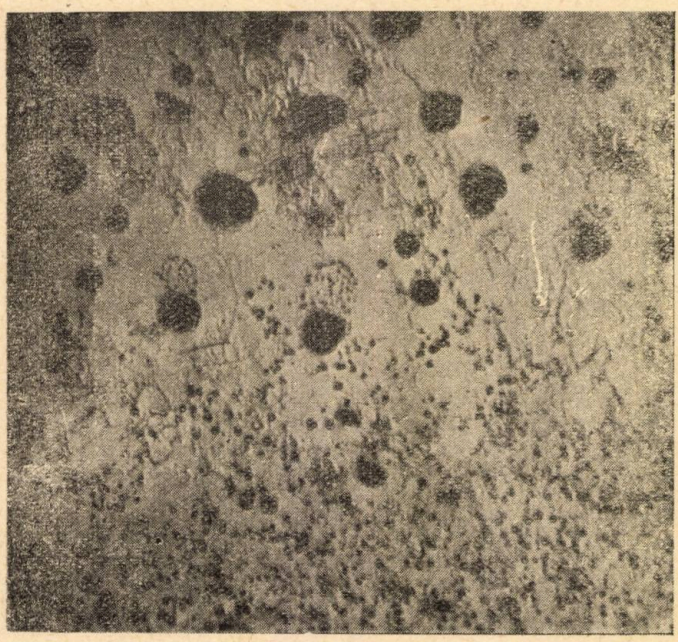


Fig. 2. — Microstructura zonei de trecere dela materialul de bază la sudură. Atac. 2% nital. × 130.

Procentul ridicat de siliciu, pe lângă rolul principal de disolvare a unui procent ridicat de magneziu, compensează arderile de siliciu în timpul sudării. Electrozii erau acoperiți cu un înveliș, care să permită obținerea unui arc corect.

Sudurile electrice la rece executate cu acești electrozi au dat rezultate satisfăcătoare.

Calitățile mecanice ale sudurii după o recoacere de 3 ore la 720°C au fost:

$\sigma_r = 48$ kg/mm² $\sigma_5 = 9\%$
pe eprubetă $H_B = 149$ kg/mm²
pe sudură $H_B = 241$ kg/mm²

Structura micrografică a sudării (fig. 1, 2 și 3) este feritică cu grafit complet nodular.

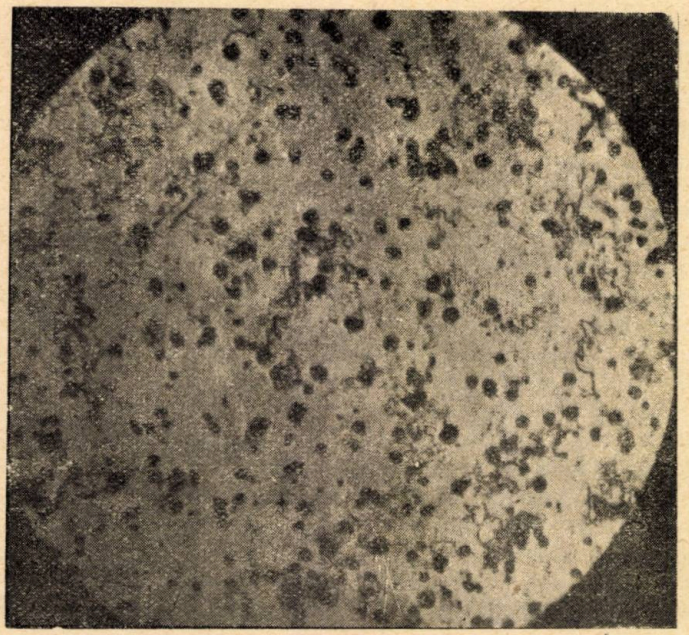


Fig. 3. — Microstructura sudurii. Atac 2% nital. × 150.

Nodulele de grafit din sudură sunt de dimensiuni foarte mici, mult mai mici decât cele ale materialului de bază. Acest lucru se datorește unui procent ridicat de siliciu din sudură.

Se poate utiliza în același fel și sudura autogenă, lucru ce nu are însă sens, deoarece sudura electrică fără preîncălzire este cea mai rațională.

Aceste rezultate prezintă interes, deoarece dau posibilitatea obținerii de cifre calitative mecanice ale sudurii identice sau chiar mai ridicate decât cele ale materialului de bază.

La aplicarea metodei trebue să se țină seamă și de următoarele posibilități: a) utilizarea unui înveliș special pentru electrozi care să dea eventual vapori de magneziu;

b) stabilirea compoziției chimice a electrozilor din fontă cu grafit nodular potrivit cu scopul urmărit și calitatea materialului sudat.

Utilizarea unor astfel de electrozi prezintă interes și la sudarea fontei cenușii obișnuite sau a fontei maleabile.

CONCLUZIUNI

Pentru sudarea fontei cu grafit nodular, metodele cele mai practice și ieftine sunt:

1. Sudura de umplutură și etanșeitate — sudură electrică la rece cu electrozi obișnuiți de oțel.

2. Sudura de rezistență și etanșeitate — sudură electrică la rece cu electrozi din fontă cu grafit nodular cu procent ridicat de siliciu și magneziu, înveliți cu un strat de ionizare (eventual să degaje vapori de magneziu).

СВАРКА СФЕРОЛИТОВОГО ЧУГУНА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматриваются возможные методы сварки чугуна с глобулярным графитом.

Проведенные испытания доказали, что методы употребляемые при сварке обыкновенного и ковкого чугуна дают шов менее прочный чем свариваемый чугун с глобулярным графитом. Такая сварка чугуна с глобулярным графитом может применяться только с целью исправления дефектов в ненапряженных местах деталей или с целью исправления неплотностей отливок идущих на гидравлическое испытание. С этой точки зрения рекомендуется применение обыкновенных электродов употребляемых для электросварки стальных изделий.

Научно обосновывается и предлагается специальный состав электродов для электросварки чугуна с глобулярным графитом с повышенным содержанием магния, дающих после сварки шов более высокой прочности чем основной металл. Доказывается необходимость, для получения в шве графита глобулярной формы и повышенных механических показателей, повышение содержания в электродах магния, что можно достичь за счет повышения содержания кремния сравнительно с нормальным его содержанием в чугуне с глобулярным графитом.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Микроструктура основного материала. Протравка 2% ниталь. × 30.
Рис. 2. — Микроструктура переходной зоны от основного материала к сварке. Протравка 2% ниталь. × 30.
Рис. 3. — Микроструктура сварки. Протравка 2% ниталь. × 30.

LA SOUDURE DES FONTES NODULAIRES

(RÉSUMÉ)

On étudie les méthodes possibles de soudure de la fonte à graphite globulaire. Les expériences effectuées ont prouvé que les méthodes employées couramment pour la soudure de la fonte ordinaire et de la fonte malléable donnent une

jonction moins solide que pour la fonte à graphite globulaire soudée. Cette soudure de la fonte à graphite ne peut être employée que dans le but de corriger les défauts dans les endroits peu sollicités ou bien pour corriger la noncompacité des moulages destinés à l'épreuve hydraulique. De ce point de vue, on recommande l'usage des électrodes ordinaires, employées pour la soudure électrique des produits en acier.

On propose et on donne les bases scientifiques d'une composition spéciale des électrodes pour la soudure électrique de la fonte à graphite globulaire, ayant une teneur en Mg élevée, qui donne après la soudure une jonction plus solide que le métal fondamental. Afin d'obtenir, dans la jonction, du graphite de forme globulaire ainsi que des indices mécaniques supérieurs, on prouve la nécessité de l'augmentation de la teneur en Mg dans les électrodes, ce qu'on peut obtenir au compte de la teneur en Si, par comparaison à la teneur normale dans la fonte à graphite globulaire.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Microstructure du matériel de base. Attaque 2% nital. × 30.
Fig. 2. — Microstructure de la zone de passage du matériel de base à la soudure. Attaque 2% nital. × 30.
Fig. 3. — Microstructure de la soudure. Attaque 2% nital. × 30

BIBLIOGRAFIE

1. D. Raşeev, *Fonta globulară*. Revista Tehnicianului, 1950, Nr. 15, 16, 17.
2. — *Folosirea metodelor sovietice pentru obţinerea fontelor*. Numărul festiv al revistei AST în cinstea aniversării Marii Revoluţii Socialiste din Octombrie, 1950.
3. — *Fontă sferolitică (globulară)*. AST Metalurgie, 1951, Nr. 5.
4. Dem. Urmă, *Fonta globulară*. Tehnica Feroviară, 1951, anul III, Nr. 2.
5. Al. Chişu, *Turnarea fontei globulare la Atelierul C.F.R. Cluj*. Tehnica Feroviară, 1951, anul III, Nr. 3.
6. C. Brătescu, *Cercetări pentru stabilirea unei tehnologii a fontei sferolitice*. AST Metalurgie, 1951, Nr. 4.
7. D. Raşeev, *Tratamentul termic al fontelor cu grafit globular*. Studii şi Cercetări de Mecanică şi Metalurgie, t. III, 1952, Nr. 1-2, p. 117.
8. P. P. Petrosian şi S. E. Sou-Sahbudagian, *Fontă cu grafit sferolitic*. Liteinoie Proizvodstvo, 1950, Nr. 2.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

METALURGIE

PRODUSELE REFRACTARE FORSTERITICE ÎN INDUSTRIA CIMENTULUI *)

DE

V. SINIANSKY, AL. BRANISKI, AUG. HETEA, L. SOLOMON
şi C. SĂVINEANU

Dintre produsele refractare folosite în industria cimentului pentru căptuşirea cuptoarelor rotative, produsele refractare foresteritice sunt cele mai recent şi încă puţin utilizate.

Intr'adevăr, doar după primul război mondial s'au început studiile de laborator în domeniul obţinerii forsteritei, iar întrebuinţarea forsteritei ca material refractar, precum şi cercetările semiindustriale şi industriale referitoare, datează de mai puţin de 20 de ani.

Din cercetarea literaturii de specialitate, rezultă că produsele refractare forsteritice au o comportare excelentă, în deosebi la căptuşirea cuptoarelor rotative din industria cimentului, lucru pe care ne-am propus să-l verificăm prin lucrarea de faţă, folosind ca materie primă serpentinele indigene, rămase nevalorificate la noi în ţară.

In R.P.R., s'au utilizat până în prezent, pentru căptuşirea zonei de clincherizare a cuptoarelor rotative de ciment, cărămizi de clincher, cărămizi refractare de şamotă, cărămizi magnezitice şi cărămizi cromo-magnezitice, ultimele două din import. Cărămizile magnezitice şi cromo-magnezitice sunt cele mai indicate, dar, în schimb, sunt foarte scumpe.

CONDIŢIILE DE LUCRU ALE MATERIALULUI REFRACTAR IN ZONA DE FOC A CUPTORULUI ROTATIV DIN INDUSTRIA CIMENTULUI

Dacă în celelalte zone ale cuptorului rotativ condiţiile de lucru ale materialului refractar sunt în genere uşoare, în zona de ardere, condiţiile de lucru sunt foarte severe, ceea ce face ca puţine materiale refractare să poată satisface cerinţele tehnologice.

In zona de ardere, temperatura la suprafaţa interioară a căptuşelii refractare este de 1450°C, în cazul arderii cimentului Portland.

Temperatura înaltă măreşte agresivitatea calcei din ciment care reacţionează cu materialul refractar, corodând astfel căptuşeala.

*) La această lucrare au mai colaborat: N. Mureşanu, V. Coropcă, Al. Kissling şi S. Moldovan.

Acestor doi factori li se alătură uzura căptușelii refractare datorită frecării puternice a materialului care se rostogolește în mod continuu în cuptor.

Deși cuptorul rotativ de ciment are mers continuu, uneori au loc întreruperi în funcționarea lui, care provoacă scăderea rapidă a temperaturii în cuptor și cauzează șocul termic al cărămizilor refractare.

Din cele de mai sus rezultă condițiile ce se impun unui bun material refractar folosit în zona de foc:

Cărămizile ce formează căptușala trebue să aibă *refractaritate ridicată*, pentru a permite lucrul la temperaturi înalte.

Rezistența lor *la atacul chimic* al cimentului este dată de prezența oxizilor bazici din cărămidă și de lipsa silicei libere, componentul acid al acesteia.

Produsele refractare trebue să fie suficient de compacte pentru a evita infiltrarea cimentului în porii cărămizii.

Dacă aceste două condiții sunt îndeplinite, calcea — elementul activ din ciment — nu atacă produsele refractare, ci se formează la suprafața căptușelii « lipitura ».

Lipitura este un strat de clincher care apără căptușeala împotriva uzurii provocate de frecare. Totuși, uzura prin frecare a cărămizilor refractare are loc până la formarea stratului de lipitură și în timpul eventualelor desprinderi ale lipiturii de pe căptușeală; de aceea, este necesar ca produsul refractar utilizat în zona de ardere a cuptorului de ciment să fie suficient de *rezistent la uzură*.

Intreruperile în funcționarea cuptorului impun realizarea unor produse *rezistente la șoc termic*.

Aceste condiții au fost parțial satisfăcute de cărămizile refractare bauxitice și de cele de șamotă cu un conținut mare de Al_2O_3.

Cărămizile magnezitice, superioare cărămizilor de șamotă și celor bauxitice, deși au o rezistență foarte mare la atacul chimic, au totuși o rezistență destul de redusă la șocul termic, în timp ce cărămizile cromomagnezitice au, din toate punctele de vedere, o comportare mult mai bună.

O comportare mai bună au și cărămizile magnezitice cu liant de spinel. Ele nu sunt însă economice având, ca și cărămizile cromitice, un preț de cost ridicat; din acest motiv au fost în ultima vreme înlocuite cu cărămizi refractare forsteritice, cu mult mai ieftine.

Cercetările noastre de laborator în domeniul cărămizilor refractare forsteritice, au condus la stabilirea unei rețete și a unui proces tehnologic de fabricare a acestor produse.

Pentru determinarea posibilității lor de utilizare în industria cimentului, s'au studiat stabilirea probelor de material forsteritic la atacul cimentului și conductibilitatea lor termică.

INCERCĂRI DE LABORATOR PENTRU CERCETAREA ATACULUI PRODUSELOR REFRACTARE FORSTERITICE DE CĂTRE CLINCHERUL DE CIMENT

Pentru stabilirea rezistenței materialului refractar forsteritic la atacul clincherului de ciment, s'a ales următoarea metodă:

Corpurile de probă, îngropate în cimentul conținut în creuzete de șamotă căptușite cu alumină, au fost arse la 1450°, temperatura de regim a căptușelii în zona de clincherizare a cuptoarelor rotative. Arderea s'a făcut într'un cuptor cameră, încălzit cu gaz metan, după o diagramă de 80 de ore, menținându-se temperatura constantă timp de 4 ore.

După încercările de atac, materialul forsteritic a fost supus analizei microscopice pentru a determina eventualii constituenți mineralogici formați prin reacția dintre produsul refractar forsteritic și ciment.

Analiza microscopică nu a putut descoperi în niciun caz compuși de reacție printre materialele de mai sus. Cimentul a aderat la suprafața probei, fără a pătrunde în interiorul ei (fig. 1).

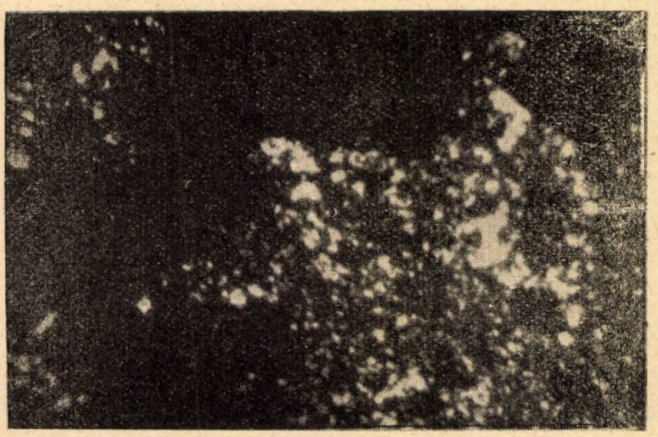


Fig. 1

De aici am tras concluzia că materialul refractar forsteritic nu este atacat de clincherul de ciment, iar pe de altă parte, avantajează formarea lipiturii.

DETERMINAREA CONDUCTIBILITĂȚII TERMICE A PRODUSELOR REFRACTARE FORSTERITICE

Pentru a decide dacă produsul refractar forsteritic poate fi înzidit în cuptorul rotativ, direct pe virole, cum se obișnuește la refractarele de șamotă, sau cu subzidire izolantă, cum este cazul la refractarele magnezitice sau cromomagnezitice, a fost necesar să se determine conductibilitatea termică a acestui material.

Intru cât nu dispuneam de aparatura necesară, am aplicat următoarea metodă, care ne-a dat posibilitatea necesară de a face o apreciere comparativă între produsele refractare forsteritice, magnezitice și de șamotă:

La gura unui cuptor cameră, încălzit cu gaz metan, s'au înzidit cărămizi de șamotă, forsteritice și magnezitice în rânduri verticale, a căror grosime era de 125 mm. Fiecare fel de cărămizi refractare au fost așezate pe lat, o cărămidă deasupra celeilalte, astfel încât s'au format trei coloane de materiale refractare diferite.

S'au folosit pentru legarea cărămizilor din același material, mortare făcute din șamota materialului respectiv (adică șamotă forsteritică cu leșie bisulfitică liant; magnezită sinterizată umezită cu leșie bisulfitică și mortar obișnuit de șamotă). Toate rosturile verticale (între materialele refractare diferite și între cărămizile de probă și pereții cuptorului) au fost tencuite cu mortar de alumină umezit cu leșie bisulfitică.

Arderea s'a făcut după o diagramă de 80 de ore.

Temperatura la exteriorul peretelui format de cele trei feluri de cărămizi refractare s'a măsurat prin aplicarea unui termoelement la suprafața cărămizilor și prin menținerea lui pe fiecare fel de cărămidă, timp de câte 15 minute.

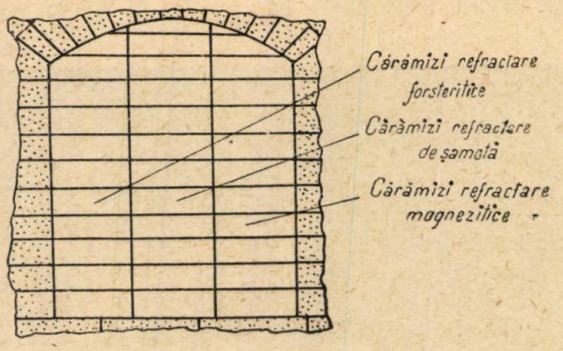


Fig. 2

In diagrama din figura 3 sunt înscrise curbele ce dau temperatura respectivă a cărămizilor la exteriorul peretelui, în funcție de temperatura cuptorului.

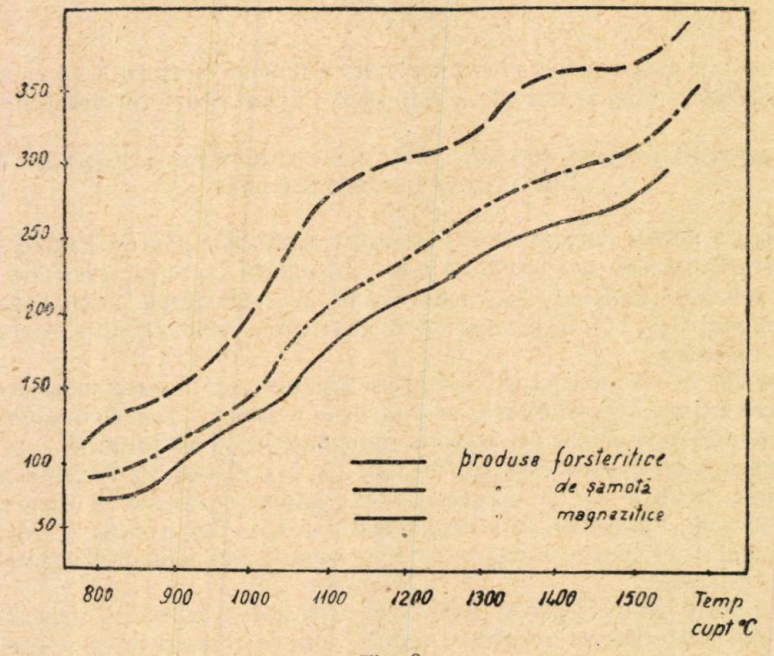


Fig. 3

Conductibilitatea termică a materialului refractar forsteritic este intermediară între conductibilitatea termică a produselor magnezitice și de șamotă. La

temperaturi înalte, conductibilitatea termică a cărămizilor refractare forsteritice se apropie de cea a cărămizilor de șamotă.

Pe baza acestor rezultate am ajuns la concluzia că materialul refractar orsteritic se poate înzidi în cuptorul de ciment fără subzidire izolantă.

FABRICAREA CĂRĂMIZILOR REFRACTARE FORSTERITICE

După studiul de laborator al produselor refractare forsteritice pentru industria cimentului, s'a trecut la faza pilot și semiindustrială.

Intru cât fabricarea nu dispune de utilajul necesar (presă hidraulică pentru presarea cărămizilor la minimum 500 kg/cm², malaxoare, etc.), nici de cuptoare cu vatră căptușită cu produse refractare bazice, procesul tehnologic elaborat de noi a fost adaptat la condițiile existente în fabrică.

La fabricarea produselor refractare forsteritice s'au folosit ca materii prime serpentina și magnezita, mineralizator fiind fosfatul trisodic. Dăm mai jos analizele chimice ale acestor materiale:

	Serpentina:		*Magnezita:*	
		după calcinare.		*după calcinare*
MgO	37,81	47,20	73,61	86,35
SiO_2	31,67	39,40	4,56	5,31
Al_2O_3	1,09	1,35	3,16	3,71
Fe_2O_3	9,58	11,95	2,58	3,02
CaO	lipsă	lipsă	1,36	1,58
TiO_2	urme	—	—	—
P. C.	19,90	—	14,81	—

Fosfatul trisodic

P_2O_5	— 26,07
Na	— 31,08
S	— 0,94
Cl	— 3,18
CO_2	— 5,34
MgO	— 1,56
Fe	— urme
P. C.	— 31,10

Prelucrarea produselor refractare forsteritice s'a făcut după următoarea rețetă:

70% serpentină
30% magnezită
+ 2 % fosfat trisodic (la totalul de mai sus).

+ 2% fosfat trisodic (la totalul de mai sus) ceea ce corespunde următoarei compoziții a șamotei forsteritice:

MgO	— 57,60
SiO_2	— 28,60
Al_2O_3	— 2,07
Fe_2O_3	— 9,05
CaO	— 0,46
P_2O_5	— 1,01

Procesul tehnologic folosit a fost următorul: serpentina și magnezita au fost măcinate separat în moara cu bile, apoi au fost trecute prin sită de 900 och/cm². Omogenizarea materiilor prin uscare s'a făcut în betonieră timp de 10 minute, după care s'a introdus mineralizatorul (fosfatul trisodic disolvat în apă caldă) și apă, pentru a da amestecului o umiditate de 20%, și s'a continuat amestecarea timp de 15 minute.

Fasonarea brichetelor s'a făcut la presa cu fricțiune, apoi brichetele au fost uscate până la 1% umiditate și încărcate în cuptor.

Brichetele au fost arse într'un cuptor cu camere, încălzit cu gaz metan.

Deoarece cuptorul era căptușit cu cărămizi aluminoase care ar fi reacționat la temperaturi înalte cu forsterita, s'a acoperit vatra cuptorului cu grăunți de material cromomagnezitic, apoi s'au așezat stivele de brichete. Arderea s'a făcut după o diagramă de 192 de ore, menținându-se temperatura maximă (1450°) constantă timp de 12 ore.

Caracteristicile tehnologice ale șamotei forsteritice obținute au fost:

Greutatea specifică	—	3,38 g/cm³
Greutatea volumetrică	—	2,35 g/cm³
Absorpția	—	11,64%
Refractaritatea	—	38,39 C. S. (1850/1880°C).

Șamota forsteritică a fost granulată în modul următor:

43% granule cu diametrul între 2—5 mm
57% granule cu diametrul sub 0,2 mm.

Fabrica neavând presă hidraulică, procesul tehnologic inițial care prevedea fasonarea cărămizilor din șamotă forsteritică (50% granule cu diametrul între 2—5 mm, și 50% granule cu diametrul sub 0,2 mm) cu leșie bisulfitică drept liant, a trebuit să fie modificat în sensul că s'a prelucrat următoarea rețetă:

35% șamotă forsteritică cu granule de 2—5 mm diametru
45% șamotă forsteritică cu granule sub 0,2 mm diametru
15% serpentină crudă măcinată sub 0,2 mm diametru
5% oxid de magneziu pastă.

Această rețetă s'a adoptat pentrucă presiunea dată de presa cu fricțiune era insuficientă pentru fasonarea cărămizilor din șamotă forsteritică numai cu liant organic, fapt care ar fi avut ca urmare o lipsă de rezistență, în timpul arderii, în perioada dela 600 la 1000° C, când liantul organic a dispărut prin ardere, înainte ca liantul ceramic să se fi format. Serpentina adăugată joacă rolul de liant. Oxidul de magneziu s'a introdus spre a menține constant raportul MgO/SiO_2 necesar formării forsteritului.

Amestecarea a fost făcută în betonieră în modul următor:

S'a introdus în betonieră șamota forsteritică (granule cu diametrul între 2—5 mm și sub 0,2 mm) și serpentina crudă măcinată în granule sub 0,2 mm, amestecând în stare uscată timp de 5 minute.

S'a introdus 5% MgO (pastă) și 5% leșie bisulfitică. Leșia s'a amestecat cu pasta și s'a adăugat sub formă de barbotină, omogenizându-se apoi timp de 15 minute.

Fasonarea cărămizilor forsteritice s'a făcut la presa cu fricțiune, la o presiune de numai 200 kg/cm² prin batere de 5 lovituri pe fiecare cărămidă, presându-se astfel cărămizi bolțar 200 × 200 × 100 × 20 mm.

Uscarea pieselor fasonate s'a făcut în uscătoriile cameră timp de 12 zile, uscarea făcându-se treptat până la o umiditate a cărămizilor sub 1%.

Pentru ardere s'a așternut pe vatră un strat de cuarț în granulele mari, peste care s'a așezat un rând de cărămizi silica. Apoi s'a așternut un strat de deșeuri de cărămizi cromomagnezitice, măcinate, în granule de 1—3 mm, pentru a se înlătura reacția dintre cărămizile forsteritice și cele silica.

Cărămizile forsteritice au fost așezate în stive cu o înălțime de 1 m și, pentru a se evita lipirea cărămizilor între ele, s'a pus între rândurile de cărămizi forsteritice un strat subțire de granule între 1—3 mm, de deșeuri de cărămizi magnezitice.

Cărămizile au fost arse după o diagramă de 240 de ore, menținându-se temperatura constantă la 1450°C timp de 12 ore (fig. 4).

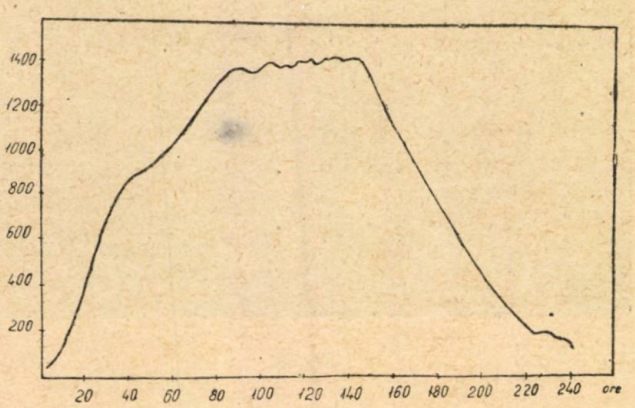


Fig. 4

Determinările efectuate în laborator asupra cărămizilor refractare forsteritice în fază semiindustrială au dat următoarele rezultate:

Analiza chimică

Mg	58,20%
SiO_2	29,05
Fe_2O_3	9,48
Al_2O_3	2,05
CaO	0,42
P_2O_5	0,67

Determinări fizico-magnetice

Greutatea specifică	3,37 — 3,39 g/cm³
Greutatea volumetrică	2,43 — g/cm³
Absorpția	11,32 — 11,37%
Porozitatea	28%
Rezistența la compresiune	148 — 164 kg/cm²
Refractaritatea	38/39 C. S. (1850—1880 °C)
Șoc termic (cicluri, răcire la aer)	30 +

Examenul microscopic în secțiuni subțiri arată că în cărămidă apar forsterită și aglomerații isotrope, translucide brune-roșii. Forsterita se prezintă în cristale, majoritatea având dimensiuni de aproximativ 0,02 mm. Acestea conțin nenumărate incluzii punctiforme, roșii transparente, de spineli și ferit

de magneziu. Forsterita este ușor colorată în galben. Aglomerațiile translucide au în general 0,5 mm, coloare variabilă, galbenă, roșie rubinie, uneori brună.

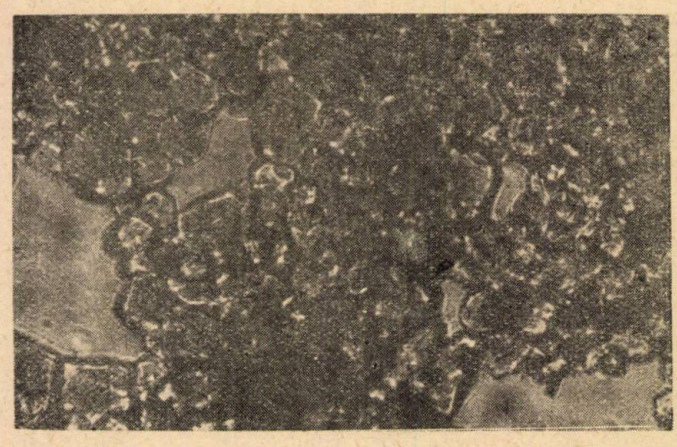


Fig. 5

In această massă sunt vizibili spineli (ferit de magneziu în cristale cu secțiune circulară de aproximativ 0,015 mm diametru).

INZIDIREA CĂRĂMIZILOR REFRACTARE FORSTERITICE ÎN CUPTORUL DE CIMENT

Din cărămizile forsteritice fabricate în fază semiindustrială s'au utilizat cca 2200 de bucăți la căptușirea unei porțiuni din zona de clincherizare a cuptorului rotativ Nr. 5 al fabricii de ciment.

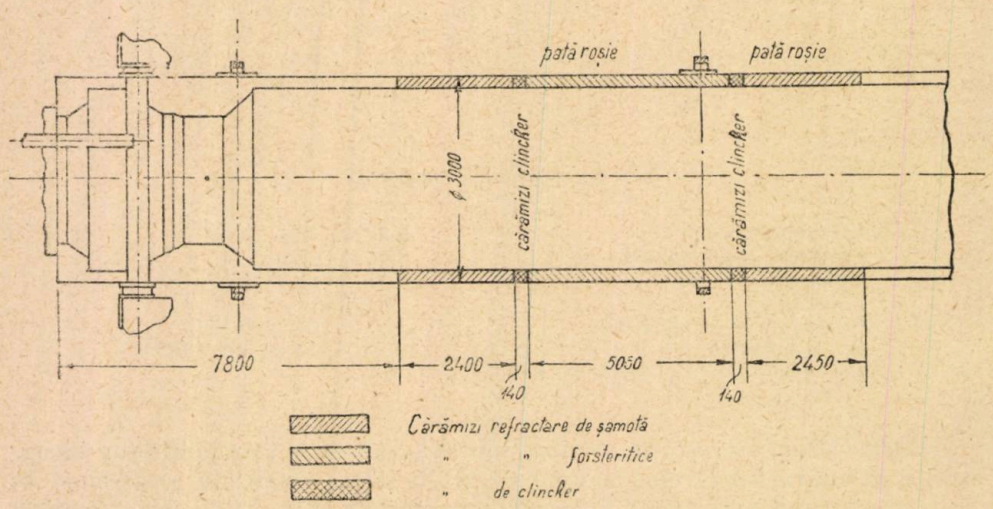


Fig. 6

In luna Octombrie 1951 cuptorul a fost oprit pentru a fi reparat. S'au scos cărămizile refractare de şamotă pe o lungime de 7,70 m a zonei de clincherizare. Această zonă a fost recăptuşită cu cărămizi refractare de şamotă pe o distanţă de 2,50 m, iar zona de temperatură maximă a fost căptuşită cu produse refractare forsteritice pe o lungime de 5,07 m.

De o parte şi de cealaltă a zonei căptuşite cu cărămizi refractare forsteritice, s'a zidit câte un inel de cărămizi de clincher pentru a se evita reacţia acestora cu cărămizile de şamotă. Cărămizile refractare forsteritice au fost aşezate direct pe virole fără subzidire, conductibilitatea termică a refractarelor forsteritice fiind intermediară între conductibilitatea termică a produselor magnezitice şi a celor de şamotă, cu tendinţa de a se apropia la temperaturi înalte de conductibilitatea termică a şamotei.

Ca mortar s'a întrebuinţat un amestec de 75% şamotă forsteritică şi 25% serpentină, măcinate la fineţea sitei de 0,2 mm. La înzidire, mortarul a fost umezit cu soluţie de silicat de sodiu de 36°Bé.

COMPORTAREA PRODUSELOR REFRACTARE FORSTERITICE IN PRODUCŢIE

Cuptorul a fost pus în funcţiune pe data de 26 Octombrie 1951, orele 19 şi 45, după ce în prealabil a fost încălzit cu lemne timp de 24 de ore.

In intervalul dela 26 Octombrie până la 31 Octombrie 1951 cuptorul a funcţionat fără ca stratul de căptuşeală refractară să fi prins lipitură. Din căptuşeală se desprindeau bucăţi mici de material forsteritic, însă pe măsură ce se forma lipitura pe căptuşeala refractară, căderea bucăţilor mici de material forsteritic (3—4 cm grosime) avea loc la intervale din ce în ce mai mari. Bucăţile căzute nu prezentau aspect de topitură.

După 31 Octombrie 1951, a cincea zi de funcţionare a cuptorului, fenomenul de cojire a cărămizilor refractare forsteritice a încetat şi lipitura formată s'a menţinut pe căptuşeală, cu toate frecventele opriri ale cuptorului.

In a 72-a zi de funcţionare a cuptorului Nr. 5 cu căptuşeală forsteritică, a apărut o pată roşie de 400 mm diametru pe mantaua cuptorului, la distanţă de 9,70—10,10 mm dela capătul de descărcare.

In aceeaşi zi s'a observat pe manta a doua pată roşie de 120 mm diametru la distanţa de 15,50—15,62 mm dela capătul de descărcare. Petele roşii au apărut în zona căptuşită cu cărămizi de clincher şi şamotă şi nu în regiunea căptuşită cu produse forsteritice.

In ziua de 16 Ianuarie 1952, a 83-a zi de funcţionare a cuptorului, conducerea fabricii de ciment a hotărît oprirea cuptorului Nr. 5 deoarece, în afara petelor roşii apărute pe manta, cuptorul necesita reparaţii mecanice şi, pe de altă parte, lipsea pasta pentru alimentare.

Răcirea cuptorului s'a făcut în modul următor:

In ziua de 16 Ianuarie 1952 la orele 14 şi 10' s'a oprit alimentarea cu pastă, apoi s'a întrerupt funcţionarea ventilatorului. S'a scăzut în mod treptat presiunea gazului până nu s'a mai putut menţine focul în cutor.

După răcirea cuptorului Nr. 5 s'au putut constata următoarele:

Petele roşii observate pe manta erau în zona căptuşită cu cărămizi de clincher şi de şamotă.

Cărămida refractară forsteritică a păstrat foarte bine lipitura.

Produsele refractare forsteritice şi-au menţinut constituţia şi structura lor iniţială.

Grosimea cărămizilor refractare forsteritice variază uniform dela 50 mm la capătul zonei din spre mijlocul cuptorului, la 120 mm la partea zonei forsteritice din spre capătul de descărcare (grosimea căptuşelii la înzidire fiind 200 mm).

Aproximativ 65% din suprafaţa cărămizilor era, după oprirea cuptorului, acoperită cu lipitură de grosime variabilă, ajungând până la 250 mm, iar restul de circa 35% din cărămizi (zona din spre mijlocul cuptorului) părea după aspect să-şi fi pierdut lipitura după ce cuptorul a încetat să funcţioneze.

Conducerea fabricii de ciment a hotărît schimbarea întregii căptuşeli a zonei de ardere a cuptorului, deci şi a cărămizilor refractare forsteritice, deşi acestea nu erau decât parţial uzate.

Să examinăm comportarea căptuşelii forsteritice în intervalul celor 83 de zile de funcţionare a cuptorului Nr. 5.

Intervalul de timp dintre punerea în funcţionare a cuptorului Nr. 5 cu căptuşeală forsteritică şi formarea lipiturii (5 zile) este în realitate mai scurt, căci trebue să se ţină seama de opririle cuptorului în această perioadă, dintre care una a durat 36 de ore.

Putem considera că din ziua a şasea de funcţionare, comportarea căptuşelii forsteritice în serviciu a devenit normală.

Până la această dată, produsele forsteritice au prezentat un fenomen de cojire analog cu cel prezentat de cărămizile magnezitice.

Din momentul formării lipiturii, căptuşeala forsteritică a avut o comportare întru câtva diferită de aceea a căptuşelii magnezitice.

La aprecierea comportării trebue să ţinem seama de un factor important, şi anume desele opriri ale cuptorului, care provoacă deteriorarea căptuşelii, datorită şocurilor termice repetate.

In cele 83 de zile de funcţionare ale cuptorului rotativ Nr. 5 cu căptuşeală forsteritică, au avut loc:

36 de opriri a căror durată a fost mai mică de o oră.
13 opriri a căror durată a fost între una şi două ore.
6 opriri a căror durată a fost mai mare de două ore.

în total 55 de opriri

Acestora li se adaugă şocul termic suferit de căptuşeală prin folosirea unei curbe de ardere rapidă la prima încălzire a cuptorului.

Cu cât opririle au fost de durată mai lungă, cu atât căptuşeala s'a răcit mai mult, fapt care a provocat contracţia materialului refractar.

Este de remarcat că în timpul opririlor, lipitura s'a menţinut pe căptuşeala forsteritică.

Acest fapt se datoreşte probabil coeficientului de dilatare a materialului forsteritic şi al clincherului şi are drept consecinţă protejarea căptuşelii refractare, nu atât la şoc termic, cât prin evitarea uzurii în timpul lipsei lipiturii şi apoi a formării unui nou strat protector de lipitură.

Prin această comportare, produsele refractare forsteritice se deosebesc de cele magnezitice de pe care se desprinde la răcire stratul protector de lipitură, datorită probabil valorilor diferite ale coeficienţilor de dilatare a clincherului şi cărămizii magnezitice.

După părerea noastră, calitatea produselor refractare forsteritice, care le face indicate pentru căptuşirea cuptoarelor de ciment, este superioritatea lor din punctul de vedere al rezistenţei la atacul chimic faţă de refractarele de

șamotă; iar în comparație cu cele magnezitice — fiind puțin inferioare la atacul chimic, rezistența lor este superioară față de agenții fizici — variațiile brusce de temperatură.

In figura 7 este redată microfotografia zonei de contact între clincher și materialul refractar forsteritic folosit în cuptorul Nr. 5.

Fig. 7

Se recunoaște linia netă de demarcație între materialul refractar și clincher, cu următoarea succesiune de zone: *a*) forsterită, *b*) spineli, *c*) belit II (SiO_2 2CaO curat, lipsit de incluzii), *d*) belit III (SiO_2 2CaO care conține oxizi de fier) și *e*) alit. Zonele *b*) și *c*) au dimensiuni microscopice, după cum reiese din microfotografie.

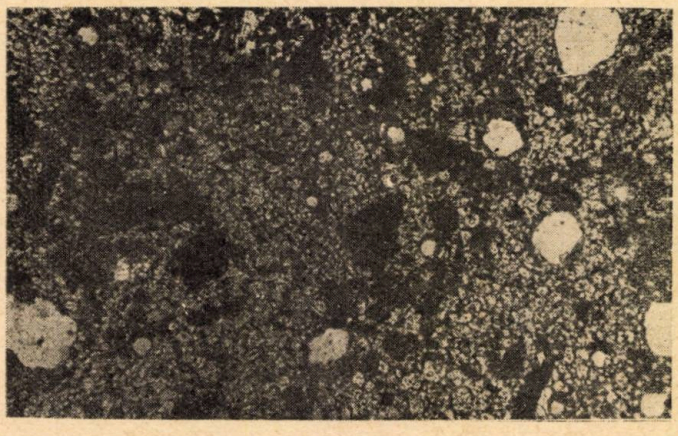


Fig. 8

In timpul utilizării, forsterita a crescut considerabil, cristalele rezultate fiind idiomorfe; un proces identic s'a petrecut și cu spinelii. Massa amorfă a dispărut în întregime; de asemenea, cristalele de forsterită au devenit incolore față de coloarea galbenă inițială.

In figura 8 este dată o microfotografie de ansamblu a produsului forsteritic după ce a fost scos din cuptor. Părţile întunecate din fotografie sunt spinelii şi periclasul, materialul amorf, prezent în cărămidă înainte de întrebuinţare, lipsind complet.

Pentru comparare, redăm microfotografia din figura 9 care a fost făcută în condiţii identice şi unde se poate vedea produsul înainte de întrebuinţare.

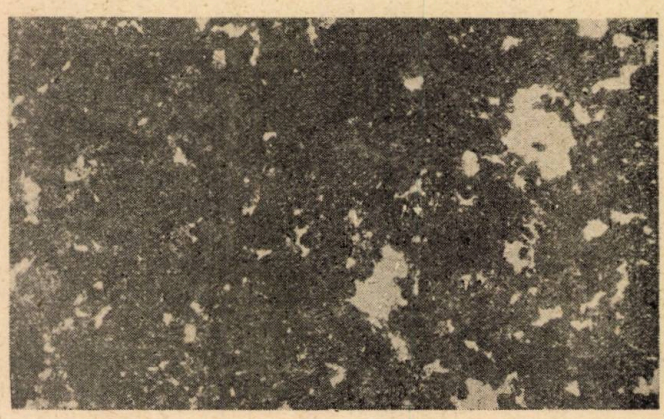


Fig. 9

După părerea specialiştilor dela fabrica de ciment, încercarea de căptuşire a zonei de clincherizare cu refractare forsteritice a dat rezultate pozitive cu atât mai mult cu cât această primă înzidire a avut de suportat un regim extrem de sever (55 de opriri dintre care niciuna nu a fost provocată de căptuşeala forsteritică).

Făcând comparaţia între durata acestei campanii, la sfârşitul căreia produsele forsteritice au fost numai parţial uzate, cu durata căptuşelilor anterioare de cărămizi de şamotă şi clincher ale cuptorului rotativ Nr. 5, se observă că durata căptuşelii forsteritice a fost mai mare.

Cuptorul Nr. 5 nefiind căptuşit până în prezent cu refractare magnezitice, şi având opriri foarte dese, nu este posibil să se facă o comparaţie între produsele refractare forsteritice şi produsele magnezitice înzidite în alte cuptoare de ciment, unde se produc mai puţine opriri. Totuşi, este cunoscut faptul că refractarele magnezitice nu prezintă rezistenţă la şoc termic şi prin urmare nu ar fi putut suporta un timp mai îndelungat regimul de lucru atât de sever al cuptorul rotativ Nr. 5.

CONCLUZIUNI

Să examinăm produsele forsteritice sub aspectul condiţiilor ce se cer unui material folosit în zona de foc a cuptorului de ciment.

— In ceea ce priveşte rezistenţa la atacul chimic al cimentului, condiţie care se impune în primul rând, produsele refractare forsteritice au dat rezultate pozitive, după cum reiese şi din determinările microscopice ale cărămizilor uzate.

— Refractaritatea produselor forsteritice este 1850—1880°C şi întrece cu mult pe aceea a produselor refractare de şamotă folosite astăzi (1750°C).

Uzura provocată de rostogolirea zilnică a 250 t material prin cuptor, nu a fost puternică, produsele refractare forsteritice având, după 83 de zile de funcţionare a cuptorului, 25—60% din grosimea lor iniţială.

— Stratul de lipitură s'a menţinut bine pe căptuşeala forsteritică cu toate că temperatura a scăzut în timpul opririlor de durată mai lungă, până la 600—700°C.

In această privinţă, comportarea produselor refractare forsteritice este superioară aceleia a produselor magnezitice de pe care se desprinde la răcire bruscă, lipitura.

Rezistenţa la şoc termic a cărămizilor refractare forsteritice s'a dovedit a fi bună prin faptul că au suportat regimul sever al cuptorului (55 de opriri).

Din expunerea de mai sus reiese că produsele refractare forsteritice obţinute la fabrică s'au comportat bine la căptuşirea cuptorului rotativ de ciment Nr. 5. Diferitele neajunsuri de ordin tehnic putând fi evitate pe viitor, este de prevăzut că produsele refractare forsteritice ce se vor fabrica pe scară industrială în cursul anului 1952 la noi în ţară, se vor comporta cu totul satisfăcător.

Produsele refractare foresteritice vor deveni pe viitor cele mai indicate materiale pentru căptuşirea cuptoarelor de ciment din R.P.R.

Institutul de Metalurgie şi Mecanică Aplicată al Academiei R.P.R. şi Institutul de Cercetări Miniere şi Metalurgice al Ministerului Industriei Metalurgice şi Industriei Chimice, Bucureşti.

ФОРСТЕРИТОВЫЕ ОГНЕУПОРНЫЕ ИЗДЕЛИЯ В ЦЕМЕНТНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Изложены результаты полученные первыми форстеритовыми огнеупорными изделиями, изготовленными в РНР и использованными в ротативной печи для цемента (длина 90 м, диаметр 3 м). Несмотря на 56 остановок печи, поведение форестеритового огнеупорного материала устоявшего в течение 83 дней в зоне огня, было хорошее.

Форстеритовая огнеупорная футеровка была удалена, хотя она имела еще 60—120 мм толщины (первоначально 200 мм), приостановка печи была обусловлена механическими причинами.

Можно было установить, что при благоприятных условиях форстеритовые огнеупорные изделия образуют на всей поверхности зоны обжига кору достаточной толщины превращенную в стекло.

Так как форстеритовая футеровка весьма устойчива перед резкими изменениями температуры и перед химическими воздействиями, то она рекомендуется для печей цементной промышленности.

LES PRODUITS RÉFRACTAIRES FORSTÉRITIQUES DANS L'INDUSTRIE DU CIMENT

(RÉSUMÉ)

On expose les résultats obtenus à l'aide des premiers produits réfractaires forstéritiques, fabriqués dans la République Populaire Roumaine et utilisés dans un four rotatif de ciment (longueur 90 m, diamètre 3 m). Malgré les 56 arrêts du four, le matériel réfractaire forstéritique a eu un bon comportement dans la zone du feu, résistant 83 jours.

Le revêtement réfractaire forstéritique a été enlevé, bien qu'il eût encore 60-120 mm d'épaisseur (au début 200 mm), l'arrêt du four étant dû à des causes mécaniques.

On a pu constater que, dans de bonnes conditions, les produits réfractaires forstéritiques forment, sur toute la surface de la zone de cuisson, une croûte vitrifiée d'épaisseur suffisante.

Le revêtement forstéritique résistant très bien aux brusques variations de température et à l'attaque chimique est recommandable pour le revêtement des fours dans l'industrie du ciment.

BIBLIOGRAFIE

1. A. S. Boldîrev şi V. D. Sidorov, *Materiale refractare pentru căptuşirea cuptoarelor rotative din industria cimentului*. Moscova, 1946.
2. J. Chesters, *Steelplant refractories*. Sheffield, 1946.
3. D. Endell, *Despre utilizarea refractarelor magnezitice în cuptoarele din industria cimentului*. Berlin, 1932.
4. R. M. Hodorov, *Cuptoarele din industria cimentului*. Moscova, 1950.
5. C. N. Ionescu, V. Sinianskỳ, Al. Braniski şi L. Solomon, *Produse refractare forsteritice din materii prime indigene*. St. şi Cerc. de Mecanică şi Metalurgie, t I, 1950, p. 131.
6. N. V. Jung, *Tehnologia lianţilor*. Moscova.
7. P. M. Lea şi C. A. Desch, *Chimia cimentului*. Berlin, 1937.
8. B. N. Poluboiarinov, *Despre materialele refractare pentru căptuşirea cuptoarelor rotative din industria cimentului*. Culegere de lucrări ştiinţifice, Moscova, 1949.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

REFERATE

DESPRE UNELE ÎNCERCĂRI PENTRU STABILIREA INFLUENŢEI ECRUISAJULUI DE TRACŢIUNE ASUPRA REZISTENŢEI LA OBOSEALĂ A PRĂJINILOR DE FORAJ

DE

M. GELLER

I. GENERALITĂŢI

Industria petroliferă este într'un înalt grad interesată în stabilirea cauzelor care provoacă ruperea prăjinilor în cursul activităţii de foraj. De aceea se obişnueşte la întreprinderile petrolifere, ca fiecare accident de acest fel să facă obiectul unor cercetări individuale, care se extinde pe de o parte asupra examinării în laborator a piesei fracturate, iar pe de altă parte asupra urmăririi împrejurărilor locale de lucru.

Cercetările de laborator sunt multilaterale. Se determină compoziţia chimică a oţelului, se fac atacuri macro-şi microscopice, atât în planul (transversal) de rupere, cât şi în acela al unei secţiuni axiale, unerori chiar şi într'un plan tangenţial; se efectuează probe de tracţiune asupra unor epruvete luate de ambele părţi ale planului de frângere şi se turtesc în sens radial inele luate de asemenea de o parte şi de alta a fracturii. In unele cazuri se procedează şi la un tratament termic de control.

Dacă se consideră totalitatea ruperilor astfel examinate, se constată că pentru un procent relativ important nu se găseşte o explicaţie mulţumitoare, adică rezultatul cercetărilor de laborator este negativ. Compoziţia oţelului este găsită în ordine, nu se constată defecte de material sau de uzinare, cifrele calitative sunt satisfăcătoare şi tratamentul termic de normalizare ireproşabil.

Cum în cele mai multe din aceste cazuri şi condiţiile de lucru la sondă au fost de asemenea găsite în ordine, iar dimensiunile piesei suficiente (pierderea de grosime prin frecare fiind uşoară), se pune întrebarea, dacă mijloacele de investigaţie din laborator sunt suficiente, sau nu.

Autorul prezentei lucrări crede că la această întrebare răspunsul este hotărît negativ: Numai prin încercările amintite mai sus nu se poate da în toate cazurile o explicaţie suficientă pentru comportarea nesatisfăcătoare a prăjinilor de foraj. Critica noastră se îndreaptă în special împotriva naturii statice a acestor încercări, care nu pot da o imagine clară asupra comportării unui material supus tot timpul unor eforturi dinamice.

Prăjinile de foraj sunt supuse un timp foarte îndelungat unei rotaţii frecvente. Prin aceasta, solicitările se repetă de un număr de ori extrordinar de mare. Numai eforturile axiale (de tracţiune, foarte rar de compresiune) au un caracter exclusiv sau aproape exclusiv static. Cele de torsiune şi, mai ales, cele de flexiune, sunt alternative. Primele variază între zero şi o valoare maximă, având deci acelaşi sens; cele de flexiune însă variază între valori extreme, egale şi de semn contrar. Ambele pot conduce, datorită fenomenului de oboseală, la ruperi, chiar dacă valoarea lor este sensibil sub cea rezultând din rezistenţa statică.

In general, între solicitările de oboseală la torsiune sau flexiune, pe de o parte, şi între rezistenţa la tracţiune a unui oţel dat, pe de altă parte, există o legătură de proporţionalitate, astfel încât din constatările la proba de tracţiune statică se poate trage o concluzie întru câtva justă cu privire la comportarea sub efectul torsiunilor sau flexiunilor repetate. S'ar părea deci că încercările practicate actualmente în laborator sunt suficiente.

Intrebarea trebue pusă însă într'o formă mai generală, şi anume, mai trebue încă cercetat *dacă un ecruisaj anterior are sau nu vreo influenţă asupra rezistenţei la oboseală* şi dacă după ecruisare se mai poate conchide dela probele statice asupra comportării la eforturi repetate.

Răspunsul la această întrebare ne interesează în mod special, căci la prăjinile de foraj un anumit ecruisaj se prezintă cu certitudine în numeroase cazuri. Prăjinile sunt uneori supuse unei tracţiuni depăşind limita de curgere şi suferă adesea în cursul lucrului eforturi de flexiune (mai rar de torsiune) de mărimi considerabile. Mijloacele de a constata mărimea ecruisajului rezultând din aceste depăşiri ale limitei de curgere sunt însă incomplete şi imperfecte. Rezultatele încercărilor de tracţiune din laborator asupra unor piese de acest fel, rupte în cursul lucrului, sunt mai întotdeauna nesigure. Consolidarea este, fără îndoială, un indiciu de ecruisare, dar o cifră de tracţiune puţin sporită nu conduce la o concluzie sigură, căci rezistenţa materialului variază destul de sensibil dela o piesă la alta, chiar înainte de întrebuinţare, mai ales din cauza călirii la aer după normalizare.

Autorul prezentei lucrări este înclinat să atribue acestui uşor ecruisaj producerea a multor ruperi la oboseală, pentru care, până acum, nu se găsea, cu metodele uzuale de încercare o explicaţie completă.

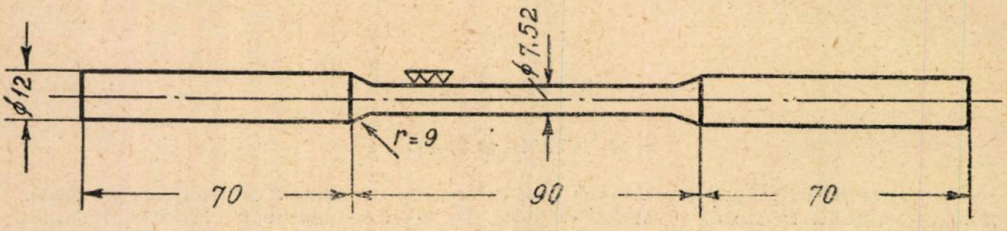


Fig. 1

Dacă s'ar recunoaşte ca fondată concepţia actualmente în curs, rezultatul unui ecruisaj prealabil ar părea chiar favorabil căci ridicarea cifrei de rezistenţă la tracţiune, care însoţeşte ecruisajul, ar conduce la o cifră corespunzător mai înaltă la oboseală. Această aşteptare porneşte dela premisa, că raportul dintre limita de oboseală şi cea de rupere la tracţiune este acelaşi ca la un material în stare normalizată.

Ete însă îndreptăţită întrebarea, dacă prin ecruisaj nu iau, poate, naştere deformări şi discontinuităţi, în stare să contrabalanseze efectul consolidării şi să reducă mai puternic rezistenţa la oboseală.

Pentru a răspunde la această întrebare s'au efectuat patru serii de încercări de oboseală asupra materialului de prăjini de foraj şi anume: *a)* în stare normalizată, *b)* după un ecruisaj de 2%, *c)* după unul de 6% şi *d)* după unul de 8%.

Toate încercările au fost efectuate în stare uscată şi cu epruvete netede (fără crestături). Examinarea suprapunerii ecruisajului cu oboseala la coroziune (deci într'un mediu lichid) rămâne rezervată unor încercări ulterioare.

II. INCERCĂRILE

Epruveta de oboseală utilizată de noi este reprezentată în figura 1. Porţiunea mijlocie cu diametrul de 7,52 mm este foarte fin şlefuită şi se freacă în sens longitudinal cu hârtie metalografică 4/0, înainte de întrebuinţare.

Epruveta este sprijinită la capete pe doi rulmenţi rezemaţi pe suportul maşinii. La distanţa $a = 55$ mm dela aceştia spre interior se fixează pe epruvetă câte un rulment prin care se transmit sarcinile verticale asupra acesteia. Aceste sarcini sunt:

G = greutatea moartă, compusă din aceea a rulmenţilor interiori, a barelor de suspensie şi a tijei pe care se aşează discurile formând greutatea variabilă.

P = greutatea (variabilă) obţinută prin discuri de diferite grosimi.

In felul acesta ia naştere o suprafaţă a momentelor, de formă trapezoidală, cu înălţimea $= \frac{1}{2}(P + G)$. a (fig. 2).

La dispozitivul nostru $G = 18{,}922$ kg. Epruveta are un moment de rezistenţă (în porţiunea mijlocie) $W = 7{,}52^3/32 = 41{,}7$ mm^3. Efortul de flexiune reiese deci ca fiind $= (P + G)\ a/2\ W = 0{,}66\ P + 12{,}48$ kg mm^2.

Prin legătura cu un electromotor având axa în prelungirea epruvetei, se transmite asupra acesteia o rotație de 2850 de ture pe minut.

Materialul utilizat a fost o prăjină de foraj 5.9/16'' cu $D = 141{,}3$ mm și $d = 120{,}22$ mm. Grosimea peretelui nu a fost deci suficientă pentru executarea diametrului de 12 mm pe porțiunile terminale ale epruvetelor. In aceste porțiuni deci, secțiunea circulară nu era completă, ci cu teșituri diametral opuse de cca 0,7 mm pe rază.

Compoziția chimică a oțelului a fost: C 0,32%, Mn 0,65%, Si 0,20%, P 0,028% și S 0,034%.

Bucata de prăjină a fost normalizată pe toată lungimea ei și apoi s'au tăiat fragmente suficient de mari, pentru confecționarea epruvetelor celor patru serii de încercări. Fâșiile

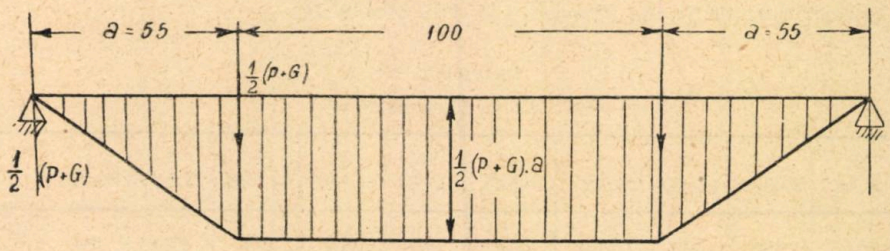


Fig. 2.

longitudinale, cu secțiunea de aproximativ 15/11 mm au fost apoi — cu excepția celora care urmau a fi încercate în starea normalizată — supuse unei tracțiuni suficient de mari pentru a produce deformații remanente de 2,0%, 6,0% și 8,0%. Fâșiile au fost apoi strungite și șlefuite cu o îngrijire specială (evitând încălzirea) la dimensiunile finale.

Din fiecare serie de epruvete s'au luat câte două, pentru încercări de tracțiune. Rezultatele au fost cele conținute în tabloul Nr. 1.

TABLOUL Nr. 1

	σ_R kg/mm²	δ_{10} %	ψ %
Material normalizat	67,1	17,7	59,0
Material ecruisat 2%	74,7	16,8	55,5
Material ecruisat 6%	77,9	12,6	53,0
Material ecruisat 8%	78,2	12,0	53,0

Incercarea în mașina de oboseală s'a efectuat în general până la atingerea unui număr de cca 2.500.000 rotații. Este cunoscut faptul, că cifra pentru rezistența la oboseală în stare uscată, nu mai variază decât într'o măsură foarte slabă, dacă numărul ciclurilor de încărcare crește.

In tablourile care urmează s'au trecut, înafară de încercările cu valori descrescânde ale lui P, și acelea care s'au efectuat pentru verificarea sarcinei de oboseală Pc, obținută prin metoda celor mici mai patrate din rezultatele empirice [1].

In tabloul Nr. 2, litera m reprezintă durata încercării în minute. Semnul + arată că epruveta respectivă s'a rupt. Incercările Nr. 9 și 10 au servit ca verificare a valorii Pc.

TABLOUL Nr. 2

Epruvete normalizate

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P kg	25,405	24,245	23,956	23,818	23,605	23,409	23,045	23,045	23,154	23,154
m min.	320	420	700	840	630	605	875	900	900	900
	+	+	+	+	+	+	+			

[1] A se vedea punctul III.

TABLOUL Nr. 3

Epruvete ecruisate 2%

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P kg	25,980	25,914	25,580	25,420	25,180	25,045	24,021	23,409	24,348	24,348
m min	660 +	620 +	630 +	720 +	860 +	900 +	880 +	900	900	900

Şi aici încercările Nr. 9 şi 10 au servit la verificarea lui P_c.

TABLOUL Nr. 4

Epruvete ecruisate 6%

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P kg	26,520	26,414	26,080	25,545	25,170	24,855	24,380	24,650	24,650
m min	600 +	640 +	680 +	720 +	765 +	900 +	900	900	900

Incercările Nr. 8 şi 9 au servit la verificarea lui P_c.

TABLOUL Nr. 5

Epruvete ecruisate 8%

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P kg	30,318	28,110	27,862	26,503	25,530	24,693	25,032	24,798	24,798
m min	200 +	320 +	350 +	508 +	780 +	900	900 +	900	900

Incercările Nr. 8 şi 9 au servit la verificarea lui P_c.

In tablourile de mai sus nu au fost trecute epruvetele, care din cauza unor anomalii de executare (în special la trecerea dela diametrul de 7,52 mm la acela de 12 mm) s'au rupt pretimpuriu, uneori într'o regiune cu diametrul mai mare decât cel mijlociu.

III. RELAŢIA DINTRE *P* şi *m*

Deşi numărul de cicluri corespunzător lui $m = 900$ minute este numai de cca 2.500.000 cifra pentru rezistenţa la oboseală poate fi considerată ca foarte aproape de aceea care ar reieşi dintr'o încercare cu 10^7 cicluri de încărcare. Reducerea timpului de încercare la aproximativ numai 25% din această valoare, permiţându-ne efectuarea unui număr corespunzător mai mare de încercări, i-am dat preferinţă. Acest procedeu este cu atât mai justificat, cu cât scopul urmărit nu era stabilirea limitei exacte de oboseală, ci numai o comparaţie.

Pentru a exprima relaţia dintre sarcina variabilă *P* şi durata de încercare *m*, am pornit dela expresia

$$P_c = a.\ \log m + b$$

Coeficienţii *a* şi *b* au fost determinaţi prin metoda celor mai mici patrate, care conduce la ecuaţiile normale:

$$a.\ \Sigma (\log m)^2 + b.\ \Sigma \log m = \Sigma\ P \log m$$
$$a.\ \Sigma \log m + b.\ \Sigma\ 1 = \Sigma\ P$$

Dăm mai jos calculul numeric al acestor ecuaţii, soluţiile lor şi diferenţele dintre valorile calculate P_c şi cele efectiv constatate *P*.

TABLOUL Nr. 6

Calculul coeficienților a *și* b *pentru starea normalizată*

Nr.	*P* kg	m	log m	(log m)²	*P*. log m	*Pc* kg	*Pc* — *P* kg
1	25,405	320	2,50 515	6,27 58	63,644	25,042	— 0,363
2	24,245	420	2,62 325	6,88 14	63,601	24,545	+ 0,300
3	23,956	700	2,84 510	8,09 46	68,157	23,613	— 0,343
4	23,818	840	2,92 428	8,55 14	69,651	23,280	— 0,538
5	23,605	630	2,79 934	7,83 63	66,078	23,805	+ 0,200
6	23,409	605	2,78 176	7,73 82	65,118	23,879	+ 0,470
7	23,045	875	2,94 201	8,65 53	67,798	23,206	+ 0,161
8	23,045	900	2,95 424	8,72 74	68,086	23,154	+ 0,109

Σ P. = 190,528 Σ log m = 22,375 Σ (log)² = 82,760 Σ P. log = 532,127

62,760 a + 22,375 b = 532,127

22,375 a + 8 b = 190,528

a = — 4,203 b = 35,571

P_c = 35,571 — 4,203 log m (P_c în kg, m în minute) $m \leq 900$

Cea mai mare diferență între P_c și P este de 0,538 kg, adică 100.0,538/23,818 = 2,25% din valoarea respectivă a lui P.

TABLOUL Nr. 7

Calculul coeficienților a *și* b *pentru ecruisajul de* 2%

Nr.	*P* kg	*m*	log *m*	(log *m*)²	*P* log m	*Pc* kg	*Pc* — *P* kg
1	25,980	660	2,81 954	7,94 98	73,251	25,692	— 0,288
2	25,914	620	2,79 239	7,79 74	72,362	25,962	+ 0,048
3	25,580	630	2,79 934	7,83 63	71,607	25,898	+ 0,318
4	25,420	720	2,85 733	8,16 43	72,633	25,315	— 0,105
5	25,180	860	2,93 450	8,61 12	73,891	24,545	— 0,635
6	25,045	900	2,95 424	8,72 74	73,989	24,348	— 0,697
7	24,021	880	2,94 448	8,66 99	70,729	24,446	+ 0,425
8	23,409	900	2,95 424	8,72 74	69,155	24,348	+ 0,939

Σ *P*. = 200,549 Σ log = 23,056 Σ (log)² = 66,484 Σ P log = 577,617

66,484 a + 23,056 b = 577,617

23,056 a + 8 b = 200,549

a = — 9,972 b = 53,808

P_c = 53,808 — 9,972 log m (P_c în kg m în minute) $m \leq 900$

Cea mai mare diferență între P_c și P este 0,939 kg, adică 100.0, 939/23,409 = 1,1% din valoarea respectivă a lui P.

TABLOUL Nr. 8

Calculul coeficienților a *și* b *pentru ecruisajul de* 6%

Nr.	*P* kg	*m*	log *m*	(log *m*)²	*P*. log m	*Pc* kg	*Pc* — *P* kg
1	26,520	600	2,77 815	7,71 81	73,676	26,491	— 0,029
2	26,414	640	2,80 618	7,87 46	74,122	26,198	— 0,215
3	26,080	680	2,83 251	8,02 31	73,872	25,922	— 0,158
4	25,545	720	2,85 733	8,16 49	72,991	25,663	+ 0,118
5	25,170	765	2,88 366	8,31 55	72,582	25,388	+ 0,218
6	24,855	900	2,95 424	8,72 74	73,428	24,650	— 0,205
7	24,380	900	2,95 424	8,72 74	72,024	24,650	+ 0,270

$\Sigma P. = 178{,}964 \quad \Sigma \log = 20{,}066 \quad \Sigma (\log)^2 = 57{,}551 \quad \Sigma P \log = 512{,}695$

$57{,}551\ a + 20{,}066\ b = 512{,}695$

$20{,}066\ a + 7\ b = 178{,}964$

$a = -10{,}451 \qquad b = 55{,}525$

$P_c = 55{,}525 - 10{,}451 \log m$ (P_c în kg m în minute) $m \leq 900$

Cea mai mare diferenţă între Pc şi P este 0,270 kg adică 100.0,270/24,380=1,1 % din valoarea respectivă a lui P.

TABLOUL Nr. 9

Calculul coeficienţilor a şi b pentru ecruisajul de 8%

Nr.	P kg	m	log m	$(\log m)^2$	$P \log m$	P_c kg	$P_c - P$ kg
1	30,318	200	2,30 103	5,29 47	69,763	29,978	— 0,340
2	28,110	320	2,50 515	6,27 58	70,420	28,359	+ 0,249
3	27,862	350	2,54 407	6,47 23	70,883	28,050	+ 0,188
4	26,503	508	2,70 586	7,32 17	71,713	26,767	+ 0,264
5	25,530	780	2,89 209	8,36 42	73,835	25,291	— 0,239
6	24,693	900	2,95 424	8,72 74	72,949	24,798	+ 0,105
7	25,032	900	2,95 424	8,72 74	73,951	24,798	— 0,234

$\Sigma P. = 188{,}048 \quad \Sigma \log = 18{,}857 \quad \Sigma (\log)^2 = 51{,}184 \quad \Sigma P \log = 503{,}514$

$51{,}184\ a + 18{,}857\ b = 503{,}514$

$18{,}857\ a + 7\ b = 188{,}048$

$a = -7{,}929 \qquad b = 48{,}222$

$P_c = 48{,}222 - 7{,}929 \log m$ (P_c în kg m în minute) $m \leq 900$

Cea mai mare diferenţă între P_c şi P este 0,340 kg, adică 100.0,340/30,318 = 1,1 % din valoarea respectivă a lui P.

Expresiile pentru P_c sunt reprezentate în figura 3. Dela valoarea lui P_c pentru $m = 900$ minute, diagramele constau (cu suficientă precizie) în orizontale. Valorile corespunzătoare au servit ca verificare (rubricile 9 şi 10 în tablourile Nr. 2 şi 3, respectiv 8 şi 9 în tablourile Nr. 4 şi 5).

Transformarea relaţiilor dintre P_c şi m în relaţii între σ şi n se obţine prin substituirile $\sigma = 0{,}66\ P + 12{,}48$ kg/mm² şi $m = n2850$. Reiese: $\sigma = 0{,}66\ a \log n + 12{,}48 + 0{,}66\ (b - \log 2850)$ unde a şi b sunt soluţiile ecuaţiilor normale de mai sus.

Din tablourile Nr. 6, 7, 8, şi 9 se obţine pentru m=900 minute, deci pentru n=2 565.000, valoarea limitei de oboseală după cum urmează:

în starea normalizată	0,66. 23,154 + 12,48 = 27,76	kg/mm²
după ecruisajul de	2%	0,66. 24,348 + 12,48 = 28,55	«
« « «	6%	0,66. 24,650 + 12,48 = 28,75	«
« « «	8%	0,66. 24,798 + 12,48 = 28,85	«

IV. CONSIDERAŢII FINALE

Punctul de plecare al cercetărilor noastre a fost problema dacă prin ecruisaj rezistenţa la oboseală este sau nu redusă. Valorile corespunzătoare unui număr de cca 2.500.000 de cicluri arată că ele cresc uşor, dela 27,76 kg/mm² în starea normalizată, la 28,85 kg/mm² în starea ecruisantă cu 8%. In aparenţă limita de oboseală este deci uşor sporită, aşa că ecruisajul pare a fi favorabil.

Cu totul altfel apare rezultatul încercărilor însă, dacă se face raportul dintre cifra de oboseală şi cea de rupere la tracţiune. Acest raport are următoarele valori:

Normalizat	Ecruisat 2%	Ecruisat 6%
100.27,76/67,1 = 41,3%	100.28,55/74,7 = 38,2%	100.28,75/77,9 = 36,9%
Ecruisat 8%		
100.28,85/78,2 = 37,0%		

Raportul normal însă găsit de noi și de alții de nenumărate ori, depășește 40%, adesea chiar și 50%. Descreșterea valorii raportului arată deci clar, că ecruisajul a exercitat o influență defavorabilă.

Este interesant de reținut că această influență se manifestă într'o măsură aproape egală chiar la ecruisajuri slabe.

Examinarea microscopică nu a condus la vreo explicație a reducerii raportului dintre limita de oboseală și cea de rupere. Deformațiile grăunților în urma ecruisajului erau imper-

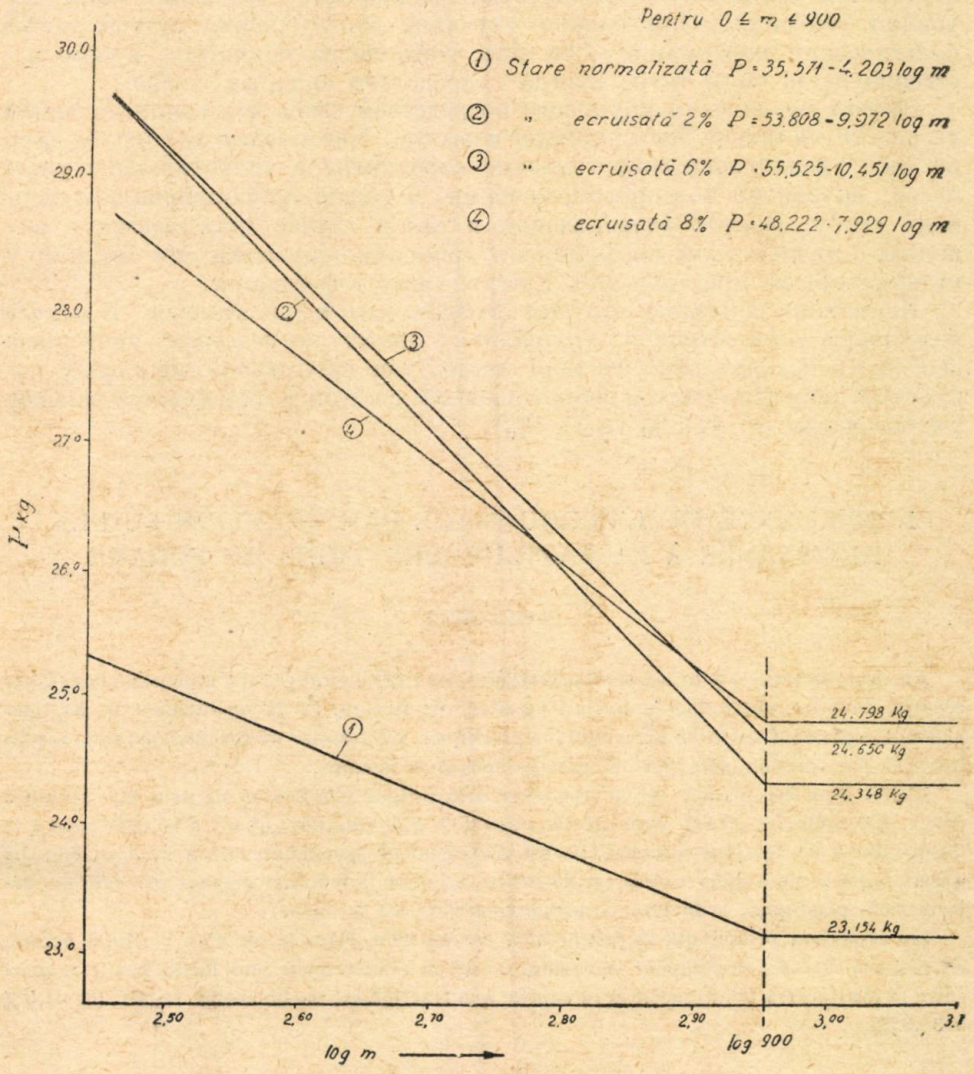


Fig. 3

ceptibile, microfisuri în piesele ecruisate, dar neîncercate, nu au putut fi găsite. Se pare deci că explicația trebue căutată în domeniul texturilor.

Influența defavorabilă a ecruisajului este dovedită aici sub formă principială. Este de așteptat ca încercări de oboseală, efectuate nu cu epruvete în stare uscată, ci lucrând într'un mediu lichid, adică în împrejurări asemănătoare cu acelea din realitate, să conducă la explicarea completă a acelor ruperi, pentru care cercetările uzuale de laborator de până acum nu au putut determina cauzele.

ВЛИЯНИЕ ХРУПКОСТИ, ВЫЗВАННОЙ СИЛОЙ ТЯГИ, НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ В БУРИЛЬНЫХ ШТАНГАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Бурильные штанги подвергаются во время работы в скважинах повторным усилиям, из числа которых наиболее важными являются усилия сгибания. Они однако случайно могут подвергнуться также пластическим деформациям, то есть стать более хрупкими, преимущественно из-за силы тяги, иногда посредством сильных сгибов.

Эффект увеличения хрупкости посредством сгиба над сопротивлением усталости не может быть априори известен. Увеличение хрупкости само по себе увеличивает сопротивление силе тяги, а сопротивление усталости, вызванной повторными сгибами, в общем пропорционально первому сгибу. Вопрос возникающий в таком случае заключается в выяснении является ли коэффициент пропорциональности тем же как у материалов, не претерпевших пластических деформаций.

Испытания доказали, что этот коэффициент непостоянный. В случае материала с измененной хрупкостью ломка посредством повторных сгибов происходит относительно легче, так как отношение между сопротивлением усталости и сопротивлением силе тяги оказывается заметно уменьшенным (от 41,3% до 37,3%).

L'INFLUENCE DE L'ÉCROUISSAGE PAR TRACTION SUR LA RÉSISTANCE À LA FATIGUE DES TIGES DE FORAGE

(RÉSUMÉ)

Au cours du travail dans les puits pétrolifères, les tiges de forage sont soumises à des efforts répétés, dont les plus importants sont les efforts de flexion. De façon incidentale, les tiges peuvent cependant subir des déformations plastiques, c'est-à-dire un écrouissage, soit, le plus souvent, par traction, soit, parfois, par de puissantes flexions.

L'effet d'un écrouissage sur la résistance à la fatigue par flexion ne peut être connu à priori. L'écrouissage en soi augmente la résistance à la traction; quant à la résistance à la fatigue due à des flexions répétées, elle est généralement proportionnelle à la première. La question qui se pose dans ce cas est de savoir si, pour le matériel n'ayant pas subi de déformations plastiques, le facteur de proportionnalité est le même.

Les essais ont prouvé que *ce facteur n'est pas constant.* Dans le cas d'un matériel écroui, les flexions répétées provoquent la cassure de façon relativement plus facile, car le rapport entre la résistance à la fatigue et la résistance à la traction est sensiblement réduit (de 41,3% à 37,3%).

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

PROBLEME ACTUALE ÎN LEGĂTURĂ CU VIBRAŢIILE SISTEMULUI TURBINĂ - GENERATOR

DE

AUGUSTIN PETRE

Cauzele vibraţiilor în sistemul turbină-generator pot fi, sau de natură electrică, sau de natură mecanică.

Vom lăsa la o parte vibraţiile provenind dela partea electrică, deoarece acestea depinzând de reţea şi de sistemul de reglaj adoptat, un studiu general al lor depăşeşte cadrul lucrării de faţă.

Vibraţiile ale căror cauze sunt de natură mecanică pot fi:

— Vibraţii provenind dela sistemul de reglaj.
— Vibraţii provenind din desechilibraj.
— Vibraţii provenind din acţiunea forţelor gravităţii.
— Vibraţii provenind dintr'un montaj neperfect.
— Vibraţii provenind dela palete.
— Vibraţii provenind din jocurile palierelor.

Studiul vibraţiilor provenind dela sistemul de reglaj a fost cercetat şi a făcut obiectul unei alte Comunicări.

Vibraţiile provenind din desechilibraj se pot înlătura printr'un echilibraj static şi dinamic, astfel încât un rotor bine echilibrat, practic, le elimină.

Vibraţiile provenind din acţiunea forţelor gravităţii se reduc în cele din urmă la studiul vibraţiilor de încovoiere ale arborelui, cu sarcinile permanente respective, constituind o problemă clasică.

Vibraţiile care provin dintr'un montaj imperfect, de exemplu montarea neperpendiculară pe arbore a discurilor, constitue şi ea o problemă clasică, astfel încât o vom lăsa la o parte (giroscop).

Vibraţiile provenind din jocul palierelor depind în cea mai mare măsură de sistemul de ungere şi se studiază odată cu aceasta experimental-teoretic.

Singura sursă de vibraţii care a mai rămas sunt paletele.

Paletele sunt supuse în primul rând la vibraţii forţate provenind din însuşi modul lor de acţionare.

Cercetările din ultimii ani au arătat că paletele mai pot fi şi sediul unor vibraţii autoexcitate.

Să ne ocupăm în primul rând de vibraţiile forţate ale paletelor.

Forţa perturbatoare este dată de repartiţia discontinuă a ajutajelor, iar frecvenţa ei depinde de numărul ajutajelor şi de vitesa de rotaţie.

In general, o paletă poate vibra la încovoiere axială tangențială sau la răsucire. Vibrații radiale ale paletelor se produc numai la un uzinaj imperfect al lor sau la variații neobișnuit de mari ale vitesei de rotație.

Incovoierea axială poate cădea peste frecvența de rezonanță, fie a paletei singure, fie a paletei împreună cu discul suport. Calculul frecvențelor proprii, atât ale paletei, cât și ale discului, nu prezintă greutăți prea mari, se găsește în orice tratat de specialitate și ca atare nu vom insista asupra lui.

Vibrațiile la răsucire nu prezintă importanță ca valoare numerică, astfel încât, de obicei, se neglijează.

Vibrațiile tangențiale ale paletelor, presupunând că lucrează independent una de alta, nu prezintă nicio dificultate de calcul.

Paletele sunt însă unite la bază prin coroana discului și eventual printr'un bandaj sau o sârmă.

Se formează astfel un sistem mai complicat care are particularitatea, după cum vom arăta îndată, de a amortiza anumite frecvențe și de a transmite mai departe arborelui altele.

Pentru simplificare [1] vom considera paleta ca o massă cu legături elastice. Pentru a face valabilă această simplificare constantele elastice ale legăturilor paletei trebue astfel determinate, încât frecvența proprie a unei palete reprezentată în forma simplificată să coincidă cu frecvența sa proprie reală.

Bandajul care leagă paletele poate fi și el reprezentat, fie numai printr'o legătură elastică, fie printr'o legătură elastică și o massă.

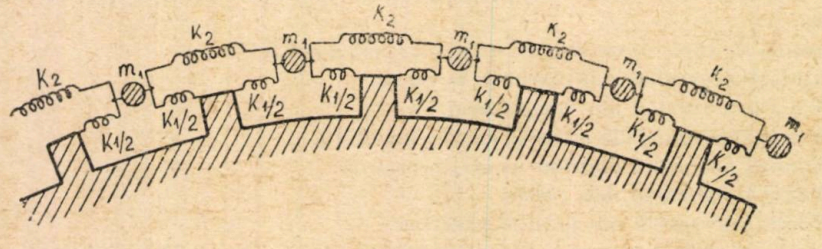


Fig. 1

Ecuația de mișcare a paletei care poartă numărul x va fi:

$$m_1 \ddot{y}_x = -k_2 (y_x - y_{x+1}) - k_2 (y_x - y_{x-1}) - k_1 y_x ,$$

unde m_1 este massa paletei, iar y_x este deplasarea relativă a paletei x față de poziția de echilibru.

Luând o soluție de forma

$$y_x = a_x e^{i\omega t} = a e^{\gamma x} e^{i\omega t}$$

vom obține

$$a_{x-1} - a_x \left(2 + \frac{k_1}{k_2} - \frac{m_1}{k_2} \omega^2\right) + a_{y+1} = 0$$

Se observă că această ecuație este o ecuație omogenă cu diferențe finite și cu coeficienți constanți.

Știind că $a_x = ae^{\gamma x}$ și notând paranteza cu C

$$2 + \frac{k_1}{k_2} - \frac{m_1}{k_2} \omega^2 = C$$

obținem

$$ae^{\gamma(x-1)} - C\,a\,e^{\gamma x} + ae^{\gamma(x+1)} = 0$$

sau

$$e^{\gamma} + e^{-\gamma} = C$$

de unde

$$\operatorname{ch}\gamma = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2} = \frac{C}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{k_2}\,\omega^2 - \frac{k_1}{k_2}\right)$$

și notând paranteza cu N, obținem

$$\operatorname{ch}\gamma = 1 - \frac{N}{2}$$

Cum în general γ este o mărime complexă $\gamma = \alpha + i\,\beta$ avem

$$ch\,\gamma = \operatorname{ch}(\alpha + i\,\beta) = \operatorname{ch}\alpha\cos\beta + i\operatorname{sh}\alpha\sin\beta = 1 - \frac{N}{2}$$

Deoarece cantitatea din dreapta este o mărime reală trebue ca,

$$\text{sau } \sin\beta = 0$$

$$\text{sau } \operatorname{sh}\alpha = 0$$

Prima soluție fiind imposibilă urmează că $\operatorname{sh}\alpha = 0$, deci dela o paletă la alta avem numai diferență de fază, iar în consecință $\operatorname{ch}\alpha = 1$.

$$\cos\beta = 1 - \frac{N}{2}$$

ceea ce înseamnă că

$$-1 \leqslant \left(1 - \frac{N}{2}\right) \leqslant 1$$

sau

$$0 \leqslant N \leqslant 4$$

In teoria filtrelor, acest interval corespunde zonei de scăpare.

Sistemul nostru va avea deci proprietăți de filtru, lăsând să treacă unele frecvențe și amortizând altele. Condiția precedentă se poate scrie

$$0 \leqslant \frac{m_1}{k_2}\,\omega^2 - \frac{k_1}{k_2} \leqslant 4$$

relație din care putem determina frecvențele care sunt lăsate să treacă.

Rezultatele de mai sus sunt valabile însă, pentru un sistem infinit. In cazul nostru, succesiunea de palete este finită și inelară. Va trebui deci, ca soluțiile ecuației cu diferențe finite, să țină seama de unele condiții la limită.

Deosebirea față de sistemul infinit aici este că paleta perturbată fiind un fel de origine de vibrații ce se întind în părți opuse și sistemul fiind inelar, acestea vor interfera.

In cazul nostru, presupunând că avem n palete, paleta 0 și n este aceeași paletă și va vibra după aceeași lege

$$y_0 = y_n = A\sin\omega t$$

Restul paletelor vor vibra cu aceeași frecvență, însă cu faze necunoscute

$$y_x = y_{x_1}\sin\omega t + y_{x_2}\cos\omega t.$$

Substituind această valoare în ecuația inițială și ținând seama că între o paletă și alta avem numai diferență de fază, vom obține

$$y_{x_1} = b_{11}\cos\beta x + b_{12}\sin\beta x$$

$$y_{x_2} = b_{21}\cos\beta x + b_{22}\sin\beta x$$

Soluția generală va fi deci

$$y_x = (b_{11} \cos \beta x + b_{12} \sin \beta x) \sin \omega t + (b_{21} \cos \beta x + b_{22} \sin \beta x) \cos \omega t$$

Ținând seama că paleta 0, respectiv n, este aceeași și că paletele perechi 1 și $n-1$, și așa mai departe, au în fiecare moment aceeași amplitudine, vom obține după oarecare transformări

$$b_{11}(1 - \cos \beta n) - b_{12} \sin \beta n = 0$$

$$b_{11}[\cos \beta - \cos \beta (n+1)] + b_{12}[\sin \beta - \sin \beta (n+1)] = 0$$

și analog pentru b_{21} și b_{22}.

Pentru calculul coeficienților b_{11}, b_{12}, b_{21} și b_{22}, sistemul fiind omogen, va trebui ca determinantul sistemului să fie nul. Desvoltând determinantul obținem

$$\Delta = \sin \beta (1 - \cos \beta n) = 0$$

deci trebue ca

fie $\sin \beta = 0$

fie $1 - \cos \beta n = 0.$

Prima condiție am văzut că este imposibilă.

Condiția a doua ne dă

$$\beta = 2\pi \frac{r}{n}$$

unde r este un număr întreg.

Știind pe de altă parte că

$$(\cos \beta = 1 - \frac{N}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{k_2}\omega^2 - \frac{k_1}{k_2}\right)$$

vom obține frecvențele paletei excitate pentru care intră în vibrație și alte palete

$$\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_1}} \sqrt{\frac{k_1}{k_2} + 4 \sin^2 \frac{\pi r}{n}}$$

Pentru $r = 0$ $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ adică frecvența este egală cu frecvența proprie a paletei. Totodată această frecvență corespunde cu limita inferioară de transparență a filtrului format de coroana cu palete

$$\frac{m_1}{k_2}\omega^2 - \frac{k_1}{k_2} = 0$$

Pentru $r = \frac{n}{2}$ $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1} + 4\frac{k_2}{m_1}}$, ceea ce corespunde limitei superioare a zonei de transparență a sistemului nostru

$$\frac{m_1}{k_2}\omega_2^2 - \frac{k_1}{k_2} = 4$$

In această zonă vom avea un număr de frecvențe pentru care intră în vibrație și alte palete, funcție de numărul total n al paletelor.

Astfel, pentru n par vom avea $\frac{n}{2} + 1$ frecvențe diferite, iar pentru n impar vom avea $\frac{n+1}{2}$ frecvențe diferite.

Nu s'a spus încă nimic despre forma vibrațiilor paletelor pentru aceste cazuri.

Vibrația paletelor este determinată dacă cunoaștem coeficienții b_{11}, b_{12}, b_{21} și b_{22}.

Luând sistemul care îi determină

$b_{11}(1 - \cos \beta n) - b_{12} \sin \beta n = 0$

$b_{11}[\cos \beta - \cos \beta n \cos \beta + \sin \beta n \sin \beta] + b_{12}[\sin \beta - \sin \beta n \cos \beta - \cos \beta n \sin \beta] = 0$ observăm că dacă se îndeplinește condiția $1 - \cos \beta n = 0$ rangul matricei coeficienților sistemului de mai sus este egal cu zero.

Vom avea în mod analog același lucru pentru coeficienții b_{21} și b_{22}. Rezultă deci că toate constantele sunt arbitrare.

Determinarea acestor constante necesită deci condiții suplimentare.

Una din ele este condiția $y_0 = y_n$

de unde rezultă

$$b_{11} = A$$

$$b_{21} = 0$$

Alte condiții ar fi condițiile inițiale, însă nu vom mai insista asupra lor.

Până acum ne-am ocupat de cazul în care o singură paletă ar fi fost excitată.

In realitate însă, nu avem forțe variabile, ci avem forțe constante repartizate neuniform. Prin rotația rotorului acestea dau naștere la forțele periodice ce se exercită asupra paletelor.

Să luăm o armonică a acestei forțe periodice.

Ea se va exercita asupra tuturor paletelor cu aceeași frecvență, dar cu diferență de fază

$$P = P_0 \cos (\omega t - \varphi)$$

iar vitesa mișcării vibratorii va fi

$$v = \frac{V_0}{2} \cos (\omega t - \psi)$$

Energia furnizată de această forță va fi

$$L = \int_0^T P.\, v.\, dt = \frac{\pi P_0\, V_0}{2\omega} \cos (\psi - \varphi).$$

Forțele respective, în realitate fiind foarte mici, pot să devină periculoase numai în rezonanță.

Să presupunem că coroana cu palete lucrează în zona de transparență.

Să căutăm să exprimăm diferența între fazele forței și a vitesei.

Să luăm ca origine paleta la care într'un moment dat $t = 0$ vitesa ei este zero. Să ne ocupăm de exemplu de vibrația ce se deplasează în sens contrar rotirei rotorului.

Să presupunem că după un timp anumit t vitesa vibrației a ajuns la paleta x.

In acest timp însă, paleta s'a deplasat cu distanța $s = tu$ unde u este vitesa periferică de rotație a rotorului.

Diferența de fază între paleta de origine și paleta numărul x, dacă rotorul ar fi fost în repaus, este $-\frac{xp}{R} r$ unde p este pasul paletei, R raza discului turbinei și r numărul de impulsuri pe întreaga coroană a turbinei. Deoarece rotorul se rotește în acest timp, diferența de fază va fi

$$-\frac{x\,p\,r}{R} + \frac{ut}{R} r$$

Deoarece $t\omega = x\beta'$, iar ω este de r ori vitesa de rotație a rotorului $\omega = r\,\frac{u}{R}$ obținem ca diferență de fază

$$-\frac{x\,p\,r}{R} + x\beta'$$

In mod analog pentru paleta numărul x luată în sens invers celei precedente, pentru vibrația ce se deplasează în sensul de rotație a rotorului vom avea diferența de fază

$$+\frac{x\,p\,r}{R}+x\beta'$$

Energia luată de paleta x din primul caz va fi

$$L'=\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}\cos\left[x\left(-\frac{p\,r}{R}+\beta'\right)\right]=\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}\cos\left[x\left(-2\pi\frac{r}{n}+\beta'\right)\right]$$

Energia luată de paleta x numărată în sens invers va fi pentru al doilea caz

$$L''=\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}\cos\left[x\left(2\pi\frac{r}{n}+\beta'\right)\right]$$

Energia luată de toate paletele prin deplasarea vibrației în sens contrar, respectiv în sensul rotirii rotorului după o perioadă va fi

$$\Sigma L'=\sum_{x=0}^{n-1}\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}\cos\left[x\left(-2\pi\frac{r}{n}+\beta'\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}\,\frac{\sin\left[\frac{n}{2}\left(-2\pi\frac{r}{n}+\beta'\right)\right]\cos\left(\pi r+\frac{\beta' n}{2}-\frac{\pi r}{n}-\frac{\beta'}{2}\right)}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{r}{n}+\beta'\right)\right]}$$

$$\Sigma L''=\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}\,\frac{\sin\left[\frac{n}{2}\left(2\pi\frac{r}{n}+\beta'\right)\right]\cos\left(\pi r+\frac{\beta' n}{2}-\frac{\pi r}{n}-\frac{\beta'}{2}\right)}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{r}{n}+\beta'\right)\right]}$$

Condiția de rezonanță este ca ΣL să fie maxim.

Pentru vibrații ce se deplasează în sens contrar rotirii rotorului, rezonanța are loc pentru

$$\beta'=2\pi\frac{r}{n}$$

iar lucrul mecanic corespunzător este

$$\Sigma L'=\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}n$$

Pentru aceeași condiție

$$\Sigma L''=\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}\,\frac{\sin 2\pi r\cos 2\pi\frac{r}{n}}{\sin 2\pi\frac{r}{n}}$$

este în general zero.

Fac excepție două cazuri. Unul corespunde valorii $r=\frac{n}{2}$ în care caz

$$\Sigma L''=\mp\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}n,$$

iar întreaga energie furnizată este sau nulă sau se dublează.

Al doilea caz are loc pentru $r=mn$, unde m este un număr întreg.

In acest caz $\Sigma L''=\frac{\pi P_0 V_0}{2\omega}n$, iar cantitatea de energie luată de coroană se dublează.

Pentru vibrații ce se deplasează în sensul de rotație al rotorului, condiția de maxim este $\beta' = -2\pi\frac{r}{n}$, de unde rezultă $\Sigma L'' = \frac{\pi P_0 V_0}{2\omega} n$, iar $\Sigma L' = 0$, deoarece r este un număr întreg.

Din rezultatele de mai sus, ținând seamă că r este numărul de impulsuri, adică practic numărul de ajutaje, putem spune că o primă consecință este să nu avem un număr de ajutaje care să fie multiplu sau submultiplu al numărului de palete. In acest caz se va păstra o singură undă călătoare, iar cealaltă neprimind energie dinafară se va amortiza și va dispare.

Condiția de rezonanță

$$\beta' = \pm 2\pi\frac{r}{n}$$

coincide — după cum se poate vedea ușor — cu condiția de transparență a sistemului de palete funcționând ca filtru.

★

Să ne ocupăm acum de vibrațiile autoexcitate ale paletelor turbinei.

Experiența a arătat că pentru o anumită viteză, paletele intră în vibrații fie de încovoiere, fie de răsucire.

Cum aceste vibrații se produc fără intervenția unei forțe variabile dinafară este vorba de vibrații autoexcitate.

Să presupunem [2] pentru moment că regimul aerodinamic este staționar, adică înlocuim curentul real printr'unul permanent în fiecare moment, neglijând în felul acesta o parte din pânza de vârtejuri ce se desprinde datorită variației în timp a circulației.

Forțele, în momentele care apar în cazul vibrațiilor la încovoiere și torsiune sunt:

Sarcini aerodinamice

$$q_{x_a} = \frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial\alpha}\rho b V^2\left[\theta + \frac{b}{V}\left(\frac{5}{4} - 2\frac{\bar{x}_c}{b}\right)\dot{\theta} + \frac{\alpha}{V}\dot{X} - \frac{1}{V}\dot{Y}\right]\alpha$$

$$q_{y_a} = \frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial\alpha}\rho b V^2\left[\theta + \frac{b}{V}\left(\frac{3}{4} - \frac{\bar{x}_c}{b}\right)\dot{\theta} + \frac{\alpha}{V}\dot{X} - \frac{1}{V}\dot{Y}\right]$$

$$m_{z_a} = \frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial\alpha}\rho b V^2\left(\frac{\bar{x}_c}{b} + \frac{\partial C_m}{\partial C_y}\right)\left\{\theta + \frac{b}{V}\left[\frac{3}{4} - \frac{\bar{x}_c}{b} - \frac{\pi}{8\frac{\partial C_y}{\partial\alpha}\left(\frac{\bar{x}_c}{b} + \frac{\partial C_m}{\partial C_y}\right)}\right]\dot{\theta} + \frac{\alpha}{V}\dot{X} - \frac{1}{V}\dot{Y}\right\}$$

Sarcini provenind din reacții elastice la deformație

$$q_{x_r} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EI_y\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}M_x$$

$$q_{y_r} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EI_x\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}M_y$$

$$m_{z_r} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(GI_p\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}M_z$$

Sarcini provenind din forțe de inerție

$$q_{x_i} = -\rho_m A\ddot{X} - \rho_m A\ddot{\theta}y_c$$

$$q_{y_i} = -\rho_m A\ddot{Y} + \rho_m A\ddot{\theta}x_c$$

$$m_{z_i} = -\rho_m I\ddot{\theta} + \rho_m A\ddot{X}y_c + \rho_m A\ddot{Y}x_c$$

Sistemul de referință s'a ales cu originea în punctul de încastrare a paletei, axa z în lungul ei, axa x în direcția coardei paletei, iar y perpendicular pe ele.

Notaţiile folosite sunt

b coarda paletei;

α incidenta paletei;

θ unghiul de torsiune pe unitatea de lungime a paletei;

$\bar{x}_c$ $\bar{y}_c$ coordonatele centrului de greutate al paletei;

X, Y deplasările după axele respective după încovoiere;

A aria secţiunii paletei;

x_c y_c coordonatele centrului de rigiditate al secţiunii paletei;

C_y, C_m coeficienţii de portanţă, respectiv moment, a profilului paletei;

V vitesa curentului;

ρ_m massa specifică a materialului paletei;

ρ massa specifică a curentului;

I moment de inerţie polar în raport cu centrul de rigiditate.

Ecuaţiile de mişcare se vor scrie

$$q_{x_r} - q_{x_i} - q_{x_a} = 0$$

$$q_{y_r} - q_{y_i} - q_{y_a} = 0$$

$$m_{z_r} - m_{z_i} - m_{z_a} = 0$$

Condiţiile la limită ale sistemului sunt pentru secţiunea de incastrare

$$z=0 \quad X=0 \; \frac{\partial X}{\partial z}=0 \quad Y=0 \; \frac{\partial Y}{\partial z}=0 \quad \theta=0$$

pentru capătul liber

$$z=l \quad \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}=0 \quad \frac{\partial^3 X}{\partial z^3}=0 \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=0 \quad \frac{\partial^3 Y}{\partial z^3}=0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}=0$$

Savantul sovietic A. B. Crol a luat soluţii de forma

$$X = Bf(z)\, e^{\lambda t}$$

$$Y = Cf(z)\, e^{\lambda t}$$

$$\theta = D\psi(z)\, e^{\lambda t}$$

unde funcţiile $f(z)$ şi $\psi(z)$ pot fi luate cele care dau vibraţiile proprii de încovoiere, respectiv de răsucire în vid.

$$f(z) = \operatorname{ch} kz - \cos kz - 0{,}734\,(\operatorname{sh} kz - \sin kz)$$

$$\psi(z) = \sin \frac{\pi}{2l} z \quad k = \frac{1{,}875}{l}.$$

Aplicând metoda lui Galerchin, înmulţim primele două ecuaţii cu $f(z)$ şi a treia cu $\psi(z)$ şi integrăm dela 0 la l.

Vom obţine sistemul

$$B(\lambda^2 c_{11} + 3\lambda d_{11} V\alpha^2 + \bar{a}_{11}) + C(-\lambda d_{11} V\alpha) + D(\lambda^2 \bar{c}_{12} - \lambda d_{12} V\alpha - b_{12} V^2\alpha) = 0$$

$$B(-3\lambda d_{11} V\alpha) + C(\lambda^2 c_{11} + \lambda d_{11} V + a_{11}) + D(\lambda^2 c_{12} + \lambda d_{12} V + b_{12} V^2) = 0$$

$$B(-\lambda^2 \bar{c}_{12} - 3\lambda d_{21} V\alpha) + c(\lambda^2 c_{12} + \lambda d_{21} V) + D(\lambda^2 c_{22} + \lambda d_{22} V + b_{22} V^2 + a_{22}) = 0,$$

unde

$$\bar{a}_{11} = \int_0^l EI_y \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]^2 dz$$

$$a_{11} = \int_0^l EI_x \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]^2 dz$$

$$a_{22} = \int_0^l GI_p \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]^2 dz$$

$$b_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}\rho \int_0^l b\,\psi f\,dz$$

$$b_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}\rho \int_0^l b^2\left(\frac{\bar{x}_c}{b} - \frac{1}{4}\right)\psi^2\,dz$$

$$d_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}\rho \int_0^l b\,f^2 dz$$

$$d_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}\rho \int_0^l b^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\bar{x}_c}{q}\right) f\,\psi dz$$

$$d_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}\rho \int_0^l b^2\left(\frac{5}{4} - 2\,\frac{\bar{x}_c}{b}\right) f\,\psi dz$$

$$d_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}\rho \int_0^l b^2\left(\frac{\bar{x}_c}{b} - \frac{1}{4}\right) f\,\psi dz$$

$$d_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}\rho \int_0^l b^3\left(\frac{\bar{x}_c}{e} - \frac{1}{4}\right)\left[\frac{3}{4} - \frac{x_c}{b} - \frac{\pi}{8\,\dfrac{\partial C_y}{\partial \alpha}\left(\dfrac{\bar{x}_c}{b} - \dfrac{1}{4}\right)}\right]\psi^2 dz$$

$$c_{11} = \rho_m \int_0^l A f^2\,dz$$

$$c_{12} = c_{21} = \rho_m \int_0^l A f\,\psi x_c\,dz$$

$$c_{22} = \rho_m \int_0^l I\psi^2\,dz$$

$$\bar{c}_{12} = \rho_m \int_0^l A y\,f\psi\,dz$$

Pentru a avea soluții diferite pentru B, C, D trebue ca determinantul sistemului să fie nul.

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 c_{11} + 3\lambda\alpha_{11} V\alpha^2 + a_{11} & -\lambda d_{11} V\alpha & \lambda^2 \bar{c}_{12} - \lambda \bar{d}_{12} V\alpha - b_{12} V^2\alpha \\ -3\lambda\, d_{11} V\alpha & \lambda^2 c_{11} + \lambda d_{11} + a_{11} & \lambda^2 c_{12} + \lambda d_{12} V + b_{12} V^2 \\ -\lambda^2 \bar{c}_{12} - 3\lambda d_{21} V\alpha & \lambda^2 c_{12} + \lambda d_{21} V & \lambda^2 c_{22} + \lambda d_{22} V + b_{22} V^2 + a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

de unde obținem

$$\lambda^6 k_{60} + \lambda^5 k_{51} V + \lambda^4 \left(k_{40} + k_{42} V^2\right) + \lambda^3 \left(k_{31} V + k_{33} V^3\right) + \\ + \lambda^2 \left(k_{20} + k_{22} V^2\right) + \lambda \left(k_{11} V + k_{12} V^3\right) + \left(k_{00} + k_{02} V^2\right) = 0$$

unde

$$k_{60} = c_{11}^2 c_{22} - c_{12}^2 c_{11}$$

$$k_{51} = 3d_{11}\alpha^2 \left(c_{11} c_{22} - c_{12}^2\right) + c_{11} d_{11} c_{22} - c_{11} d_{21} c_{12} + c_{11}^2 d_{22} - c_{11} d_{12} c_{21}$$

$$k_{40} = \bar{a}_{11} c_{11} c_{22} - \bar{a}_{11} c_{12}^2 + c_{11} a_{11} c_{22} + c_{11}^2 a_{22}$$

$$k_{42} = c_{11}^2 b_{22} - c_{11} b_{12} c_{21} + c_{11} d_{11} d_{22} - c_{11} d_{12} d_{21} + 3\alpha^2 (c_{11} d_{11} d_{22} -$$
$$- c_{12} d_{11} d_{12} + c_{12} d_{11} \bar{d}_{12} - c_{11} d_{21} \bar{d}_{12})$$
$$k_{31} = \bar{a}_{11} (d_{11} c_{22} - c_{12} d_{21} + c_{11} d_{22} - d_{12} c_{21}) + 3 d_{11} \alpha^2 (a_{11} c_{22} + c_{11} a_{22}) +$$
$$+ c_{11} (a_{11} d_{22} + d_{11} a_{22})$$
$$k_{33} = c_{11} (b_{22} d_{11} - b_{12} d_{21}) + 3\alpha^2 [c_{11} (b_{22} d_{11} - b_{12} d_{21}) + d_{11} \bar{d}_{12} (d_{21} - d_{12})]$$
$$k_{20} = \bar{a}_{11} (a_{11} c_{22} + c_{11} a_{22}) + a_{11} a_{22} c_{11}$$
$$k_{22} = \bar{a}_{11} (c_{11} b_{22} - b_{12} c_{21} + d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}) + a_{11} b_{22} c_{11} +$$
$$+ 3\alpha^2 a_{11} (d_{11} d_{22} - d_{21} \bar{d}_{12})$$
$$k_{11} = \bar{a}_{11} (a_{11} d_{22} + d_{11} a_{22}) + 3 d_{11} \alpha^2 a_{11} a_{22}$$
$$k_{13} = \bar{a}_{11} (b_{22} d_{11} - b_{12} d_{21}) + 3 d_{11} \alpha^2 a_{11} b_{22} - 3 d_{21} \alpha^2 a_{11} b_{12}$$
$$k_{00} = \bar{a}_{11} a_{11} a_{22}$$
$$k_{02} = \bar{a}_{11} a_{11} b_{22}$$

Vitesa critică corespunde pentru o pereche de rădăcini imaginare $\lambda = \pm ip$ din ecuaţia de mai sus. Substituind $\lambda = ip$ şi separând partea reală de cea imaginară, obţinem două ecuaţii din care putem determina pe p şi pe V critic

$$- k_{60} p^6 + (k_{40} + k_{42} V_{cr}^2) p^4 - (k_{20} + k_{22} V_{cr}) p^2 + (k_{00} + k_{02} V_{cr}^2) = 0$$
$$k_{51} p^4 - (k_{31} + k_{33} V_{cr}^2) p^2 + (k_{11} + k_{13} V_{cr}^2) = 0 .$$

Rezultatele de mai sus au fost găsite de cercetătorul sovietic A. P. C r o l.

Din examinarea ipotezelor şi conducerii calculelor lui C r o l rezultă următoarele:

Teoretic, rezultatele obţinute pot fi considerate ca definitive din punct de vedere calitativ.

Faptul că se bazează pe ipoteza staţionarităţii regimului aerodinamic permite un calcul exact al repartiţiei sarcinilor şi deci, al regimului de oscilaţie. Această exemplificare însă, are anumite influenţe cantitative asupra rezultatelor inerente calculelor aerodinamice actuale. In consecinţă, este de aşteptat ca forma cantitativă a rezultatelor lui C r o l să fie dată după ce pe cale experimentală, se vor fi stabilit exact coeficienţii de corecţie necesari.

Alt aspect al cercetării vibraţiilor autoexcitate este acela care porneşte dela un regim aerodinamic nestaţionar [3] ţinând seama de pânza de vârtejuri adiţională ce variază în timp.

Aceasta face ca la o variaţie de incidenţă sau vitesă, portanţa corespunzătoare să nu se producă instantaneu, ci abia după o anumită durată de timp, în care vârtejul suplimentar produs s'a depărtat suficient.

Să reluăm cazul paletelor legate printr'un bandaj. In acest caz nu se vor produce vibraţii autoexcitate, ci numai vibraţii la torsiune.

La o variaţie bruscă a lui α portanţa nu creşte brusc la valoarea corespunzătoare, ci ajunge la această valoare după un anumit timp.

Pentru o variaţie $\Delta\alpha$ a incidenţei paletei avem următoarea variaţie a momentului

$$\Delta M_A (t) = F_M (t) \frac{dCm}{d\alpha} \frac{\rho}{2} b S V^2 \Delta\alpha,$$

unde F_M dă cuplul aerodinamic ce urmează unei variaţii brusce a lui α.

Avem evident $Fm(\infty) = 1$

Să presupunem acum că aripa vibrează în jurul unei poziții de echilibru. Cuplul aerodinamic va varia și el, însă amplitudinea și faza nu vor fi aceleași. Vom avea deci,

$$\Delta M_A(t) = f_M(i\omega)\frac{dC_m}{d\alpha}\frac{\rho}{2}bSV^2\Delta\alpha.$$

Vom avea evident $f(0) = 1$.

Funcția $f(i\omega)$ se poate defini chiar prin relația precedentă.

Cum funcțiile $f(i\omega)$ și $F(t)$ reprezintă același fenomen fizic, între ele există relații ce se pot preciza prin analiza simbolică.

Putem ajunge dela o funcție la cealaltă prin transformata lui Laplace.

Vom avea deci,

$$f(i\omega) = i\omega\int_0^\infty F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt.$$

Dacă cunoaștem una din funcții teoretic sau experimental, vom putea găsi pe cealaltă printr'o integrală.

Vom putea astfel să ne ocupăm de funcția $f(i\omega)$, care se poate numi funcție de transfert de oscilații dela unghi de atac la cuplu aerodinamic.

Să considerăm acum cuplul ΔM aplicat unei aripi reale.

Aceasta va oscila cu amplitudinea

$$\Delta\alpha_2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{1}{K}\Delta M,$$

unde

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I}$$

iar I este momentul de inerție masic și

K este constanta elastică a sistemului ($\Delta M = K\,\Delta\alpha$).

Eliminând pe ΔM din ecuațiile de mai sus obținem

$$\Delta\alpha_2 = f_M(i\omega)\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{dC_m}{d\alpha}\frac{S}{K}\frac{b}{2}\frac{\rho}{2}V^2\,\Delta\alpha,$$

sau notând cu

$$\frac{\rho}{2}V^2 = p_s \quad \text{și} \quad \frac{K}{SbdC_m} = p_k$$

$$\Delta\alpha_2 = f_M(i\omega)\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{p_s}{p_k}\Delta\alpha_1$$

In realitate avem evident, $\Delta\alpha_1 \equiv \Delta\alpha_2$.

Vom aplica criteriul de stabilitate a lui Nyquist funcției

$$f = f_M(i\omega)\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{p_s}{p_k}$$

Criteriul lui Nyquist spune că pentru ca un sistem să fie stabil, caracteristica frecvențială, curba lui Nyquist să nu înconjure punctul (+ 1) de pe axa reală.

Curba lui Nyquist este reprezentarea în planul complex al transformatei lui Laplace pentru argumente imaginare.

Se observă dela început că pentru $p_s = p_k$ sistemul nu este stabil, deoarece pentru $\omega = 0$, $f = +1$.

Deoarece $F(f)$ depinde de viteză și pentru diferite vitese avem curbe diferite F și f vom face următoarele schimbări de variabilă.

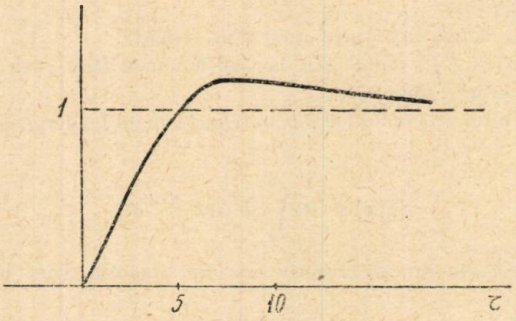


Fig. 2

Vom introduce un timp fără dimensiuni a cărui unitate este durata trecerii aerului peste paletă, deci $\tau = t\frac{V}{b}$, iar în f vom introduce ca variabilă $i\,\Omega = i\omega\frac{b}{V}$ a cărei unitate de pulsație este inversa duratei trecerii aerului peste paletă.

Curba $F(\tau)$ pentru un profil dat are forma din figura 2 și se poate determina fie teoretic, fie experimental. Curba lui Nyquist a funcției $f_M(\Omega)$ în noile variabile are forma din figura 3.

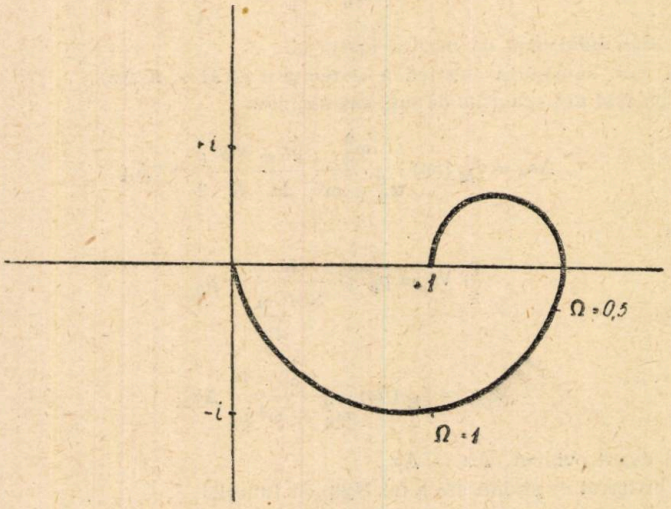


Fig. 3

Din cauza factorului $\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$ vom avea o asimptotă pentru $\Omega = \Omega_0$; curba lui Nyquist a funcției $f_M(\Omega)\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$ va avea forma din figura 4. Notând cu Ω' valoarea

lui Ω pentru care curba lui Nyquist a funcției $f_M(\Omega)$ taie axa pozitivă reală și cu accent valorile funcțiilor corespunzătoare, se observă că $\Omega = \Omega'$ este valoarea minimă a lui Ω, pentru care curba lui Nyquist a funcției $f_M(\Omega)\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$ înconjură sigur complet axa reală pozitivă, deoarece curba se închide la infinit în sensul acelor unui ceasornic (fig. 5).

Aplicând criteriul de stabilitate al lui Nyquist pentru funcția f, vom avea pentru $\Omega < \Omega'$ nestabilitate pentru valoarea lui p_s care face $f = 1$. Pentru $\Omega > \Omega'$ avem nestabilitate în orice caz, pentru orice valoare a lui p_s.

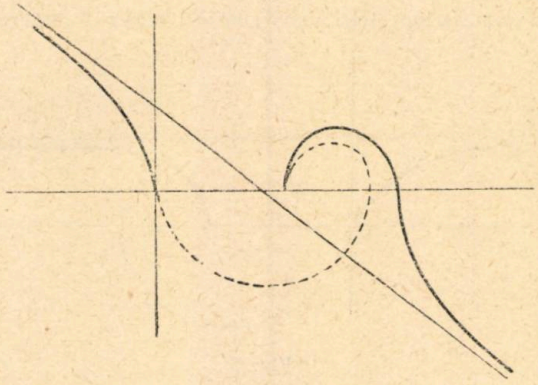


Fig. 4

Valoarea minimă pentru vitesa la care încep vibrații autoexcitate este determinată deci, de relația

$$f = f'_M \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \quad^2} \frac{p'_s}{p'_k} = 1,$$

în care dacă introducem valoarea lui p_k și obținem pulsația minimă a vibrației autoexcitată

$$\omega'^2 = \frac{K}{I + \frac{f'_M}{2\Omega'} \frac{dC_m}{d\alpha} \rho b^3 S}$$

Cantitatea dela numitor se poate interpreta ca momentul de inerție al paletei I și momentul de inerție al aerului ce vibrează împreună cu paleta I_A.

Vom avea deci,

$$\omega'^2 = \frac{K}{I + I_A}$$

iar valoarea vitesei pentru care încep vibrațiile autoexcitate la torsiune se poate scoate din relația

$$p'_s = \frac{p_k}{f'_M} \frac{I_A}{I + I_A}$$

Această metodă se poate aplica și pentru vibrații transversale.

Vom avea în acest caz

$$\Delta\alpha = -\frac{y'}{V}$$

Notând cu $f_p\ (i\omega)$ funcţia de transfert pentru variaţii de portanţă şi urmând aceeaşi metodă, constatăm că curba lui Nyquist nu taie axa reală pozitivă şi deci, nu sunt posibile vibraţii transversale autoexcitate. Rezultatele de mai sus au fost găsite de M e l d a h l.

Acestor rezultate li se poate aduce obiecţia că deşi ipoteza fundamentală este pe deplin justificată, totuşi desvoltarea calculelor introduce o serie de ipoteze simplificatoare (de exemplu, relaţia $\Delta\alpha = K\,\Delta M$, care liniarizează fenomenul), or, este ştiut că tratarea quasiliniară a fenomenului oscilator nu permite totdeauna să se urmărească exact fenomenul şi câteodată poate duce la erori apreciabile. Rămâne ca o verificare experimentală cantitativă să arate în ce măsură rezultatele lui M e l d h a l corespund realităţii.

Rezultatele de mai sus au fost obţinute după cum s'a văzut din calcule, neglijându-se influenţa reciprocă a elementelor reţelei, adică considerându-se o singură paletă.

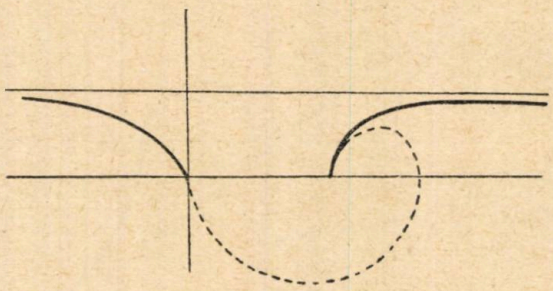


Fig. 5

Experimentele aerodinamice din ultimele decenii au confirmat că la turbomaşini cu puţine palete (ventilatoare axiale, elice de avion, etc.) influenţa reciprocă a paletelor poate fi practic neglijată. La turbomaşini cu multe palete însă, este îndoielnic dacă această interacţiune poate fi neglijată.

Să reluăm acum problema pentru două grade de libertate [4]. In acest caz însă, având şi deplasări, trebue să ţinem seama că paleta se găseşte într'un câmp de vitese variabile funcţie de poziţie din cauza viteselor induse de celelalte palete.

Ţinând seama de celelalte palete, vitesa într'un punct la distanţa y faţă de paleta de care ne ocupăm, va fi

$$V_\infty - \frac{2\,\Gamma\frac{y}{p}}{2\,\pi\,p}\varkappa$$

unde p este pasul reţelei de palete, iar $\varkappa$ este seria $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$.

Pentru simplificare putem considera că vitesa este constantă, însă variază unghiul de incidenţă, astfel încât să se obţină portanţa reală.

Vom avea astfel paleta vibrând într'un curent uniform având însă un unghiu de incidenţă funcţie de poziţia care o ocupă.

Forţele aerodinamice la care este supusă o astfel de paletă se pot calcula ca mărimi complexe şi se pot exprima cu ajutorul funcţiei P definită ca

$$P = A + i\,B = \frac{1}{1 + i\frac{H_0^{(2)}}{H_1^{(2)}}}$$

unde $H_0^{(2)}$ şi $H_1^{(2)}$ sunt funcţiile lui Hankel de argument $2\,\Omega_0$, unde $\Omega_0 = \omega_0 \frac{b}{V}$.

In acest caz, ținând seama și de oblicitatea rețelei, **Bellenot** și **d'Epinay** au găsit într'o primă aproximație vitesa critică la limita de stabilitate ce se poate deduce din relația

$$\frac{V}{\omega_0 b} = \frac{\left[\frac{1}{\alpha_0 \left(\frac{b}{p}\right)^2 m \cos(\varphi - \psi} + \frac{1}{4}\right] A + \frac{1}{4}}{B}$$

pentru încovoiere, iar pentru torsiune

$$\frac{V}{\omega_0 b} = \frac{1 - A}{4 Br},$$

unde

$$m = \frac{\alpha_0 [2 \alpha_0 \cos(2\delta + \psi) - \sin(2\delta + \psi)]}{1 - \frac{2b\alpha_0}{p} \sin\delta \cos 2\delta}$$

$$r = 2\frac{b}{p} \frac{\sin\delta \cos 2\delta}{1 - \frac{2b\alpha_s}{p} \sin\delta \cos\delta}$$

α_0 unghiul de incidență al paletei,

δ unghiul de calaj al rețelei,

ψ unghiul între normala la axul de portanță nulă și direcția după care se deplasează paleta în vibrație.

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ В СВЯЗИ С ВИБРАЦИЕЙ ГЕНЕРАТОРНЫХ ТУРБИННЫХ СИСТЕМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Сообщается об успехах, достигнутых в последнее время в вычислении вибраций турбин.

Вначале представляется вычисление для касательных вибраций связанных лопастей. Связанные лопасти составляют фильтр вибраций. Проходящие частоты представляют прерывистый спектр, а резонанс имеет место для разницы фаз между лопастями, значение которой есть

$\beta = 2\pi \frac{r}{n}$ для волны, перемещающейся в смысле обратном вращению ротора и

$\beta' = -2\pi \frac{r}{n}$ для волны, перемещающейся в смысле вращения ротора.

В этих соотношениях r представляет число импульсов по всей короне турбины, а n представляет число лопастей.

Когда частота противодействующей силы совпадает с частотой, вытекающей из вышеприведенных соотношений, тогда имеется случай опасного резонанса, так как образуется волна, амплитуда которой со временем возрастает.

Вышеприведенные соотношения действительны тогда, когда число лопастей не является кратным или подкратным числа насадок.

В противном случае для

$\beta' = 2\pi \frac{r}{n}$ имеется резонанс как для волны, перемещающейся в смысле вращения ротора, так и для волны, перемещающейся в обратном смысле вращения ротора.

Затем приводят несколько методов вычисления самовозбужденных вибраций лопастей.

Первый метод основывается на упрощающей гипотезе стационарности аэродинамического режима. Далее приводится вычисление, основанное на методе приближения советского ученого Галеркина.

Критическая скорость V_{cr} есть пульсация p из соотношений :

$$-k_{60}p^6 + (k_{40} + k_{42}V_{cr}^2)p^4 - (k_{20} + k_{22}V_{cr}^2)p^2 + (k_{00} + k_{02}V_{cr}^2) = 0$$

$$k_{51}p^4 - (k_{31} + k_{33}V_{cr}^2)p^2 + (k_{11} + k_{12}V_{cr}^2) = 0,$$

для которых значение букв дано в докладе.

Затем представлены два метода, основанные на гипотезе нестационарности аэродинамического режима. Один метод рассматривает вибрации со степенью свободы при помощи символического вычисления и критерия устойчивости Никиста.

Минимальная пульсация самовозбужденной вибрации для вибраций кручения дано отношением

$$\omega^2 = \frac{K}{I + \frac{f'_n}{2\Omega'} \frac{dCm}{d\alpha} \rho b^3 S'}$$

а значение скорости при которой появляются такого рода вибрации выводится из отношения

$$p'_s = \frac{p_k}{f'_K} \frac{I_A}{I + I_A},$$

где

$$I_A = \frac{f'_M}{2\Omega'} \frac{d\,Cm}{d\alpha} \rho b^3 S$$

Второй метод рассматривает вибрации с двумя степенями свободы изгиба и кручения, какие бывают в турбинах со свободными лопастями.

Критическая скорость на пределе устойчивости с учетом наклоненности сети лопастей может быть выведена из отношения :

$$\frac{V}{\omega_0 b} = \frac{\left[\frac{1}{\alpha_0 \left(\frac{b}{p}\right)^2 m \cos(\varphi - \psi)} + \frac{1}{4}\right] A + \frac{1}{4}}{B}$$

для изгиба, а для кручения из отношения

$$\frac{V}{\omega_0 b} = \frac{1 - A}{4Br},$$

для которых значения букв приведены в тексте доклада.

PROBLÈMES ACTUELES RELATIFS AUX VIBRATIONS DES SYSTÈMES TURBINES-GÉNÉRATEURS

(RÉSUMÉ)

Dans cet exposé, l'Auteur présente les derniers progrès concernant le calcul des vibrations des turbines.

On présente d'abord un calcul pour les vibrations tangentielles des palettes conjuguées; ces palettes constituent un filtre des vibrations. Les fréquences qui y passent, présentent un spectre discontinu et la résonance a lieu pour la différence de phase entre les palettes, dont la valeur est:

$$\beta = 2\pi \frac{r}{n}$$

pour l'onde qui se déplace en sens contraire de la rotation du rotor et

$$\beta' = -2\pi \frac{r}{n}$$

pour l'onde qui se déplace dans le sens du rotor.

Dans ces relations, r représente le nombre d'impulsions pour l'entière couronne de la turbine et n représente le nombre des palettes.

Si la fréquence de la force perturbatrice coïncide avec la fréquence résultant des relations ci-dessus, on aura un cas de résonance dangereuse, car il se forme une onde voyageuse dont l'amplitude augmente avec le temps.

Les relations ci-dessus sont valables si le nombre des palettes n'est pas un multiple ou un sous-multiple du nombre des ajutages.

Dans le cas contraire, pour $\beta' = 2\pi \frac{r}{n}$ on aura une résonance tant pour l'onde qui se déplace dans le sens du rotor que pour celle qui se déplace en sens contraire.

On présente ensuite quelques méthodes pour le calcul des vibrations autoexcitées des palettes.

Une première méthode est basée sur l'hypothèse simplifiante de la stationnarité du régime aérodynamique. L'Auteur présente ensuite un calcul basé sur la méthode d'approximation du savant soviétique Galerkine.

La vitesse critique V_{cr} est la pulsation p des relations:

$$-k_{60}\,p^6 + \left(k_{40} + k_{42}\,V_{cr}^2\right)p^4 - \left(k_{20} + k_{22}\,V_{cr}^2\right)p^2 + \left(k_{00} + k_{02}\,V_{cr}^2\right) = 0$$

$$k_{51}\,p^4 - \left(k_{31} + k_{33}\,V_{cr}^2\right)p^2 + \left(k_{11} + k_{12}\,V_{cr}^2\right) = 0$$

dont la signification des termes est donnée par le texte roumain.

Il présente ensuite deux méthodes basées sur l'hypothèse de la non stationnarité du régime aérodynamique. L'une des méthodes étudie les vibrations à 1 degré de liberté, à l'aide du calcul symbolique et du critérium de stabilité Nyquist.

La pulsation minime de la vibration autoexcitée, pour des vibrations de torsion, est donnée par la relation:

$$\omega'^2 = \frac{K}{I + \dfrac{f'_M}{2\Omega'}\dfrac{d\,Cm}{d\alpha}\,b^3\,S}$$

et l'on déduit la valeur de la vitesse à laquelle apparaîssent de telles vibrations, de la relation:

$$p'_s = \frac{p_k}{f'_M}\,\frac{I_A}{I + I_A}$$

où

$$I_A = \frac{f'_M}{2\,\Omega'} \frac{d\,C_m}{d\alpha} \rho b^3 S.$$

La seconde méthode étudie les vibrations à deux degrés de liberté, flexion et torsion, telles qu'elles se présentent, pour les palettes libres dans les turbines.

La vitesse critique à la limite de la stabilité, compte tenu de l'oblicité du réseau de palettes, peut être déduite de la relation:

$$\frac{V}{\omega_0 b} = \frac{\left[\dfrac{1}{\alpha_0 \left(\dfrac{b}{p}\right)^2 m \cos(\varphi - \psi)} + \dfrac{1}{4}\right] A + \dfrac{1}{4}}{B}$$

pour la flexion, et

$$\frac{V}{\omega_0 b} = \frac{1 - A}{4\,Br}$$

pour la torsion.

La signification des termes de ces relations est présentée au cours de cet exposé.

BIBLIOGRAFIE

1. I. C. Cernîşevschi, *Coroana cu palete a turbinelor cu aburi drept filtru mecanic.* 1951.
2. P. Crol, *Despre fenomenul « flutter » la paletele turbomaşinilor.* 1951.
3. A. Meldahl, *Vibraţii autoexcitate ale aripilor având un grad de libertate.* Rev. Brown Boveri, Noembrie 1946.
4. Ch. Bellenot şi J. Lalive d'Epinay, *Vibraţii autoexcitate ale paletelor de turbomaşini.* Rev. Brown Boveri, Octombrie 1950.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

RECENZII

V. A. DOBROVOLSCHI, *Organe de maşini* Ed. de Stat ucraineană pentru literatura tehnică, Chiev, 1950.

Această lucrare, cu o extindere de 784 pagini şi 831 de figuri în text, este întocmită din punct de vedere tematic în conformitate cu programa analitică a cursului de *Organe de maşini* predat în institutele sovietice de învăţământ tehnic superior, cu specializare în construcţii de maşini. Destinată să servească drept curs pentru studenţii ingineri, lucrarea este elaborată la un nivel tehnic superior. Ea poate servi totodată şi ca material consultabil pentru inginerii şi tehnicienii din industria de construcţii de maşini.

Ediţia recenzată este a şasea ediţie din lucrarea cu acelaşi titlu, în care Prof. V. A. Dobrovolschi a ţinut seamă de observaţiile critice ale savanţilor sovietici M. A. Saverin, N. I. Colcin, B. A. Ivanov, N. S. Acercan şi ale recensorului Prof. L. B. Levenson, cunoscutul specialist în teoria mecanismelor.

Cursul de *Organe de maşini* joacă un rol foarte important pentru ansamblul disciplinelor care stau la baza structurii profesionale a inginerilor constructori de maşini. De aceea, la predarea unui curs de organe de maşini trebue folosită metodica cea mai avansată şi adaptată realismului ştiinţific. Aici îmbinarea teoriei cu practica trebue să fie efectivă şi totodată făcută la nivelul ştiinţific corespunzător unui curs de învăţământ superior.

Abordându-se studiul tehnic al unui anumit organ de maşină, acesta nu trebue privit ca un obiect separat şi în nemişcare, asupra căruia profesorul face o disertaţie analitico-descriptivă mai mult sau mai puţin pedantă. Dimpotrivă, metoda nouă de prezentare şi studiere a unui organ de maşină este aceea care-l leagă pe acesta strâns de viaţa maşinii şi a mecanismului în care se integrează, care arată legătura şi condiţionarea reciprocă dintre organul studiat şi celelalte organe, care scoate în evidenţă rolul funcţional al organului, care prezintă caracteristicile sale tehnice în faza dinamică, care ţine cont de posibilităţile de execuţie şi de cele de evoluţie în funcţiune, care indică metodele de calcul şi proiectare, de standardizare şi interschimbabilitate, cele mai adecuate vieţii organului şi a ansamblului din care face parte.

De aceste principii călăuzitoare ţine seama şi lucrarea *Organe de maşini*, care într'o parte introductivă se ocupă cu: istoricul desvoltării studiului organelor de maşini, clasificarea sarcinilor şi a tensiunilor, caracteristicile materialelor şi încercările lor, factorii care influenţează asupra rezistenţei organelor de maşini, studiul tensiunilor din material în lumina noilor teorii de rezistenţă, alegerea pe baze ştiinţifice a aşa numiţilor coeficienţi de siguranţă, calculul organelor de maşini supuse şocurilor, norme experimentale de calcul, principii de bază ale proiectării organelor de maşini, standardizarea şi interschimbabilitatea organelor de maşini.

In partea întâia a studiului organologic propriu zis sunt tratate organele de asamblare: niturile, sudurile, îmbinările prin fretare sau presare, şuruburile, penele, îmbinările canelate, ştifturile.

In partea a doua sunt tratate organele de transmisie: roţile de fricţiune, angrenajele, lanţurile, cablurile şi curelele de transmisie cu roţile respective, variatorii şi reductorii.

In partea a treia sunt studiate organele mişcării de rotaţie: axele şi arborii cu fusurile şi pivoţii lor, lagărele, cuplajele.

Nu sunt tratate organele mecanismului bielă-manivelă şi organele pentru reţinerea, conducerea şi comanda circulaţiei fluidelor. Conform programei analitice sovietice, aceste organe sunt tratate la cursurile respective de specialitate.

In această lucrare a Prof. Dobrovolschi, studiul organelor de maşini este redat sub o formă clară şi concisă, prezentându-se, la locul adecuat, atât procedeele tehnologice de execuţie cât şi metodele de calcul şi proiectare cele mai moderne.

Calculele folosite, deşi sunt axate pe cele mai noi ipoteze şi teorii, nu se pierd totuşi în deducţii aride împinse dincolo de domeniul soluţiilor concrete, ci se ancorează în ipotezele practice de proiectare. Partea introductivă generală de 74 de pagini de text înlesneşte mult studiul diferitelor organe tratate aparte.

De asemenea, figurile din text sunt alese dintre cele mai expresive şi mai interesante; ele au un accentuat caracter didactic şi o corectă prezentare tehnică.

Lucrarea *Organe de maşini* a Prof. D o b r o v o l s c h i reprezintă nu numai un tratat folositor studenţilor, inginerilor şi tehnicienilor, ci şi un îndreptar pentru profesorii de specialitate din învăţământul tehnic superior.

L. Săveanu

I. E. CANTOROVICI, *Tratamentele termice ale oţelurilor şi fontelor.* Termicescaia obrabotca stali i ciuguna, Moscova Metallurghizdat, 1950.

Cartea este un tratat complet de tratamente termice şi termochimice.

Pe baza teoriilor moderne ale analizei termice referitoare la oţeluri, sunt expuse pe larg principiile teoretice ale tratamentelor, transformările structurale care au loc, precum şi proprietăţile şi utilizările diferitelor feluri de oţeluri şi fonte.

O extindere tot atât de importantă se dă expunerii condiţiilor şi dispozitivelor practice de tratament termic, precum şi metodelor de control atât pentru cercetarea ştiinţifică cât şi pentru practica de atelier.

Cartea este împărţită în trei părţi.

Partea întâia cuprinde tratamentul termic şi termochimic al oţelurilor.

După ce se arată caracteristicile generale ale tratamentelor termice, se studiază transformările de încălzire ale oţelurilor ordinare din punct de vedere fizico-chimic şi structural.

Se conturează astfel noţiunea de grăunte austenitic al oţelurilor, modul cum este influenţată mărimea acestui grăunte de tratamentele termice succesive şi de deformarea mecanică şi se indică metodele de determinare a mărimii grăuntelui.

Urmează studiul constituenţilor de echilibru, transformarea perlitică ca rezultat al tratamentelor termice de recoacere, de unde rezultă scopul şi proprietăţile obţinute prin acest tratament.

Se trece apoi la studiul transformărilor austenitei supusă unei răciri continue, cu vitese variabile de răcire, ajungând la limită la transformarea martensitică.

Mecanismul transformării perlitice şi martensitice este explicat pe baza studiului transformărilor isoterme ale austenitei subrăcite, cercetări noi la care au avut un aport deosebit savanţii sovietici S. S. S t e i n b e r g şi N. A. M i n c h e v i c i şi care sunt concretizate prin trasarea curbelor în 8 pentru diferite oţeluri.

Capitolul care tratează despre condiţiile practice de efectuare a călirii are o extindere deosebită, dându-se tabele şi diagrame cu numeroase date practice, metode de determinare a puterii de pătrundere a călirii, metode de călire superficială, etc.

In mod analog cu călirea este studiată revenirea oţelurilor, structura şi proprietăţile constituenţilor de revenire, precum şi condiţiile de realizare practică.

Prima secţiune a părţii întâia se închide cu un studiu complet al fenomenelor de îmbătrânire în cazul oţelurilor.

A doua secţiune se ocupă de tratamentele termochimice.

După o introducere teoretică detaliată a condiţiilor de echilibru a fierului în raport cu diverse medii gazoase şi în general a difuziunii în fier în stare solidă, se trece la studiul cementării cu carbon în diverse medii, al nitrurării, cianidezării, etc.

Partea a doua — foarte desvoltată — se referă la oţeluri speciale.

Se discută modalităţile practice de clasificare a oţelurilor speciale după structură, după influenţa elementelor de aliere asupra polimorfismului fierului sau a solubilităţii lor în fier, apoi se studiază influenţa diverselor elemente în funcţie şi de carbon şi astfel se ajunge la necesitatea studierii oţelurilor speciale cu ajutorul diagramelor ternare.

In capitole separate se examinează modul cum influenţează diversele elemente de aliere, singure sau combinate câte două sau trei, transformările structurale şi însuşirile oţelurilor.

O desvoltare deosebită se dă diverselor oţeluri de largă întrebuinţare practică. Astfel, înafară de oţelurile de construcţii şi cele rapide, sunt consacrate capitole speciale descrierii oţelurilor inoxidabile, rezistenţa la temperaturi înalte, magnetice şi pentru maşini automate.

Partea a treia se ocupă de fonte.

Se studiază procesul de grafitizare, proprietăţile, structura şi tratamentele fontelor obişnuite şi se examinează mijloacele pentru îmbunătăţirea structurii şi însuşirilor fontelor prin modificare.

Ultimul capitol se ocupă de tratamentele termochimice: maleabilizarea fontelor, fonte cu coajă, dură, cementări cu azot, aluminiu, etc.

Trebue menţionate în mod special descrierea proceselor de cianidizare la temperaturi joase şi în medii gazoase, a revenirii pe cale electrică, a călirii sub 0^0C, a calorizării, cementării cu crom şi siliciu, procedee noi elaborate de savanţii sovietici.

Expunerea unei serii de probleme este bazată pe cercetări făcute de autor. Astfel, studiul troestitei aciculare, constituent de transformare isotermă a austenitei subrăcite, variaţia tensiunilor reziduale în oţeluri cu crom şi molibden la călire şi revenire, influenţa diverselor elemente de aliere asupra proprietăţilor mecanice a stratelor nitrurate, influenţa beriliului în îmbunătăţirea fragilităţii oţelurilor, etc.

In concluzie, lucrarea care cuprinde un foarte bogat material documentar, prezentat într'o formă clară şi într'o expunere gradată, constitue un tratat de nivel superior, destinat studenţilor Institutelor de Metalurgie şi Construcţii de Maşini, cercetătorilor, institutelor ştiinţifice, precum şi tuturor inginerilor de specialitate.

P. Dan

A. F. SMIRNOV, *Stabilitatea statică şi dinamică a construcţiilor.* Staţicescaia i dinamicescaia ustoicivost soorujenii. Gosudarstvenoe transportnoe jelesnonodorojnoe izdatelstvo, Moscova, 1947.
Traducerea Ed. Transporturilor, Bucureşti, 1951.

Traducerea lucrării Prof. A. F. Smirnov, publicată în 1947 este, împreună cu *Statica şi Dinamica Construcţiilor* a Prof. Procofiev, a doua traducere editată de OPED privind problemele de dinamică a construcţiilor.

Lucrarea cuprinde două părţi, în prima fiind descrise operaţiile şi proprietăţi generale ale matricilor, iar în a doua studiul diferitelor sisteme statice din punctul de vedere al stabilităţii cu ajutorul transpunerii matriciale.

Introducerea calculului cu matrice este indicată pentru majoritatea sistemelor statice complexe la care apar ecuaţii numeroase. Pornind dela alcătuirea matricelor de eforturi şi deplasări, se realizează un suport mecanic pentru elementele algebrice ale calculului, ceea ce face ca operaţiile să câştige o imagine concretă. De asemenea, teoremele generale cu caracter algebric privind transformările matricelor îşi găsesc astfel o interpretare naturală în domeniul de aplicaţie. In afara faptului că duce la o suprimare unitară a fenomenului de stabilitate, această metodă permite şi urmărirea calitativă a fenomenului precum şi a limitelor ce-l încadrează.

In materialul folosit intră numeroase lucrări recente ale diferiţilor autori sovietici care au dat desvoltarea actuală a teoriei stabilităţii.

Este de observat că metoda, cu tot aparatul matematic necesar definiţiei operaţiilor, are un caracter practic în cazul problemelor de stabilitate uzuale cu un mare număr de necunoscute. Insă o serie de probleme de stabilitate nu-şi găsesc încă un sprijin potrivit în calculul matricial, în special la probleme de stabilitate funcţională, chiar şi cu un număr redus de parametri. De asemenea, în cazuri mai simple, dar în cadrul unui fenomen principial de stabilitate deosebit de cel uzual, metoda directă este mai clară.

Fără îndoială că acest moment va fi depăşit în sensul cercetărilor lui F. S. Iasinschi, B. G. Galerchin, A. P. Dinnie, E. L. Nicolai, S. A. Bernstein, V. Z. Vlasov, I. I. Staerman ş. a., a căror sintetizare în *Stabilitatea statică şi dinamică a construcţiilor* este de un interes general.

M. Mişicu

C. 3

INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4
BUCUREȘTI

C. 2331.

Prețul Lei 5.—